Высшая математика

Глава I. Элементы линейной алгебры

ЛЕКЦИЯ 1

Матрицы и определители

Литература

- **Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2009.**
- В. С. Шипачев. Высшая математика. Базовый курс : учеб. пособие для вузов. М.: Юрайт, 2011.
- **Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. — М.: Айрис-пресс, 2009.**

- Большой объем новой информации : 1, 2, 3, 4 семестры + специальные курсы.
- Отчётность: в зависимости от семестра: ДЗ, ТР, КР, СР, зачет, экзамен.
- Задавайте вопросы по ходу лекций и на ПЗ.
- Подготовка к ПЗ, зачетам и экзаменам.
- Работа с учебниками.
- Консультации в семестре.
- Консультации в сессию.
- Ответы на практических занятиях.
- Тесты в «Прометее».
- Элементарная математика.
- Участие в олимпиадах.

- В наши дни применительно к образованию выдвигается на первый план задача – **научить умению учиться**.
- Учеба – серьёзный труд.
- Школа, вуз – специально отведенное для этого время.
- Успевать надо все – спорт, театр, книги, …
- Дальше специального времени не будет, хотя учиться придется всю жизнь.

Термины

- Студент (studiosus) в переводе с латыни – старательный, усердный, устремленный, прилежный.
- Термин «Математика» происходит от греческого слова «mathein» [матейн] – учиться, познавать.
- «Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира». Ф. Энгельс, «Диалектика природы», 1877 г.
- Университет (universitas) – в переводе с латинского – свернутые воедино, совокупность людей, объединенных общей целью (учиться).
- Инженер – даровитый, талантливый. В первоначальном понятии это относилось к человеку, который постоянно что-то придумывал, изобретал. К настоящему времени… трансформировалось… в специалиста в какой-то области техники с высшим образованием.

- Математика – существеннейшая составная часть человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.
- «Царица наук» – так нередко именуют ее, стоящую в особом ряду среди всех прочих достижений человечества.

- Человек, получивший глубокое фундаментальное образование, способен комплексно, системно оценить последствия тех или иных управленческих решений и обеспечить для условия устойчивого развития общества.
- Кроме того, фундаментальное образование – основа для последующего обучения на протяжении всей жизни, что имеет чрезвычайно большое значение в современном обществе, в условиях быстрой смены технологий.
- Чтобы человечество развивалось, причем развивалось плодотворно, нужны не только лучшие умы, но и свежие идеи. А для этого необходимы креативные люди с необычным мышлением, широким кругозором, гибким умом.
- Чтобы все это было в человеке, нужно чтобы он совершенствовал себя.
- Математика нужна для интеллектуального развития личности, она содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы - логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность.
- Благодаря изучению высшей математики приобретается философский аналитический ум и способность к самостоятельному мышлению

- В рейтинге систем высшего образования, ежегодно составляемого ЮНЕСКО, Россия опустилась за последние 25 лет с 3 на 33 место.
- 1990 г. – 3 место;
- 2001 г. – 19 место;
- 2007 г. – 27 место;
- 2015 г. – 33 место.

- «Учеба – серьёзный труд.
- Без собственных усилий ничего не выйдет. Можно купить какие угодно книги, обучающие программы (английский во сне), можно нанять прекрасных репетиторов, которые всё разжуют и положат в рот. Но глотать нужно самому! Учиться должен сам. Купить можно диплом об образовании, но не само образование.
- Преподаватель - ваш помощник, его задача – разбросать семена знаний, ваша задача – их поймать.
- Дача знаний не самое важное. Запомните – хорошо. После экзамена забудете – ничего – как-то проживёте. Самое важное – подтолкнуть человека, чтобы он начал думать, размышлять (а в каждом из вас это заложено).
- Домашняя подготовка, самостоятельная работа. Иначе на практическом занятии нечего будет делать (без знаний нет творчества).
- Книга! (конспект – не учебник, а канва изложения материала).
- Психологически эффективность самообразования объясняется очень просто – полученные самостоятельно знания и навыки человек ценит куда больше, чем те, которые преподнесли ему на блюдечке.»

КВАНТОРЫ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$]$ – пусть;

$\&$ ($\wedge$) – и;

$\vee$ – или;

$\rceil$ – не;

$\forall$ – для любого, для всех;

: – такой, что;

$\exists$ – существует;

! – единственный;

$\rightarrow$ – стремится;

$\Rightarrow$ – следует, следовательно;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда;

Σ – сумма;

Π – произведение;

$\cup$ – знак объединения;

$\cap$ – знак пересечения;

$\mathbb{R}$ – м-во действит. чисел;

$\mathbb{Z}$ – м-во целых чисел;

$\mathbb{N}$ – м-во натуральных чисел;

Т1 – Теорема 1;

Л1 – Лемма 1;

Д-во: – доказательство;

$\equiv$ – тождественно равно;

$\approx$ – приближенно равно;

$\sim$ – знак эквивалентности;

$\in$ – знак принадлежности;

$\notin$ – знак «не принадлежит»;

$\subset$ – знак включения;

$||$ – знак параллельности;

$\perp$ – знак перпендикулярности.

