Логика высказываний

Ирина Борисовна Просвирнина

- Высказывания
- Сложные высказывания
- Условные высказывания
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Тавтологии и противоречия
- Логическая эквивалентность высказываний
- Булева алгебра высказываний
- Выполнимые и невыполнимые высказывания
- Проблема выполнимости

Высказывания

Определение 1 **Высказывание** – это повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не может быть истинным или ложным одновременно.

Высказывания

Пример 1 Все предложения, приведенные ниже, являются высказываниями.

1. Минск – столица Беларуси.
2. Марсель – столица Франции.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $2 + 2 = 3$.

Высказывания 1 и 3 являются истинными, а высказывания 2 и 4 являются ложными.

Высказывания

Пример 2 Предложения, приведенные ниже, не являются высказываниями.

1. Который час?
2. Вам следует внимательно слушать лекцию.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

Предложения 1 и 2 не являются высказываниями, так как это не повествовательные предложения. Предложения 3 и 4 не являются высказываниями, так как мы не можем определить, истины они или ложны.

Высказывания

- Введем **пропозициональные переменные** (**высказывательные переменные**), значениями которых являются высказывания. Будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита: $p, q, r, s, \ldots$.

Логическое значение высказывания – истина (T), если это высказывание является истинным, и ложь (F), если это высказывание ложно.

Высказывания

Раздел логики, изучающий высказывания, называется **исчислением высказываний** или **пропозициональной логикой**.

Греческий философ Аристотель, живший более 2300 лет тому назад, был первым, кто систематически изучил и изложил пропозициональную логику.

Сложные высказывания

Рассмотрим методы построения новых высказываний из данных высказываний.

Эти методы были изложены английским математиком Джорджем Булем в его работе «*The Laws of Thought*» в 1854 году.

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Сложные высказывания

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Мы рассмотрим следующие логические операции:

- отрицание,
- конъюнкцию,
- дизъюнкцию,
- исключающее или,
- импликацию,
- биимпликацию.

Отрицание высказывания

- Определение 2 **Отрицанием** высказывания р называется высказывание «не р», которое обозначается через $\neg$р. Отрицание высказывания $\neg$р истинно, когда высказывание р ложно, и ложно в противном случае.

Отрицание высказывания

Таблица истинности для отрицания высказывания.	
p	$\neg$p
T	F
F	T

Отрицание высказывания

Пример 3 Построить отрицание высказывания «Смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти» и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Решение Отрицание высказывания:

«Не верно, что смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти».

Более привычный вариант отрицания высказывания:

«Смартфон Анны имеет менее 32 GB памяти».

Конъюнкция высказываний

Определение 3 **Конъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание «p и q», которое обозначается через p□q. Конъюнкция p□q истинна, когда оба высказывания p и q истинны и ложна в противном случае.

Конъюнкция высказываний

Таблица истинности для конъюнкции двух высказываний		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Конъюнкция высказываний

Пример 4 Построить конъюнкцию высказываний p и q, где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Конъюнкция высказываний

p –«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,
q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

<u>Решение</u> Конъюнкция высказываний p и q:
«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска и процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».
Более привычный вариант конъюнкции высказываний p и q:
«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске и работает быстрее, чем 1 GHz».

Дизъюнкция высказываний

Определение 4 **Дизъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание «p или q», которое обозначается через p□q. Дизъюнкция p□q ложна, когда оба высказывания p и q ложны, и истинна в противном случае.

Дизъюнкция высказываний

Таблица истинности для дизъюнкции двух высказываний		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Дизъюнкция высказываний

Пример 5 Построить дизъюнкцию высказываний p и q, где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Дизъюнкция высказываний

p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,
q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

Решение. Дизъюнкция высказываний p и q:
«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска, или процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».
Более привычный вариант дизъюнкции высказываний p и q:
«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске или работает быстрее, чем 1 GHz».

Исключающее или

Определение 5 **Исключающим или** высказываний p и q называется высказывание «p или q, но не одновременно p и q», которое обозначается через p□q. Исключающее или p□q истинно, когда в точности одно из высказываний p или q истинно, и ложно в противном случае.

