# ТРИ ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

## (ЧАСТЬ 1)

*Л. А. Янкина, канд. пед. наук,*

*доцент кафедры методики начального образования*

- Понятие натурального числа и нуля

- Отношения «равно», «меньше», «больше»

- Арифметические операции над числами

- Законы арифметических операций над числами

# Определение целого неотрицательного числа

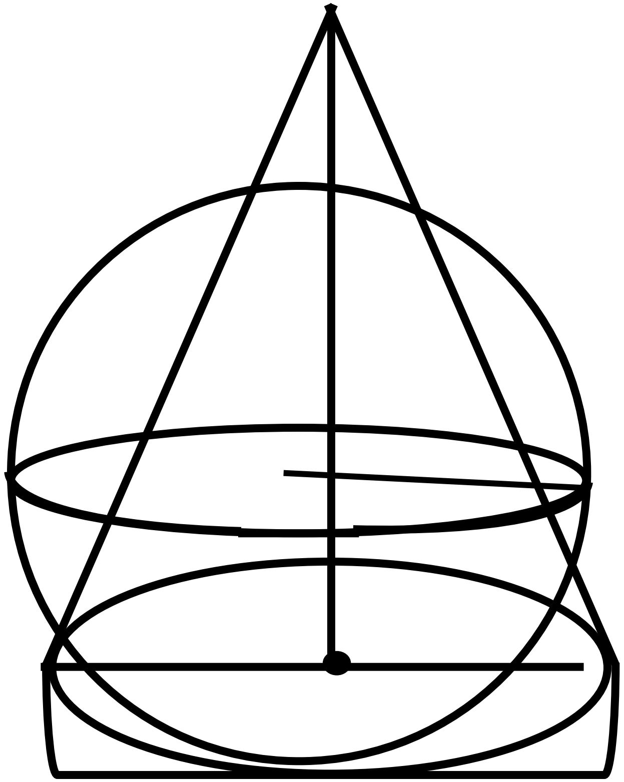
# Аксиоматический подход

## Аксиоматический метод в математике

**Математические понятия, как правило, проходят длительный путь исторического развития.**

**Первоначально они возникают в процессе решения практических задач.**

При этом понятия не имеют еще строгих определений. Даются расплывчатые приблизительные пояснения, указания на наглядные представления.



**Следующий этап в развитии математических понятий наступает, когда место наглядных рассмотрений занимают рассуждения, отличающиеся, однако, отсутствием строгой логичности.**

**Возникает необходимость в уточнении понятий, установлении связей между ними, в сведении сложных понятий к более простым.**

**При аксиоматическом построении какой-нибудь теории поступают так:**

**Выбирают некоторые объекты, изучаемые теорией, и некоторые отношения между ними. Эти объекты и отношения не определяются, а принимаются за исходные и называются основными (неопределяемыми) понятиями рассматриваемой теории. Каждое понятие, которое не содержится в списке основных, должно быть определено.**

**Вслед за основными понятиями и отношениями формулируются *основные предложения*, их называют аксиомами, которые в данной теории принимаются без доказательства, и на их основе доказываются другие предложения данной теории – теоремы. В аксиомах дается описание отношений между основными понятиями, они представляют по существу неявные определения основных понятий. Каждое предложение рассматриваемой теории, которого нет в списке аксиом, должно быть доказано на основе аксиом и ранее доказанных теорем.**

**Система аксиом должна быть:**

а) **непротиворечивой**, т.е. мы должны быть уверены, что делая всевозможные выводы из данной системы аксиом никогда не придем к противоречию;

б) **независимой**, т.е. никакая аксиома не должна быть следствием остальных аксиом этой системы.

