Литература

1. *Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С.* Методы оптимизации: учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
2. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации: учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
3. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие. – 2-е изд., исправл. – М.: Высшая школа, 2005.

Общая постановка задачи оптимизации

Требуется найти вектор $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$,
соответствующий экстремальному (минимальному или

Для существования решения задачи оптимизации целевая функция и допустимое множество должны обладать определенными свойствами. В общем случае существование решения устанавливается следующей теоремой Вейерштрасса:

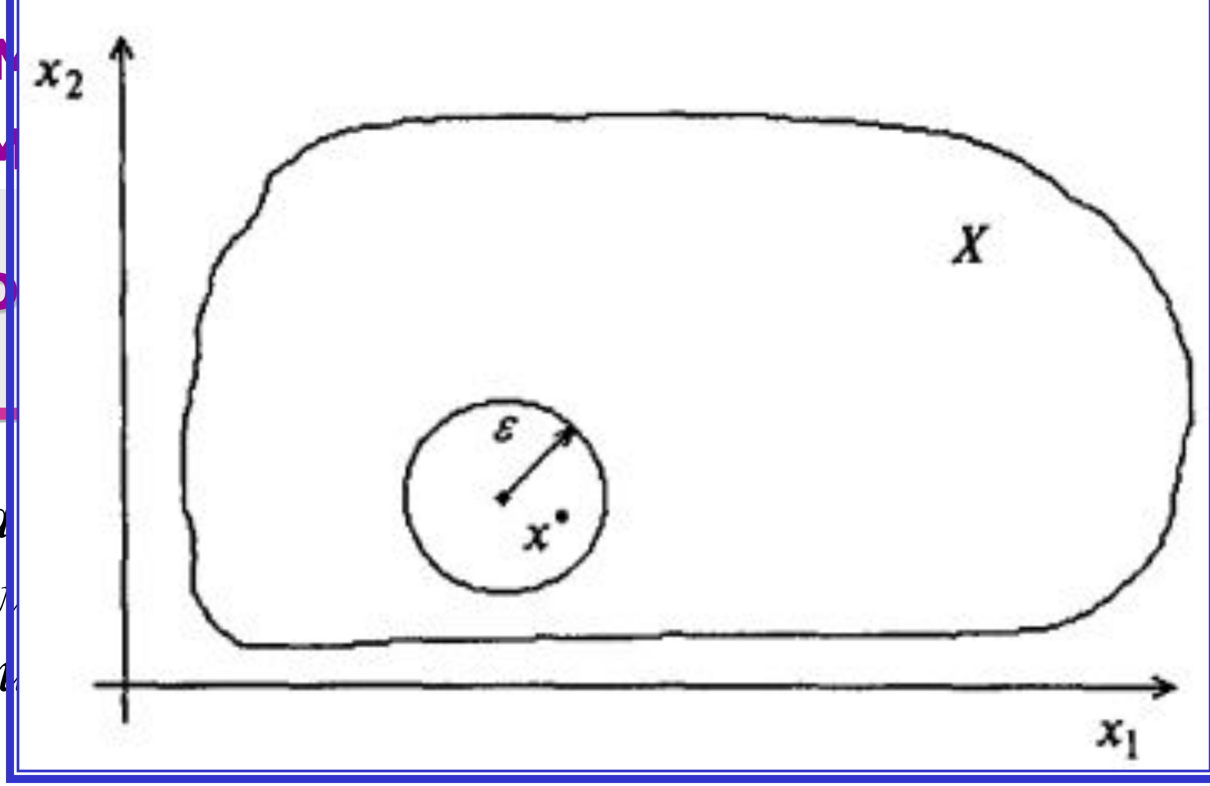
Всякая функция, непрерывная на непустом замкнутом и ограниченном множестве, обладает наибольшим и наименьшим значениями, которые достигаются либо внутри множества, либо на его границе.

Для определения глобального экстремума необходимо выявить и исследовать все точки, подозреваемые на экстремум. Эти точки называют также экстремальными или критическими.