Исключающее или

Таблица истинности для исключающего или двух высказываний		
p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Исключающее или

Пример 6 Исключающее или используется в следующей ситуации.

Студенты изучающие математический анализ или программирование, но не обе эти дисциплины одновременно, могут записаться на дополнительный курс по менеджменту.

Это значит, что студенты, изучающие обе дисциплины: математический анализ и программирование, – не могут изучать дополнительный курс по менеджменту.

Условные высказывания

Определение 6 Пусть p и q – два высказывания. Высказывание «если p, то q» называется **условным высказыванием** и обозначается через p□q. Условное высказывание p□q ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

В условном высказывании p□q высказывание p называется **условием**, а высказывание q **заключением**.

Условное высказывание еще называется **импликацией**.

Условные высказывания

Таблица истинности для условного высказывания $p \to q$		
p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Условное высказывание p□q ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

Условные высказывания

Условное высказывание $p \to q$ можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- из p следует q;
- p влечет q;
- p достаточно для q;
- p является достаточным условием для q;
- q необходимо для p;
- q является необходимым условием для p.

Условные высказывания

<u>Пример 7</u> Пусть p – высказывание «Мария изучает дискретную математику», а q – высказывание «Мария найдет интересную и высокооплачиваемую работу». Выразить высказывание $p \rightarrow q$ на русском языке.

<u>Решение</u> Варианты высказывания $p \rightarrow q$:

«Если Мария изучает дискретную математику, то она найдет интересную и высокооплачиваемую работу»,

«Чтобы Мария нашла интересную и высокооплачиваемую работу, ей достаточно изучать дискретную математику».

Конверсия, контрапозиция, инверсия

С условным высказыванием p □ q связаны еще три условных высказывания:

- высказывание q □ p называется **конверсией** высказывания p □ q;
- высказывание □q □ □p называется **контрапозицией** высказывания p □ q;
- высказывание □p □ □q называется **инверсией** высказывания p □ q;

Конверсия, контрапозиция, инверсия

Пример 7 Пусть p – высказывание «Футбольный клуб «Неман» выигрывает матч», а q – высказывание «Идет дождь». Построить конверсию, контрапозицию и инверсию импликации p q на русском языке.

Решение

- Конверсия импликации p q: «Если идет дождь, то футбольный клуб «Неман» выигрывает матч».
- Контрапозиция импликации p q: «Если дождь не идет, то футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч».
- Инверсия импликации p q: «Если футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч, то дождь не идет».

Биимпликация высказываний

<u>Определение 7</u> **Биимпликацией** высказываний p и q называется высказывание «p тогда и только тогда, когда q», которое обозначается через p □ q. Биимпликация p □ q истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

Биимпликация высказываний

Таблица истинности для биимпликации двух высказываний		
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Биимпликация p □ q истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

Биимпликация высказываний

Биимпликацию p q можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- p необходимо и достаточно для q;
- p является необходимым и достаточным условием для q;
- p если и только если q.

Биимпликация высказываний

<u>Пример 8</u> Пусть p – высказывание «Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете», а q – высказывание «Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж». Выразить высказывание p □ q на русском языке.

<u>Решение</u>

«Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете, если и только если Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж».

Таблицы истинности сложных высказываний

С помощью введенных логических операций конъюнкция, дизъюнкция, исключающее или, импликация, биимпликация и отрицание можно строить сложные высказывания, состоящие из произвольного числа пропозициональных переменных.

Для определения логического значения сложных высказываний следует использовать таблицы истинности, определяющие логические значения высказываний □p, p □ q, p □ q, p □ q, p □ q, p □ q.

Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□□q) □ (p□q).

Таблица истинности высказывания (p□□q) □ (p□q)					
p	q	□q	p□□q	p□q	(p□□q)□(p□q)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания   (p□ □q) □ (p□q).