**Первым опытом аксиоматического построения теории можно считать изложение геометрии Евклидом в его «Началах».**

# Аксиоматическое определение натурального числа

**Как и все математические понятия, натуральные числа возникли из потребностей практики.**

**Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Многие трудности в решении этих проблем были преодолены с созданием в Древней Индии десятичной системы записи чисел и понятия нуля.**

**Наука, которая изучает числа и действия над ними, получила название «арифметика» - от греческого arithmos - «число».**

**Во второй половине 19 века натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки, от состояния которого зависела и прочность всего здания математики. Внимание ученых было обращено на построение и логическое обоснование математических теорий числа.**

Аксиоматическая теория натурального числа была построена Джузеппе Пеано (1858-1932)

В качестве основного (неопределяемого) отношения во множестве N взято отношение «непосредственно следовать за»

Известными также считаются понятия множества и другие теоретико-множественные понятия, а также правила логики

**Элемент, непосредственно следующий за элементом a, обозначается a′**

**Отношение «*непосредственно следовать за*» удовлетворяет следующим аксиомам:**

**A1. Во множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Называют его *единицей***

**A2.** Для каждого элемента $a$ из множества $N$ существует единственный элемент $a'$, непосредственно следующий за $a$

**А3.** Для каждого элемента *a* из множества **N** существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует *a*

**A4**. Если множество **M** есть подмножество множества **N**, и:

а) *единица* содержится в **M**;

б) из того что *а* содержится в **M**, следует, что и *а´* содержится в **M**, то множество **M** совпадает с множеством **N**.

а) $1 \in M$

б) $a \in M \Rightarrow a' \in M$

$\Rightarrow \quad M = N$

**Множество N, для элементов которого установлено отношение «*непосредственно следовать за*», удовлетворяющее аксиомам 1- 4, называется множеством натуральных чисел, а его элементы – натуральными числами.**

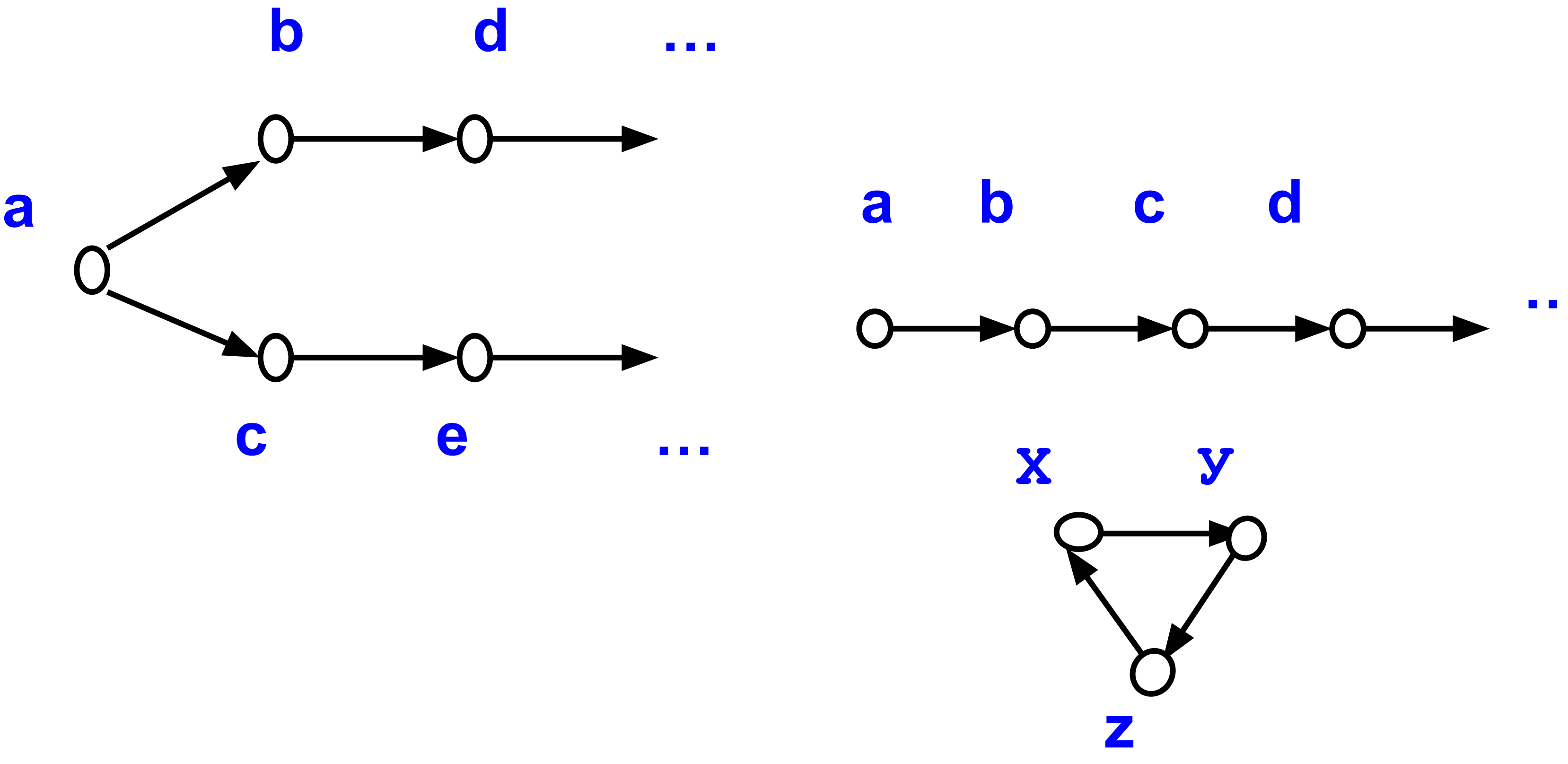
**Выбирая в качестве множества N некоторое конкретное множество, на котором задано конкретное отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, получают различные интерпретации (модели) данной системы аксиом:**