$f(\mathbf{x}) \to \min, \ \mathbf{x} \in \Omega \in R$ $\qquad \min_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\Omega}(-f(\mathbf{x}))$

Матем… вной оптим…

Нео… ения



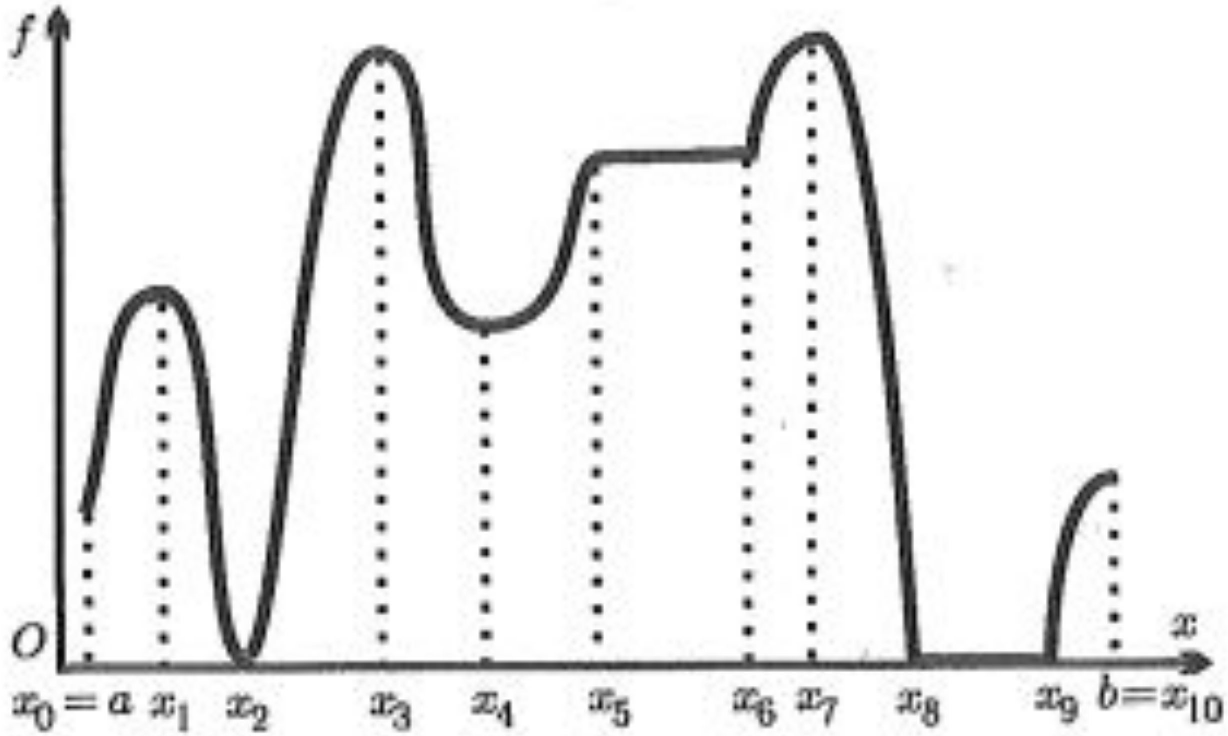
Точка … ютного) миним… функция дост… чения, т. е.

$$f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой* *локального (относительного)* *минимума функции* $f(\mathbf{x})$ *на множестве* Ω, *если существует* ε, *такое, что для любых* $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих условию* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, *справедливо неравенство* $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$. *Т.е.*

$$f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} : (\mathbf{x} \in \Omega) \cap (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon)$$

Если при некотором $\varepsilon > 0$ равенство $f(x^*)=f(x)$ для $x \in \Omega$ возможно только при $x=x^*$, то x^* называют точкой строгого локального минимума.



Точки x0, x2, x4 являются точками строгого локального минимума, а в точках, удовлетворяющим неравенствам $x5 < x \le x6$, $x8 \le x \le x9$, реализуется нестрогий локальный минимум.