Таблица истинности высказывания (p□ □q) □ (p□q)					
p	q	□q	p□ □q	p□q	(p□ □q)□(p□q)
T	T	F			
T	F	T			
F	T	F			
F	F	T			

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□ □q) □ (p□q).

Таблица истинности высказывания (p□ □q) □ (p□q)					
p	q	□q	p□ □q	p□q	(p□ □q)□(p□q)
T	T	F	T		
T	F	T	T		
F	T	F	F		
F	F	T	T		

Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□ □q) □ (p□q).

Таблица истинности высказывания (p□ □q) □ (p□q)					
p	q	□q	p□ □q	p□q	(p□ □q)□(p□q)
T	T	F	T	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	F	F	
F	F	T	T	F	

Таблицы истинности сложных высказываний

<u>Пример 9</u> Построить таблицу истинности сложного высказывания (p□ □q) □ (p□q).

Таблица истинности высказывания (p□ □q) □ (p□q)					
p	q	□q	p□ □q	p□q	(p□ □q)□(p□q)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

Приоритет (порядок выполнения) логических операций

Приоритет логических операций	
Операция	Приоритет
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Для уменьшения числа пар скобок в сложном высказывании установлен порядок выполнения логических операций, описанный в таблице.

Приоритет (порядок выполнения) логических операций

Приоритет логических операций	
Операция	Приоритет
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

<u>Пример 10</u> Расставим скобки в сокращенной записи сложного высказывания

p □ q □ p □ □ (p □ q):

1. (p □ q) □ p □ □ (p □ q),
2. (p □ q) □ (p □ □ (p □ q)).

Тавтологии и противоречия

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Тавтологии и противоречия

<u>Определение 2</u> Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Тавтологии и противоречия

Определение 3 Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

Тавтологии и противоречия

<u>Пример 1</u> Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

Примеры тавтологии и противоречия			
p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T F	F T	T T	F F

Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

Примеры тавтологии и противоречия			
p	¬p	p∨¬p	p∧¬p
T F	F T	T T	F F

Высказывание p□ □p всегда истинно, значит p□ □p – тавтология.

Высказывание p□ □p всегда ложно, значит p□ □p – противоречие

Логическая эквивалентность высказываний

Два сложных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они имеют одинаковые истинностные значения на всех возможных наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных.

Логическую эквивалентность сложных высказываний можно определить, используя тавтологию.

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Определение 4</u> Сложные высказывания p и q называются **логически эквивалентными**, если сложное высказывание p □ q является тавтологией.

Запись p □ q означает, что p и q логически эквивалентны.

Логическая эквивалентность высказываний

Для определения эквивалентности двух сложных высказываний можно использовать таблицы истинности.

Два сложных высказывания логически эквивалентны тогда и только тогда, когда столбцы истинностных значений этих высказываний совпадают.

<u>Будьте внимательны!</u> В таблицах истинности, соответствующих рассматриваемым высказываниям, наборы истинностных значений пропозициональных переменных должны располагаться в одинаковой последовательности.

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□□ q
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□ □q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□ □q.						
p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□ □ q
T	T	T				
T	F	T				
F	T	T				
F	F	F				

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□□ q
T	T	T	F			
T	F	T	F			
F	T	T	F			
F	F	F	T			

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□(p□q)	□p	□q	□p□□q
T	T	T	F	F		
T	F	T	F	F		
F	T	T	F	T		
F	F	F	T	T		

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□ □q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□ □q.						
p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□ □ q
T	T	T	F	F	F	
T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	
F	F	F	T	T	T	

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.						
p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□□ q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 2</u> Покажем, что $\neg(p \lor q)$ и $\neg p \land \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \lor q)$ и $\neg p \land \neg q$.						
p	q	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

Таблицы истинности для □(p□q) и □p□□q.

p	q	p□q	□ (p□q)	□p	□q	□p□□ q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Истинностные значения высказываний □(p□q) и □p□□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □(p□q) □ □p□□q является тавтологией, и сложные высказывания □(p□q) и □p□□q логически эквивалентны.
□(p□q) □ □p□□q – один из **законов Де Моргана**.