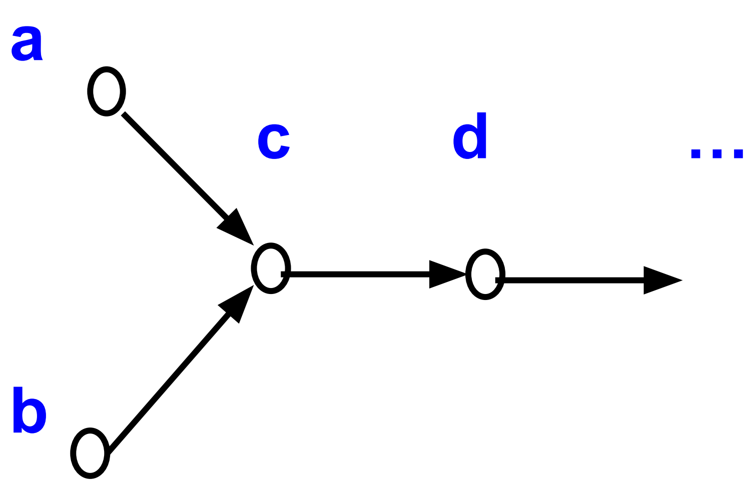
1) **ряд чисел 1, 2, 3, …**

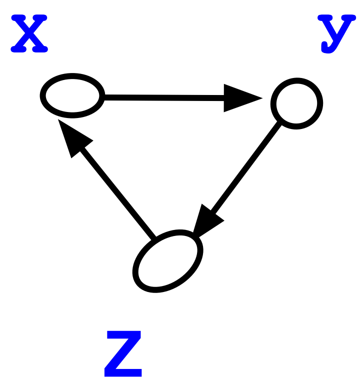
2) **{О О}, {О О О}, {О О О О}, …**

## Пример:

**Является ли множество, изображенное на рисунке, моделью системы аксиом Пеано?**




a
b
c
d
...


x
y
Z

# Отношение «непосредственно предшествовать»

Если натуральное число *b* непосредственно следует за натуральным числом *a*, то число *a* называется **непосредственно предшествующим** (или просто **предшествующим**) числу *b*.