Л1. $(\ \mathbf{]}\ (x, f(x) \in \mathbb{R})\&(\neg\exists\, x : f(x)<0)) \Rightarrow (\forall x\ \ (f(x)\geq 0))$.

1. Матрицы

1814–1897

Термин «матрица»

ввел английский математик

Джеймс Джозеф Сильвестр.

«Математика – музыка разума».
Джеймс Джозеф Сильвестр

Матрицы

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная числовая таблица, состоящая из m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij} – элементы матрицы, где

i – номер строки

j – номер столбца.

Обозначения:

A, B, C … или $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij})$ ...

Пример
ы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2×2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2

1.1. Виды матриц

1. Прямоугольная матрица

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется **прямоугольной.**

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Матрица-строка и матрица-столбец

Матрица-строка (1×n)	Матрица-столбец (n×1)
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

3. Нулевая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.** Обозначается буквой O.

Нулевая
$O_{m\text{x}n} = \begin{array}{c} \overbrace{}^{n} \\ \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Bigg\} m$

4. Квадратная матрица (m=n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется **квадратной**.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют **матрицей n - го порядка**.

Пример ы

Квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3-го порядка

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2-го порядка

5. Диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \quad (1.3)$$

Элементы квадратной матрицы с одинаковыми индексами от a_{11} к a_{nn}, образуют **главную диагональ.**

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной. (1.3) – диагональная.**

Пример
ы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица 3-го порядка

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица 2-го порядка

6. Единичная матрица

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице,

называется **единичной.**

Обозначается буквой E или I.

$$E_2 = diag(1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n = diag\overbrace{(1,\ 1,\ \ldots,1)}^{n}$$

$$E_3 = diag(1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Треугольная матрица

Квадратная матрица называется **треугольной,** если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Примеры

верхнетреугольная

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

нижнетреугольная

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

8. Транспонированная матрица

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается A^{T}.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$$

9. Симметрическая матрица

- Если $A^{\mathrm{T}} = A$ то матрица A называется **симметрической**.