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □p□q и p□q				
p	q	□p	□p□q	p□q
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □p□q и p□q

p	q	□p	□p□q	p□q
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □p□q и p□q				
p	q	□p	□p□q	p□q
T	T	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □p□q и p□q				
p	q	□p	□p□q	p□q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

<u>Пример 3</u> Покажем, что □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Таблицы истинности для □p□q и p□q

p	q	□p	□p□q	p□q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

Таблицы истинности для □p□q и p□q				
p	**q**	**□p**	**□p□q**	**p□q**
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Истинностные значения высказываний □p□q и p□q совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание □p□q □ p□q является тавтологией, и сложные высказывания □ p□q и p□q логически эквивалентны.

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 4 Покажем, что сложные высказывания p □ (q □ r) и (p □ q) □ (p □ r) логически эквивалентны.

В высказывания p □ (q □ r) и (p □ q) □ (p □ r) входят три пропозициональные переменные p, q и r.

Поэтому в таблицах истинности будет 8 строк с комбинациями истинностных значений пропозициональных переменных p, q и r:

T T T, T T F, T F T, T F F, F T T, F T F и F F F.

Мы будем всегда использовать в таблицах истинности этот порядок строк!

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□(q□r)	p□q	p□r	(p□q)□(p□r)
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□ (q□r)	p□ q	p□r	(p□q)□ (p□r)
T	T	T	T				
T	T	F	F				
T	F	T	F				
T	F	F	F				
F	T	T	T				
F	T	F	F				
F	F	T	F				
F	F	F	F				

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□ (q□r)	p□ q	p□r	(p□q)□ (p□r)
T	T	T	T	T			
T	T	F	F	T			
T	F	T	F	T			
T	F	F	F	T			
F	T	T	T	T			
F	T	F	F	F			
F	F	T	F	F			
F	F	F	F	F			

Доказательство логической эквивалентности $p \lor (q \land r)$ и $(p \lor q) \land (p \lor r)$

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	T	T	T	T	T		
T	T	F	F	T	T		
T	F	T	F	T	T		
T	F	F	F	T	T		
F	T	T	T	T	T		
F	T	F	F	F	T		
F	F	T	F	F	F		
F	F	F	F	F	F		

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□ (q□r)	p□ q	p□r	(p□q)□ (p□r)
T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	F	T	T	T	
T	F	T	F	T	T	T	
T	F	F	F	T	T	T	
F	T	T	T	T	T	T	
F	T	F	F	F	T	F	
F	F	T	F	F	F	T	
F	F	F	F	F	F	F	

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□ (q□r)	p□ q	p□r	(p□q)□ (p□r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Доказательство логической эквивалентности $p \lor (q \land r)$ и $(p \lor q) \land (p \lor r)$

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Доказательство логической эквивалентности p□(q□r) и (p□q)□(p□r)

p	q	r	q□r	p□(q□r)	p□q	p□r	(p□q)□(p□r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Итак, p □ (q □ r) □ (p □ q) □ (p □ r) – **дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции**.

Таблица 1. Логические эквивалентности	
Эквивалентность	Название
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Законы тождества
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Законы доминирования
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Законы идемпотентности
$\neg(\neg p) \equiv p$	Закон двойного отрицания
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Законы коммутативности

Логические эквивалентности (продолжение таблицы 1)	
Эквивалентность	**Название**
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Законы ассоциативности
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Законы дистрибутивности
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Законы де Моргана
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Законы поглощения
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Законы отрицания

Логическая эквивалентность высказываний

Множество сложных высказываний, на котором заданы логические операции □, □, □, удовлетворяющие законам тождества, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и отрицания, является **булевой алгеброй**.

Таблица 2. Логические эквивалентности, содержащие условные высказывания
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Таблица 3. Логические эквивалентности, содержащие биимпликации
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Применение законов Де Моргана

<u>Пример 5</u> Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «Сергей пойдет на концерт, или Евгений пойдет на концерт».
<u>Решение</u> Пусть p – «Сергей пойдет на концерт», а q – «Евгений пойдет на концерт», Тогда «Сергей пойдет на концерт, **<u>или</u>** Евгений пойдет на концерт» можно представить как p □ q.
По первому закону Де Моргана □(p □ q) логически эквивалентно □p □ □q .
Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «Сергей не пойдет на концерт, **<u>и</u>** Евгений не пойдет на концерт».