## Свойства отношения «непосредственно предшествовать»

1. Единица не имеет предшествующего натурального числа 2. Каждое натуральное число $a \neq 1$, имеет предшествующее число b, такое, что $b' = a$

# Множество целых неотрицательных чисел

Обозначают $Z_0$ или $N_0$

$$N_0 = N \cup \{0\}$$

0, 1, 2, 3, …

Множество $N_0$ удовлетворяет всем аксиомам Пеано.

**Те свойства отношения «непосредственно следовать за, которые отражены в аксиомах 1 – 4, изучаются в начальных классах и используются при решении задач. Уже в 1 классе при рассмотрении чисел первого десятка выясняется, как может быть получено каждое число. При этом широко используются понятия «следует», «предшествует», прибавление и вычитание 1.**

**Каждое новое число с самого начала выступает как продолжение ранее изученного отрезка натурального ряда чисел.**

**Любое натуральное число может быть получено прибавлением 1 к тому числу, которое встречается при счете перед ним, или вычитанием 1 из числа, которое идет при счете сразу после него.**

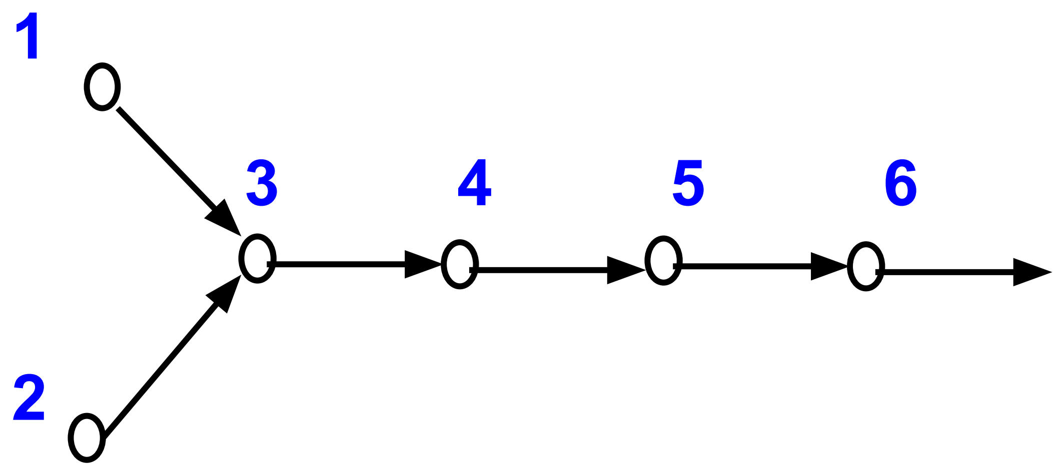
**Любое число на 1 больше предшествующего.**

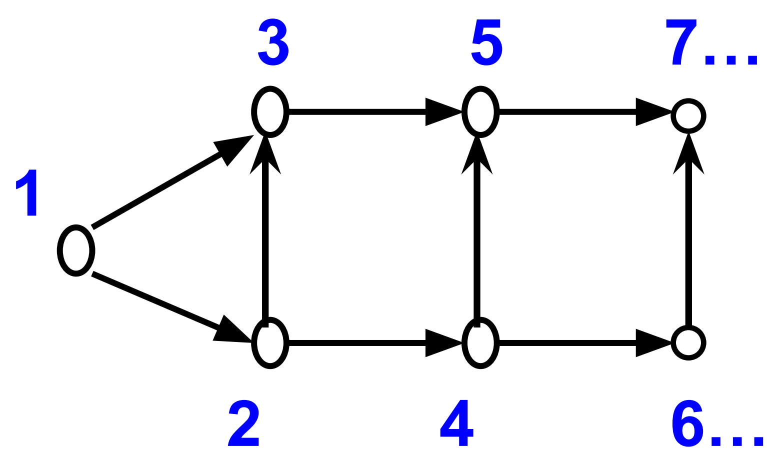
***Таким образом, уже в начальных классах учащиеся убеждаются в том, что за каждым числом идет следующее и притом только одно, что натуральный ряд чисел бесконечен.***