Пример

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = C$$

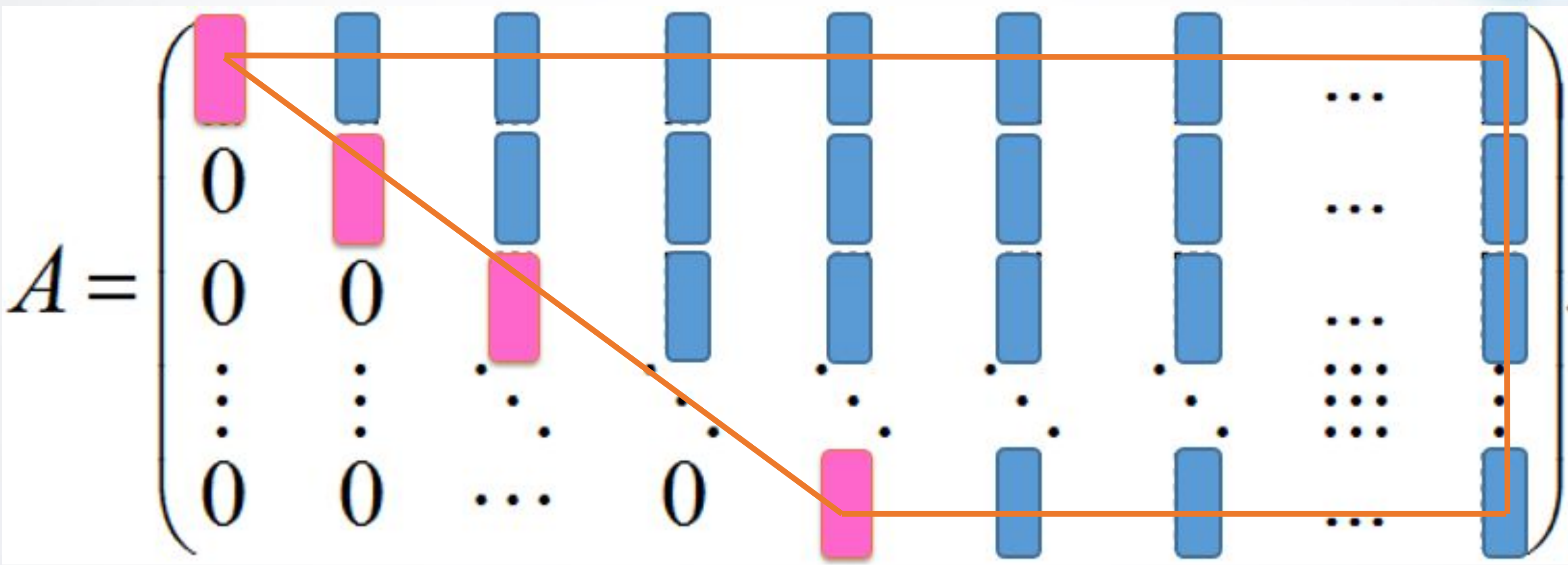
10. Кососимметрическая матрица

$$K^T = -K$$

Пример

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ



- $a_{ii} \neq 0.$ - a_{ij} - любое, $j>i$.

12. Равные матрицы

Две матрицы

$$A = (a_{ij}) \text{ и}$$

$$B = (b_{ij})$$

называются **равными**, если

1) Размеры матриц совпадают

2) Соответствующие элементы матриц равны:

$$a_{ij} = b_{ij},$$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

1.2. Операции над матрицами

Сумма матриц

Сложение и вычитание матриц возможно, если эти матрицы имеют **<u>одинаковый размер</u>**.

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ **и** $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,,\quad (\,i=\overline{1,m}\,;\,j=\overline{1,n}\,)}$$

Сумма матриц

Пример

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4 & 3-5 \\ -1+2 & 0+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример

Найти разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 3-2 \\ -1-3 & 0+1 \\ 1-2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ и числа λ называется матрица того же размера, элементы которой равны λa_{ij}.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Свойства суммы матриц и умножения матрицы на число

Пусть A, B, C, O — матрицы одного размера, а α, β, λ - числа.

1. Коммутативность суммы матриц

$$A + B = B + A$$

2. Ассоциативность сложения матриц

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3. Дистрибутивность

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$\alpha - \text{число}.$$

$\alpha\,\beta\,A = \alpha\left(\beta A\right) = \beta\left(\alpha A\right)$, ***α, β - числа.***

4.

$$A + O = A$$

O – нулевая матрица, того же размера, что и А.

Произведение матриц

Умножение матриц выполнимо, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Умножение строки на столбец

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Пример

$$A=(3\ ,-1\ ,4), B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB = 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 4\cdot 3 = 15.$$

Умножение матрицы на столбец

Каждая строка матрицы скалярно умножается на столбец

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 8 + (-1)\cdot 7 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 8 + 2\cdot 7 + 0\cdot 2 \\ (-5)\cdot 8 + 6\cdot 7 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Произведением матриц $A=(a_{ij})$ (размера $m \times p$)

и $B=(b_{ij})$ (размера $p \times n$) называется матрица $C=(c_{ij})$ (размера $m \times n$), элементы c_{ij} которой вычисляются как скалярное произведение i – й строки матрицы A и j – го столбца матрицы B.

Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ a_{i1} & a_{i2} & \boxtimes & a_{ip} \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & b_{1j} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & b_{2j} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & b_{pj} & \boxtimes \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & c_{ij} & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \end{pmatrix}.$$

Пример

Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 6\cdot 0 & 2\cdot 2 + 6\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 6\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 18 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

Вообще говоря, если произведения AB и BA существуют, то AB

≠ BA.

Если зываются **перест**

Приме р.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

УМНОЖЕНИЕ СТОЛБЦА НА СТРОКУ

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 & (-4) \cdot (-5) & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

При условии, что операции в обеих частях равенств выполнимы, справедливы следующие свойства.

Свойства произведения матриц

1. $A \cdot O = O$;
2. $A \cdot E = A$;
3. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$;
5. $ABC = (AB) \cdot C = A \cdot (BC)$;
6. $A (B + C) = AB + AC$;
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

2. Определители

Вильгельм Готфрид Лейбниц

(1646-1716) — саксонский
философ(1646-1716) —
саксонский
философ, логик(1646-1716
) — саксонский
философ, логик, математ
ик,
механикмеханик, физикм
еханик, физик, юрист,
историкисторик, диплома
тисторик, дипломат,
изобретательисторик, ди
пломат, изобретатель и

Понятие «определитель» принадлежит Г. Лейбницу (1678).

Определитель (детерминант) – числовая характеристика **квадратной** матрицы.

Обозначения определителя матрицы А:

|A|, det A, Δ.