Применение законов Де Моргана

Пример 6 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «У Ольги есть смартфон, и у нее есть ноутбук».

Решение Пусть p – «У Ольги есть смартфон», а q – «У Ольги есть ноутбук», Тогда «У Ольги есть смартфон, **и** у нее есть ноутбук» можно представить как $p \wedge q$.

По первому закону Де Моргана $\neg(p \wedge q)$ логически эквивалентно $\neg p \vee \neg q$.

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «У Ольги нет смартфона, **или** у нее нет ноутбука».

Построение новых логических эквивалентностей

Логические эквивалентности таблиц 1, 2 и 3 можно использовать для построения новых логических эквивалентностей.

Пусть высказывание P входит в состав сложного высказывания C(P). P можно заменить логически эквивалентным ему высказыванием Q, при этом истинностное значение сложного высказывания C(Q) будет таким же как у C(P).

Построение новых логических эквивалентностей

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ q) и p □ □q логически эквиваленты.

Решение

□(p □ q) □ □(□p □ q) – пример 3

□ □(□p) □ □q – второй закон Де Моргана

□ p □ □q – закон двойного отрицания

Построение новых логических эквивалентностей

Пример 8 Покажем с помощью преобразований, что высказывания □(p □ (□p □ q)) и (□p □ □q) логически эквиваленты.

Решение

□(p □ (□p □ q)) □ □p □ □(□p □ q)

□ □p □ (□(□p) □ □q)

□ □p □ (p □ □q)

□ (□p □ p) □ (□p □ □q)

□ F □ (□p □ □q)

□ (□p □ □q) □ F

□ (□p □ □q)

Построение новых логических эквивалентностей

<u>Пример 9</u> Покажем с помощью преобразований, что высказывание $(p \square q) \square (p \square q)$ является тавтологией.

<u>Решение</u>

$$(p \square q) \square (p \square q) \square \square (p \square q) \square (p \square q)$$

$$\square (\square p \square \square q) \square (p \square q)$$

$$\square (\square p \square p) \square (\square q \square q)$$

$$\square T \square T$$

$$\square T$$

Выполнимые и невыполнимые высказывания

Определение 5 Сложное высказывание называется **выполнимым**, если существует набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором это сложное высказывание является истинным.

Если сложное высказывание ложно на любом наборе истинностных значений пропозициональных переменных, то оно называется **невыполнимым**.

Проблема выполнимости

Определение 6 Набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором выполнимое высказывание принимает значение истина, называется **решением** данной проблемы выполнимости.

Выполнимые и невыполнимые высказывания

<u>Пример 9</u>

Выясним, какие из следующих высказываний являются выполнимыми:

- (p □ □q) □ (q □ □r) □ (r □ □p) – выполнимо

  (p = T, q = T, r = T);
- (p □ q □ r) □ (□p □ □q □ □r) – выполнимо

  (p = T, q = F, r =T);
- (p □ □q) □ (q □ □r) □ (r □ □p) □ (p □ q □ r) □ (□p □ □q □ □r) – невыполнимо (почему?).

Проблема выполнимости

В терминах выполнимости сложных высказываний моделируются задачи из различных областей науки и техники:

- робототехники,
- разработки программного обеспечения,
- компьютерного проектирования,
- проектирования функциональных схем,
- организации компьютерных сетей,
- генетики.

Головоломка Судоку 9□9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Большой квадрат 9□9 делят на 9 маленьких квадратов 3□3. В некоторых из 81 ячеек записаны цифры от 1 до 9. Нужно заполнить пустые ячейки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом квадрате 3□3 не повторялись одинаковые цифры.

Головоломка Судоку 9□9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

<u>Задача</u>

Построить сложное высказывание, выполнимость которого равносильна решению головоломки Судоку 9□9.