Интегральное исчисление

Приложения определённого интеграла

Студент должен знать

- понятия неопределённого и определённого интегралов;
- свойства интегралов;
- таблицу неопределённых интегралов;
- методы интегрирования;
- формулу Ньютона-Лейбница.

Заполните таблицу

F(x)	*f(x)=F'(x)*
$F(x)=x^3+11$	$f(x)=3x^2$
$F(x)=x^2+0,2$	$f(x)=2x$
$F(x)=x^4+\frac{\pi}{2}$	$f(x)=4x^3$

Первообразная (определение)

$y = F(x),\ y = f(x), D(F) = D(f) = X,$

- $F(x)$ – ***первообразная*** для $f(x)$, если для всех $x \in X$:

$$F'(x) = f(x).$$

Определить первообразную функции $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = x^3$$

т.к.

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

Определить первообразную функции $f(x) = 3x^2$

1. $F(x) = x^3+1$, т.к.

$$F'(x) = (x^3+1)' = 3x^2+0 = f(x).$$

2. $F(x) = x^3-7$, т.к.

$$F'(x) = (x^3-7)' = 3x^2-0 = f(x).$$

Теорема 1

- Функция $f(x)$, имеет бесконечное множество первообразных вида $F(x)+C$.

Неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла

Теорема 2

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

- Дифференциал интеграла функции равен подынтегральному выражению.

Теорема 3

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- Производная интеграла равна подынтегральной функции.

Теорема 4

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

- Интеграл производной функции равен сумме этой функции с произвольной константой.

Теорема 5

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx =$$

$$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- Интеграл суммы равен сумме интегралов

Теорема 6

$$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

- Постоянный множитель выносится за знак интеграла

Основные формулы интегрирования

Интеграл дифференциала аргумента

$$\int dx = x + C$$

Интеграл степенной функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$n \neq -1$$

Интеграл обратной пропорциональности

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$x \neq 0$$

Интеграл экспоненциальной функции

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Интеграл показательной функции

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Интеграл функции косинуса

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Интеграл функции синуса

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование
2. Метод подстановки (замены переменной)
3. Метод интегрирования по частям

Непосредственное интегрирование

- Найти:

$$\int \left(2x^3 + 3x^2 - 2x + 8\right)dx$$

$$\int\left(2x^3+3x^2-2x+8\right)dx=$$

$$=\int 2x^3dx+\int 3x^2dx-\int 2xdx+\int 8dx=$$

$$=2\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int xdx+8\int dx=$$

$$=2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)+3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)-2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+8x+C=$$

$$=\frac{x^4}{2}+x^3-x^2+8x+C.$$

Метод подстановки (замены переменной)

- Найти:

$$\int \left(x^3 + 3\right)^4 x^2 dx$$

Введение подстановки

$$t = x^3 + 3$$

$$dt = d\left(x^3 + 3\right) = \left(x^3 + 3\right)' dx = 3x^2 dx$$

$$dt = 3x^2 dx$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\int \left(x^3+3\right)^4 x^2 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{3} dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{t^5}{15} + C = \frac{\left(x^3+3\right)^5}{15} + C.$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u\,d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\,du$$

Найти: $\int x \ln x dx$

Чтобы воспользоваться формулой $\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du$

необходимо выбрать функцию ***u*** и дифференциал ***dυ***

Пусть $\boldsymbol{u = x}$ и $\boldsymbol{d\upsilon = lnx}$.

Тогда: $\boldsymbol{du = dx}$ и $\upsilon = \int d\upsilon = \int \ln x dx$

Такой выбор неудачен: невозможно интегрирование.

Выберем функцию $\boldsymbol{u}$ и дифференциал $\boldsymbol{dv}$ иначе:

Пусть $\boldsymbol{u = lnx}$ и $\boldsymbol{dv = xdx}$.