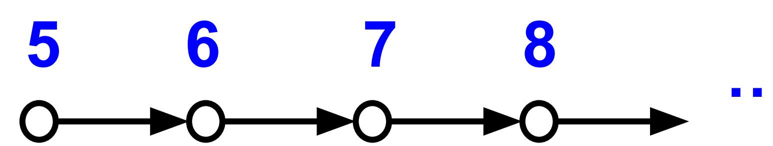
**Упражнения.**

1. **Покажите, что множество целых неотрицательных чисел является моделью системы аксиом Пеано. Какое число выполняет при этом роль единицы?**
   **Можно ли считать моделью системы аксиом Пеано множество 3, 4, 5, 6, …? множество 3, 6, 9, 12, …?**

**2. Установите, какие из множеств, приведенных на рисунке, являются моделями системы аксиом Пеано.**


1
2
3
4
5
6

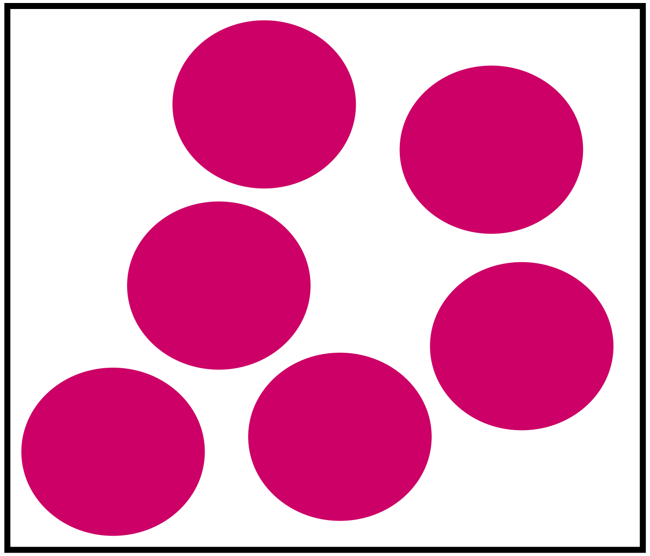

3
5
7…
1
2
4
6…

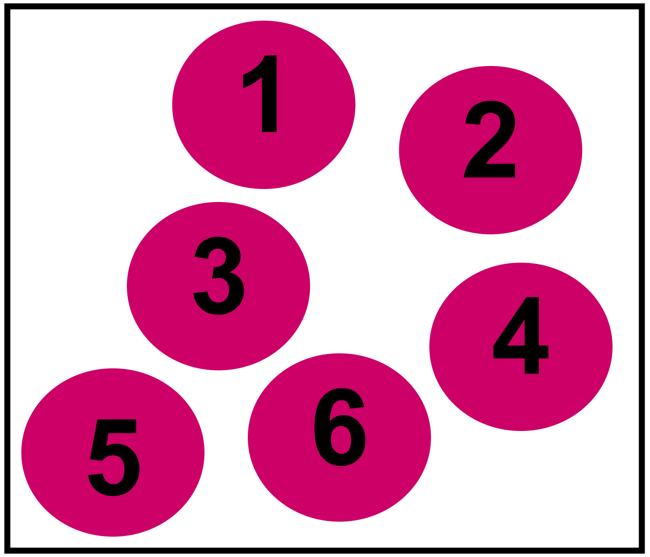

5
6
7
8
…

# Теоретико-множественный подход

<u>Счет</u>

<u>Порядковые и количественные натуральные числа</u>



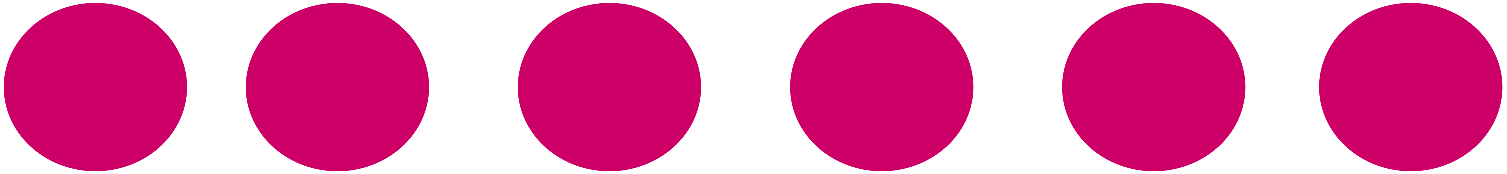

1
2
3
4
5
6

## Требования, соблюдаемые при счете:

- первому отмеченному предмету ставится в соответствие число 1;
- каждый раз отмечается предмет еще не отмеченный ранее, и ему ставится в соответствие число, следующее за последним из уже названных.

Таким образом, каждому из сосчитанных предметов поставлено в соответствие одно число, двум разным предметам соответствуют различные числа.

**Сущность счета** заключается в установлении взаимно однозначного соответствия между множествами, подлежащими счету, и некоторым отрезком натурального ряда. Процесс счета закончится тогда и только тогда, если считаемое множество конечно



1 2 3 4 5 6

**Отрезком $N_a$ натурального ряда** называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа **a**

$$N_a = \{x \mid x \in N \text{ и } x \le a\} \text{ или}$$

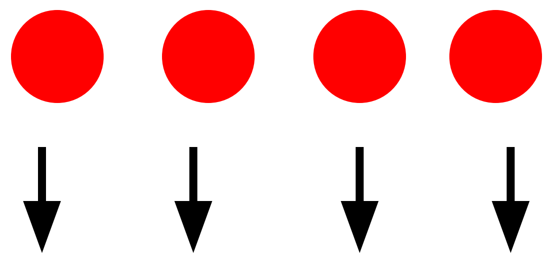