Глобальный экстремум всегда является и локальным, но не наоборот!!!

Необходимые математические сведения

Градиент непрерывно дифференцируемой функции

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$$

Градиент функции в точке **x** направлен в сторону наибольшего возрастания функции в данной точке.

Матрица Гессе дважды дифференцируемой функции

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Необходимые математические сведения

Угловые миноры матрицы

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Задание 1. Вычислить градиент и матрицу Гессе функции $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2$ в точке (0; 1).

Необходимые математические сведения

Критерий Сильвестра

Матрица **H** *положительно определена* **H>0** *тогда и только тогда, когда* ***<u>все</u>*** *ее угловые миноры* ***<u>положительны.</u>***

Матрица **H** *отрицательно определена* **H<0** *тогда и только тогда, когда* ***<u>все</u>*** *ее угловые миноры* ***<u>чередуют знак</u>****, начиная с* ***<u>отрицательного</u>****.*

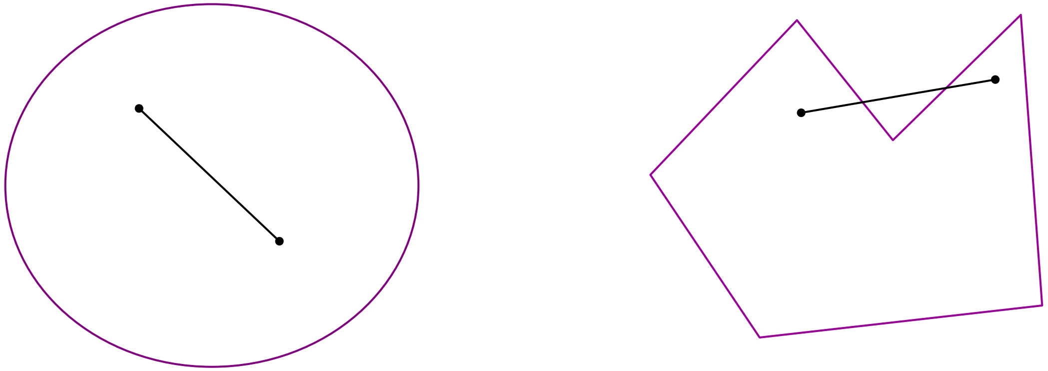
Матрица **H** *положительно полуопределена* **H ≥ 0** *тогда и только тогда, когда* ***<u>все</u>*** *ее угловые миноры* ***<u>неотрицательны.</u>***

Необходимые математические сведения

Множество $X \in R^n$ *называется выпуклым, если оно* ***<u>содержит</u>*** *всякий отрезок, которой целиком принадлежит* X .

$$\forall \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in X \qquad\qquad 0 \le \lambda \le 1$$

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\,\mathbf{x}^{(2)} \in X$$



Примеры выпуклого и невыпуклого множеств

Необходимые математические сведения

Свойства выпуклых функций

Дважды дифференцируемая на интервале [a, b] функция $f(\mathbf{x})$ *выпукла, если на этом интервале ее вторая производная неотрицательная:*

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$$

Выпуклость функции $f(\mathbf{x})$ *можно определить также по матрице Гессе:*

- *если* $\mathbf{H} \geq 0$, *то* $f(\mathbf{x})$ *- выпуклая функция;*
- *если* $\mathbf{H} > 0$ *, то* $f(\mathbf{x})$ *- строго выпуклая функция.*

Если $f(\mathbf{x})$ *выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на X.*

Условия экстремальности

Необходимые условия экстремума 1-го порядка

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = 1,\ldots,n$$

$\mathbf{x}^*$- стационарные точки.

Необходимые условия экстремума 2-го порядка

Вычисляем собственные числа матрицы Гессе $\det(\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) - \lambda\mathbf{E}) = 0$

$\lambda_i > 0$ локальный минимум

$\lambda_i < 0$ локальный максимум

$\lambda_i \le 0$ возможен локальный максимум

$\lambda_i \ge 0$ возможен локальный минимум

Если собственные числа разных знаков, экстремума нет!