Невырожденная матрица

- Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель

$$\det A \neq 0.$$

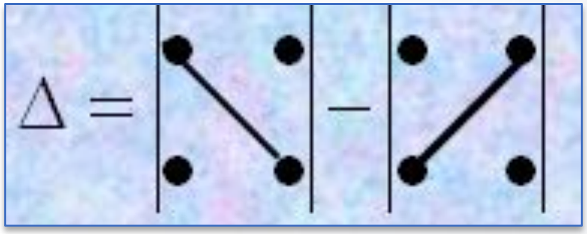
- В противном случае ($\det A = 0$) матрица A называется ***вырожденной.***

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее **определителем**, следующим образом:

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

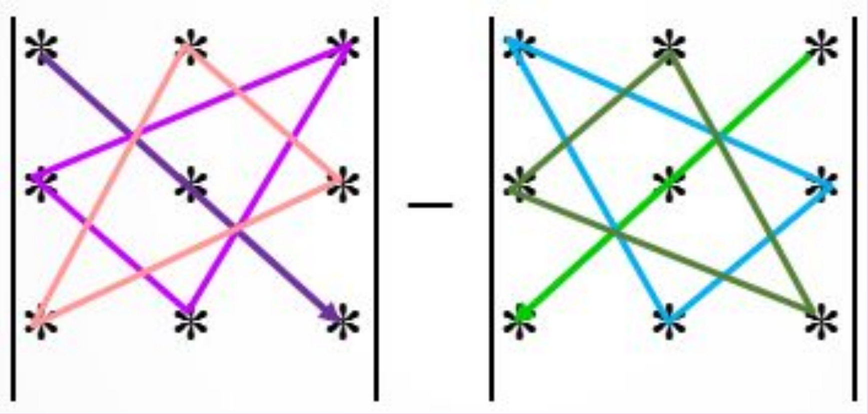
2. n = 2. $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 7.$$



3. n = 3.

Для вычислении определителя 3-го порядка используют ***правило треугольников*** (Саррюса).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Δ=5•1•(-3) +

+(-2)•(-4)•6 +

+ 3•0•1-

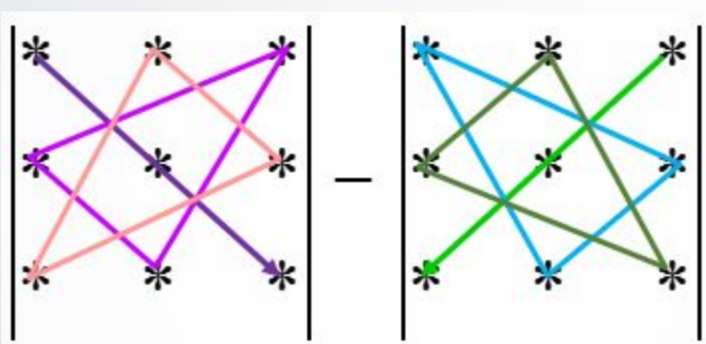
–6•1•1–

–3•(-2)•(-3) –

– 0•(-4)•5 =

–15+48–6–18=

=48–39=9.



Пример. Вычислить определитель с помощью правила диагоналей

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right.$$

\-   \-   \- + + +

Δ=5•1•(-3) +

+(-2)•(-4)•6 +

\+ 3•0•1-

–(6•1•1+

\+ 0•(-4)•5+

+3•(-2)•(-3)) =

–15+48–(6+18)=

=33–24=9.

Определитель произвольной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Минор элемента $a_{i\,j}$

- **Минором** некоторого элемента a_{ij} квадратной матрицы *A* *n*-го порядка называется определитель *n* –1-го порядка матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания из А строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij} , минор обозначается M_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}23 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

a_{23}=4 $\qquad$ M_{31}=5 $\qquad$ M_{14}=11

Алгебраическое дополнение A_{ik}

- **Алгебраическим дополнением элемента a_{ik}** квадратной матрицы A называется число A_{ik} :
- $$\boxed{A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \cdot}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad M23 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

$a_{23}=4$ $\qquad$ $M_{31}=5$ $\qquad$ $M_{14}=11$

Для предыдущего примера:

$A_{23} = -M_{23} = -13$ $\qquad$ $A_{31} = M_{31} = 5$ $\qquad$ $A_{14} = -M_{14} = -11$

ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любого ее ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Разложение определителя по элементам первой строки:

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.}$$

Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

ПРАВИЛО ЧУЖИХ ДОПОЛНЕНИЙ

- Сумма произведений элементов любого ряда кв. матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ее параллельного ряда равна нулю.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Транспонирование матрицы не меняет значения ее определителя.

$$\det A^T = \det A$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов равны или пропорциональны, то определитель равен 0.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.
5. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.
6. Определитель матрицы, содержащей целый ряд из нулей, равен нулю.

$\det E = 1$

7. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
8.

9. Если элементы какой-либо ряда квадратной матрицы А состоят из двух слагаемых, то определитель А равен сумме определителей двух матриц, различающихся между собой только элементами этого ряда, бывшими ранее отдельными слагаемыми.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

«А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

М. В. Ломоносов

Спасибо за внимание!