$$N_a = \{1, 2, 3, \ldots, a\}$$

$$N_3 = \{1, 2, 3\}$$

$$N_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Множество A называется конечным, если существует взаимно однозначное отображение этого множества на некоторый отрезок $N_a$ натурального ряда**

A



$$N_4 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

**Множество A конечное, если оно равномощно отрезку натурального ряда $N_a$:**

$$A \sim N_a$$

## Одно и то же множество A не может быть взаимно однозначно отображено на два различных отрезка натурального ряда

**Множество A равномощно только одному отрезку натурального ряда $N_a$, и поэтому множеству A может быть поставлено в соответствие единственное число *a*. Это число a называют числом элементов в множестве A и пишут: n(A) = a – *количественное натуральное число***

Пример: Множество $A = \{a, b, c\}$ можно взаимно однозначно отобразить на отрезок натурального ряда $N_3$. Поэтому $n(A) = 3$

Взаимно однозначное отображение множества $A$ на отрезок $N_a$ можно понимать как **нумерацию** элементов множества $A$. Этот процесс нумерации называют **счетом**.

# Существует много нумераций одного и того же множества:

| | | |
|---|---|---|
| $a \rightarrow 1$ | $b \rightarrow 1$ | $c \rightarrow 1$ |
| $b \rightarrow 2$ | $a \rightarrow 2$ | $b \rightarrow 2$ |
| $c \rightarrow 3$ | $c \rightarrow 3$ | $a \rightarrow 3$ |
| | | |
| $c \rightarrow 1$ | $a \rightarrow 1$ | $b \rightarrow 1$ |
| $a \rightarrow 2$ | $c \rightarrow 2$ | $c \rightarrow 2$ |
| $b \rightarrow 3$ | $b \rightarrow 3$ | $a \rightarrow 3$ |