Условия экстремальности

Достаточные условия экстремума

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \text{и} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) > 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) < 0 \end{cases}$$

Через угловые миноры матрицы Гессе:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$$

Локальный минимум

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$$

Локальный максимум

Условия экстремальности

Алгоритм решения задачи безусловной оптимизации

Вычисляем x_i^* аналитически или численно

Ответ: x_i^* и $f(x_i^*)$.

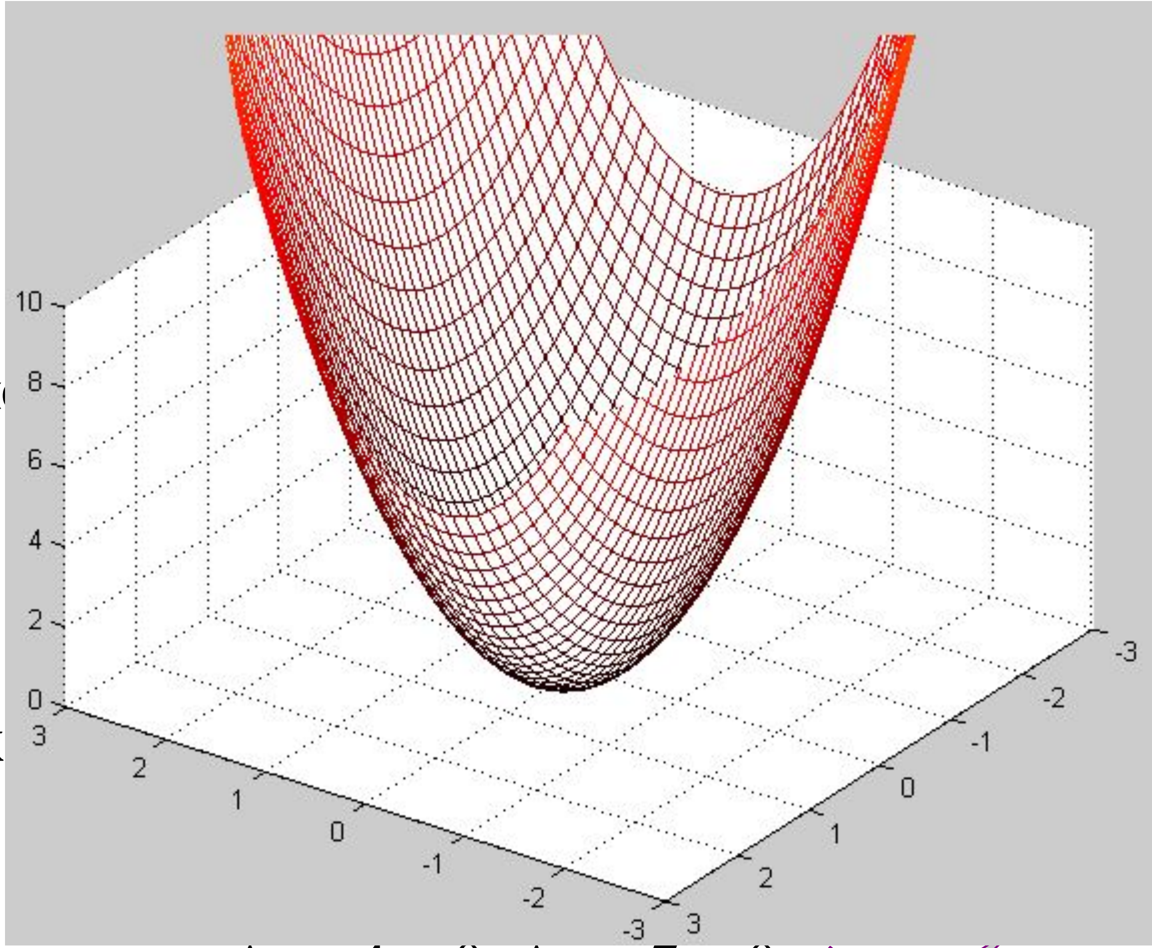
Исследование ε-окрестности x_i^*

Пример 1.