Тогда: $du = \frac{dx}{x}$ и $\upsilon = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

Образец оформления

$$\int x\ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ d\upsilon = xdx;\ \upsilon = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2 dx}{2x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{xdx}{2} =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

Определённый интеграл

- *Определённый интеграл* функции *y=f(x)* есть *число*, значение которого зависит от вида этой функции и пределов интегрирования *a* и *b*:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

- *f(x) – подынтегральная функция,*
- *f(x)dx – подынтегральное выражение,*
- *a – нижний предел интегрирования*
- *b – верхний предел интегрирования*

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Свойства определённого интеграла

Теорема 7 (аддитивность)

$$a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема 8

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx =$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

Теорема 9

$$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Теорема 10

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Вычисление определённых интегралов

Вычислить: $$\int_1^3 x^3 dx.$$

Вычисление определённых интегралов

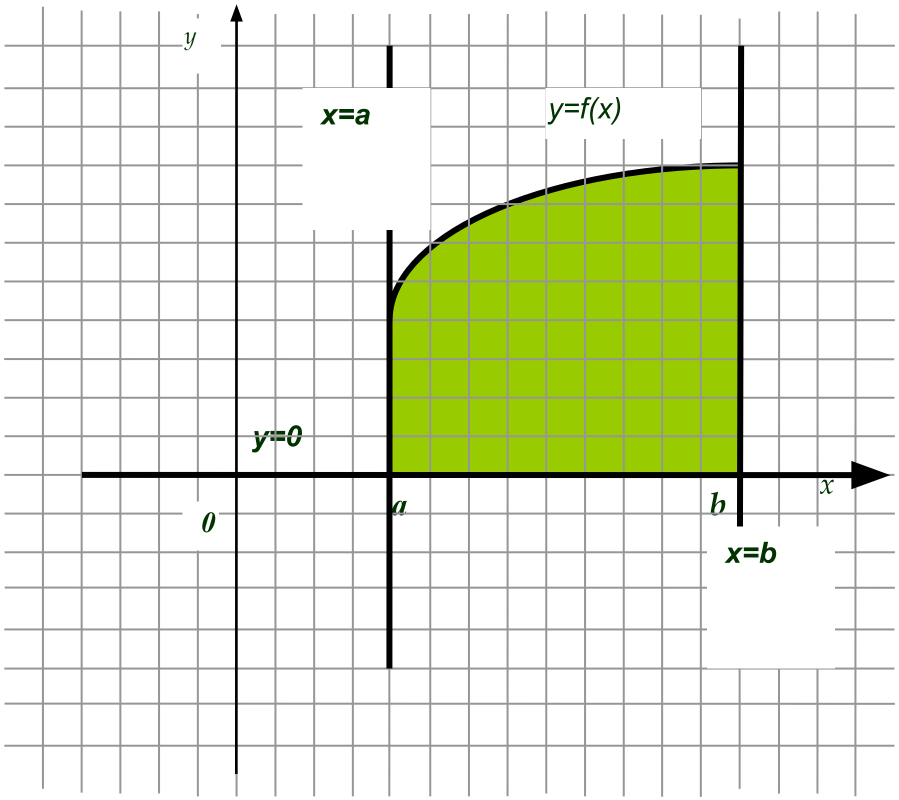
$$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Криволинейная трапеция

плоская фигура, ограниченная линиями:

- $y = f(x)$,
- $y = 0$ – ось абсцисс,
- $x = a$,
- $x = b$.