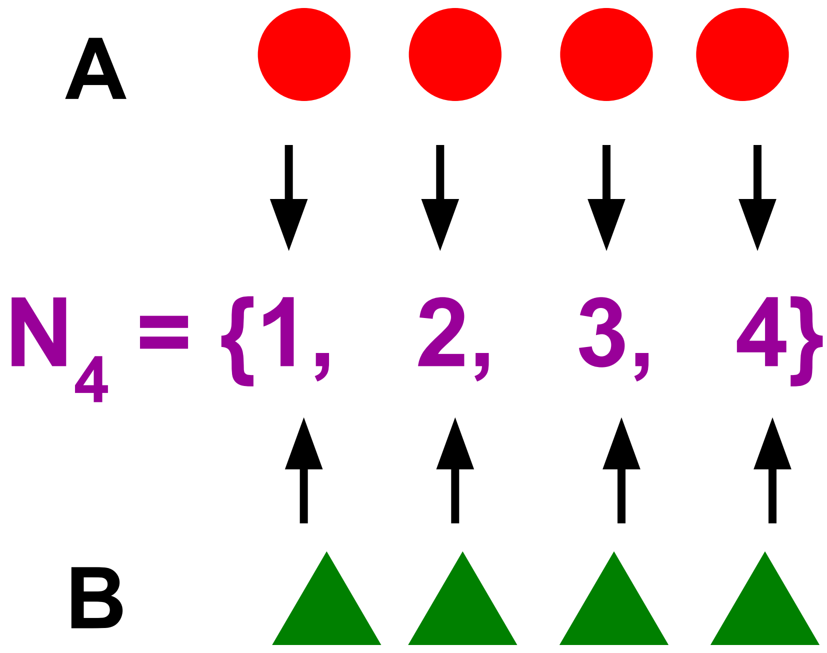
**При пересчете элементы конечного множества расставляются в определенном порядке, а также устанавливается, сколько элементов содержит множество. В первом случае натуральное число представляет собой порядковый номер некоторого элемента и называется числом *порядковым* (*первый, второй, третий и т.д*.). Во втором случае мы имеем дело с числом количественным (*один, два, три и т. д*.)**

## Определение

**С теоретико-множественных позиций натуральное число рассматривается как число элементов конечного множества**

$$n(\varnothing) = 0$$

# Рассмотрим множества А и В




$n(A) = 4$

$n(B) = 4$

## Следующие предложения равносильны:

- Множествам A и B соответствует одно и то же число a
- Множества A и B равномощны (A ~ B)
- Множества A и B содержат поровну элементов
- Множества A и B можно взаимно однозначно отобразить на один и тот же отрезок натурального ряда $N_a$
- Множества A и B можно взаимно однозначно отобразить друг на друга

**Так как одному и тому же конечному множеству может соответствовать лишь одно натуральное число а, то вся совокупность конечных множеств распадается на *классы равномощных множеств*.**

**Каждое множество данного класса содержит по а элементов.**

**$N_a$ принадлежит данному классу**

**Количественное натуральное число рассматривается как <u>общее свойство класса конечных равномощных множеств</u>**

## Упражнения

1) Запишите все элементы множества: $N_7$, $N_{11}$, $N_{14}$.

2) Какие из указанных ниже множеств являются отрезками натурального ряда: а) {1, 2, 3, 4, 5}, б) {0, 1, 2, 3}, в) {3, 4, 5, 6, 7}, г) {4, 2, 1, 5, 3}?

3) Какими порядковыми числами задаются элементы множества: а) A = {a, b, c, d, e, f}, б) элементы множества букв слова «количество»?

4) Каков теоретико-множественный смысл натурального числа 7?