Необх

ая точка
глобального
имума, т.к.
ция выпуклая

H(x



$$\Delta_1 = 4 > 0,\ \Delta_2 = 7 > 0$$

Достаточные условия выполняются.

Пример 2.

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 8x_1x_2 - 10x_1 + 2x_2 = 0.$$

$$\mathbf{x}^* = (0,0)$$

стационарные точки

```
> restart:
  with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> f:=2*x[1]^3+4*x[1]*x[2]^2-10*x[1]*x[2]+x[2]^2;
```

$$f := 2\,x_1{}^3 + 4\,x_1\,x_2{}^2 - 10\,x_1\,x_2 + x_2{}^2$$

Стационарные точки

```
> sys1:={diff(f,x[1])=0,diff(f,x[2])=0};
```

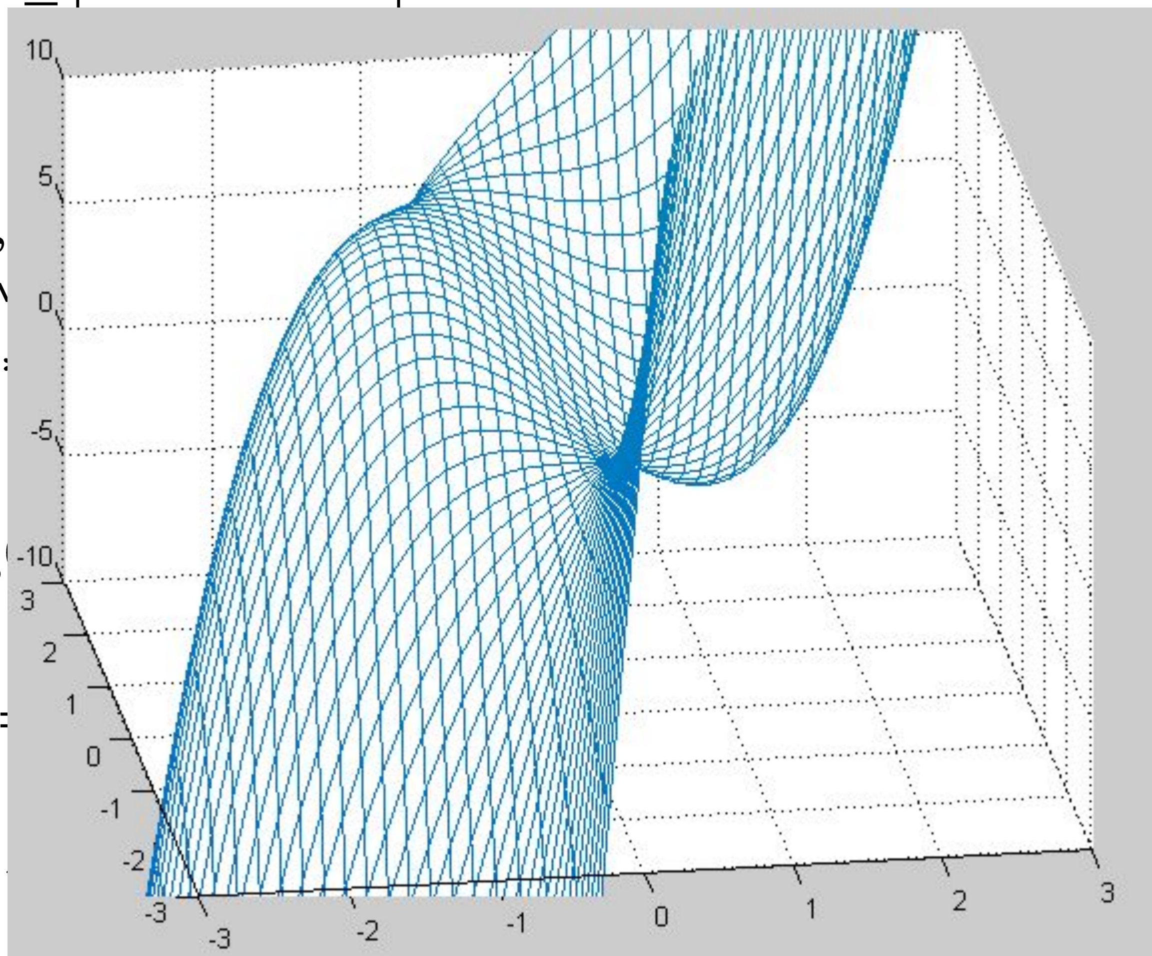
$$sys1 := \{6\,x_1{}^2 + 4\,x_2{}^2 - 10\,x_2 = 0,\ 8\,x_1\,x_2 - 10\,x_1 + 2\,x_2 = 0\}$$

```
> solve(sys1,{x[1],x[2]});
```