Площадь криволинейной трапеции

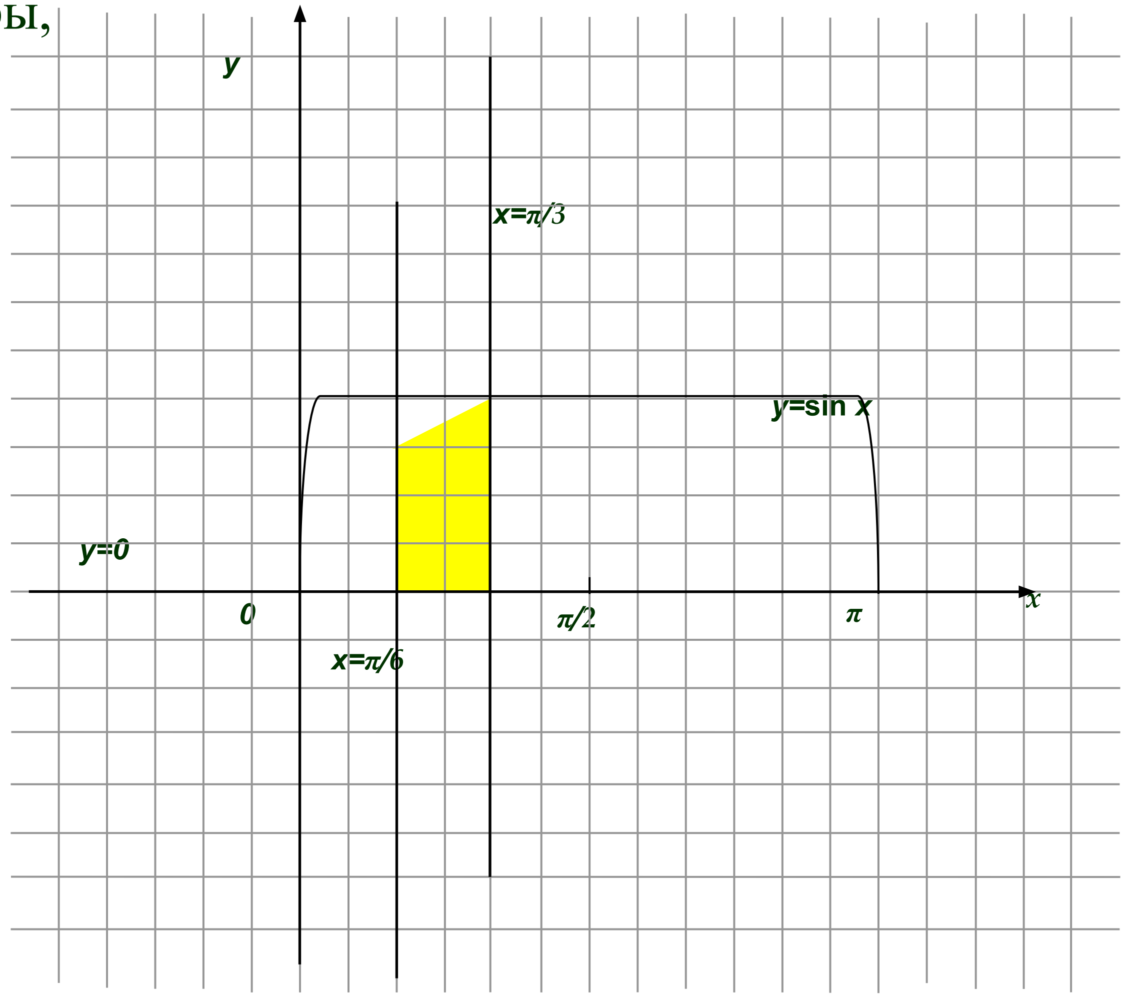
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Вычисление площадей плоских фигур

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin x,\ \ y = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}.$$



$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} \right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$ (кв.ед.).

Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение* –

- это уравнение, связывающее
  - независимую переменную *x*,
  - её функцию *y*,
  - производные различных порядков этой функции: *y*’, *y*’’, *y*’’’...

*«Дифференциальное уравнение» будем кратко обозначать аббревиатурой «ДУ»

Решить ДУ –

это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному ДУ:

- Такое множество функций имеет вид:
- *y = f(x; C), где* C – произвольная постоянная,
  - Это – общее решение ДУ.

Обыкновенное ДУ* –

- это ДУ, которое имеет только одну независимую переменную (например, x или t).
  - **ДУ в частных производных**** – это ДУ, которое имеет две и более независимых переменных.

*«Обыкновенное дифференциальное уравнение» будем кратко обозначать аббревиатурой «ОДУ».

**Такие ДУ в рамках нашей программы не рассматриваются.

Порядок* ОДУ –

- это порядок старшей производной:

$y' + 1 = 0$ – ОДУ первого порядка;

$y'' + y = x \cdot sinx$ – ОДУ второго порядка;

$y^{(V)} + y^{(III)} = a \cdot y,\ a \in R$ – ОДУ пятого порядка.

*В рамках нашей программы будут рассматриваться только ОДУ первого порядка.

Решение ОДУ

- ОДУ: $y' = x^2;$
- Одно из решений: $y = (1/3) \cdot x^3;$
- Проверка:
  - $((1/3) \cdot x^3)' = (1/3) \cdot (x^3)' = (1/3) \cdot 3x^2 = x^2.$
- Другое решение ОДУ: $y = (1/3) \cdot x^3 + 1,2.$

- ОДУ могут иметь **множество решений**.