**5) Приведите примеры класса множеств, соответствующих натуральному числу:**
**а) 5, б) 10, в)12.**

**6) При знакомстве с числом «2» учитель использовал различные картинки с изображением двух предметов. Можно ли так поступать при изучении других чисел? Ответ обоснуйте.**

**7) Прочитайте записи: $n(A) = 5$, $n(B) = 0$. Приведите примеры множеств A и B, удовлетворяющих этим условиям.**

**8) Придумайте множества B и C, для которых выполняются условия:**
**а) $n(B) = n(C)$, $B \neq C$, б) $n(B) = n(C)$, $B = C$.**

**9)** **Докажите, что множество А – конечное, если:**

**а)** **А – множество букв в слове «параллелограмм»;**

**б)** **А – множество учащихся в классе;**

**в)** **А – множество букв в учебнике математики.**

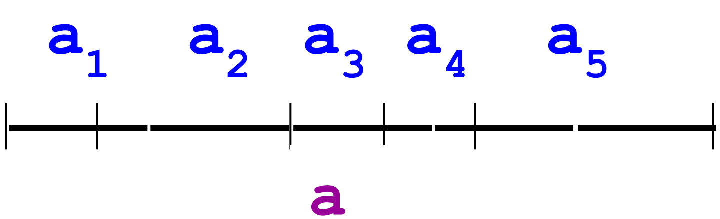
# Натуральное число как результат измерения величин

**Натуральные числа используют не только для пересчета элементов конечных множеств, но и для измерения величин: длин отрезков, площадей фигур, масс тел и др.**

**<u>Рассмотрим натуральное число как результат измерения длины отрезка</u>**

Считают, что отрезок *a* разбит на отрезки (состоит из отрезков) $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, если он является их объединением и никакие два из отрезков не имеют общей внутренней точки, хотя и могут иметь общие концы. В этом случае отрезок *a* называют суммой отрезков $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ и пишут:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

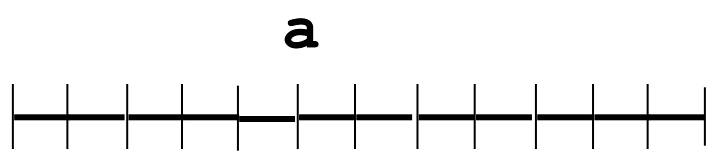


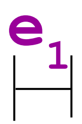

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

**Выберем из множества отрезков некоторый отрезок *e* и назовем его *единичным отрезком* или *единицей длины***

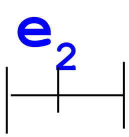
**Если отрезок *а* можно разбить на *n* отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку е, то число *n* назовем мерой или значением длины отрезка а при единице длины е и будем писать: $n = m_e(a)$ или $a=ne$.**

**Говорят также, что отрезок а кратен отрезку е**

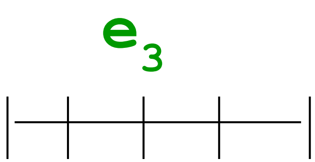



$$m_{e1}(a) = 12 \text{ или } a = 12\ e_1$$




$$m_{e2}(a) = 6 \text{ или } a = 6\ e_2$$




$$m_{e3}(a) = 3 \text{ или } a = 3\ e_3$$

**При переходе к другой единице длины мера отрезка меняется, хотя сам отрезок остается неизменным**

**Натуральное число как мера отрезка** а показывает, из скольких выбранных единичных отрезков е состоит отрезок а

**При выбранной единице длины е для отрезка а это число единственное**

# Три подхода к понятию числа

| Аксиоматический | Теоретико-множественный | Число – мера величины |
|---|---|---|
| **Натуральное число** – это элемент множества **N**, на котором задано отношение «**непосредственно следовать за**», удовлетворяющее 4-м **аксиомам Пеано** | **Натуральное число** – **количество элементов** конечного множества | **Натуральное число** – **количество единичных отрезков**, укладывающихся в измеряемом отрезке |

# Спасибо за внимание !