$$\{x_2 = 0, x_1 = 0\}, \{x_2 = 1, x_1 = 1\}, \{x_2 = \frac{1}{4}\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2 - 32\,\_Z + 125, label = \_L2), x_1 = \frac{1}{6}\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2 - 32\,\_Z + 125, label = \_L2) - \frac{25}{12}\}$$

$$\mathbf{H(x)} = \begin{pmatrix} 12x_1 & 8x_2 - 10 \\ 8x_2 - 10 & 8x_1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ \end{pmatrix}$$



$\Delta_1 = 0,$ ... ся.

Проверяем ... $= 1 - \sqrt{101}$

$\det(\mathbf{H}(\mathbf{x}$ ... $= 1 + \sqrt{101}$

$\mathbf{x}^* = (0,$ ... знака

$\mathbf{H}_{(1,1)} =$

$\Delta_1 = 1$

$\mathbf{x}^* = (1,1)$ - точка локального минимума

Пример 3.

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 \qquad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2x_1 = 0, \qquad \mathbf{x}^* = (0,0)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0.$$

Необходимые условия 1-го порядка выполняются.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 0$ - достаточные условия не выполняются.

$$\det(\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) - \lambda \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow -\lambda(2-\lambda) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \end{matrix}$$

$\mathbf{x}^* = (0,0)$ - возможно, локальный минимум. Необходимо доп. исследование.

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 \qquad\qquad \mathbf{x}^* = (0,0)$$

По определению, если локальный минимум, то

$$f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x}),\ \ \forall \mathbf{x} : (\mathbf{x} \in \Omega) \cap \left(\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\| < \varepsilon \right)$$

$$0 \le (0+\varepsilon)^2 + (0+\varepsilon)^4,\ \ \forall \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\mathbf{x}^* = (0,0)$ - глобальный минимум

Задания для закрепления материала

1. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$.

Ответ: в точке $x^* = (-\frac{3}{16}, -\frac{1}{8})^T$ - локальный и одновременно глобальный минимум.

4. Найти безусловный экстремум функции

$$f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4.$$

Ответ: в точке $x^* = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})^T$ - локальный минимум; в точке $x^* = (-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})^T$ нет экстремума, так как не выполняются необходимые условия экстремума второго порядка.

6. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$.

Ответ: в точке $x^* = (1,1)^T$ - локальный минимум.

Задания для самостоятельного решения

В качестве д/з – по 0,4 балла за задачу.

1. Найти экстремум функции:

а) $f(\mathbf{x}) = (x-1)^6$

б) $f(\mathbf{x}) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

в) $f(\mathbf{x}) = (1 - x_1)^2 + 10\left(x_2 - x_1^2\right)^2$

г) $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1 x_2 + 2x_3$

д) $f(\mathbf{x}) = -(x_1 - x_3)^2 - 4x_2^2 + x_3^2$