Общее решение ОДУ –

- это множество решений, содержащее ВСЕ без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Частное решение ОДУ –

- одно из множества решений ОДУ, удовлетворяющее изначально заданным дополнительным условиям:
- ОДУ: $y' = x^2, \ y(1) = 1;$
- Общее решение: $y(x) = (1/3) \cdot x^3 + C.$
- Найдём С: $1 = (1/3) \cdot 1^3 + C$

  $C = 2/3.$
- Частное решение ОДУ: $y = (1/3) \cdot x^3 + 2/3.$

Задача Коши –

- это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным **начальным условиям**.

ОДУ с разделяющимися переменными –

это уравнение, которое возможно преобразовать таким образом, что **правая часть** будет содержать выражения **только** с переменной ***y***, а **левая** – **только** с переменной ***x*** (или наоборот).

Пример 1

Найти **общее** решение ОДУ

$$xy' = y.$$

Решение ОДУ происходит в несколько этапов:

Этап 1: расшифровка производной

Запишем: $y' = dy/dx$

Тогда:

$$xy' = y \Rightarrow$$

$$x \cdot dy/dx = y;$$

Этап 2: разделение переменных

$$x \cdot dy/dx = y;$$

По свойству пропорции, перенесём «крест-накрест» x и dx вправо, а y – влево:

$$dy/y = dx/x;$$

Этап 3: интегрирование

Найдём интегралы левой и правой частей уравнения:

$$\int(dy/y) = \int(dx/x);$$

$$ln|y| = ln|x| + \text{константа};$$

$$\text{константа} = ln|C|;$$

$$ln|y| = ln|x| + ln|C|;$$

Этап 4: нахождение *y* в явном виде

Найдём общее решение (функцию *y*) в явном виде:

$$ln|y| = ln|x| + ln|C|;$$

$$ln|y| = ln|Cx|;$$

$$y = Cx.$$

Ответ: $y = Cx$, где C – константа.

*Общее решение ОДУ – семейство функций (здесь – семейство прямых пропорциональностей).

Пример 2 (задача Коши)

Найти **частное** решение дифференциального уравнения

$$y' = -2y,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = 2.$$

Этап 1: расшифровка производной

Запишем: $y' = dy/dx$

Тогда:

$$y' = -2y \Rightarrow$$

$$dy/dx = -2y;$$

Этап 2: разделение переменных

$$dy/dx = -2y;$$

По свойству пропорции, перенесём «крест-накрест» *dx* вправо, а *y* – влево:

$$dy/y = -2dx;$$

Этап 3: интегрирование

Найдём интегралы левой и правой частей уравнения:

$$dy/y = dx;$$

$$\int(dy/y) = \int(-2dx);$$

$$\int(dy/y) = -2\int dx;$$

$$ln|y| = -2x + C`;$$

Этап 4: нахождение *y* в явном виде

Найдём общее решение (функцию *y*) в явном виде:

$$ln|y| = -2x + C`;$$

Учтём: если $lna = b$, то $a = e^b$;

$$y = e^{-2x + C`};$$

$$y = e^{C`} \cdot e^{-2x} \Rightarrow$$

Переобозначим: $e^{C`} = C,$

тогда общее решение будет иметь вид: $y = Ce^{-2x}.$

(семейство экспоненциальных функций)

Этап 5: нахождение частного решения

Найдём частное решение для $y(0) = 2$:

При $x = 0$: $y = Ce^{-2 \cdot 0} = Ce^{0} = C \cdot 1 = C = 2$.

Тогда $y = Ce^{-2x}$ и $C = 2 \Rightarrow$

$y = 2e^{-2x}$ – частное решение ОДУ.

Ответ: $y = 2e^{-2x}$.

Итоги

- свойства интегралов;
- таблица неопределённых интегралов;
- методы интегрирования;
- формула Ньютона-Лейбница;
- дифференциальные уравнения;
- задача Коши.

Домашнее задание

<u>К практическому занятию №3:</u>

- Теория – лекционный материал;
- Письменно – упражнения для самостоятельной работы.

Благодарю за сотрудничество

До встречи!