

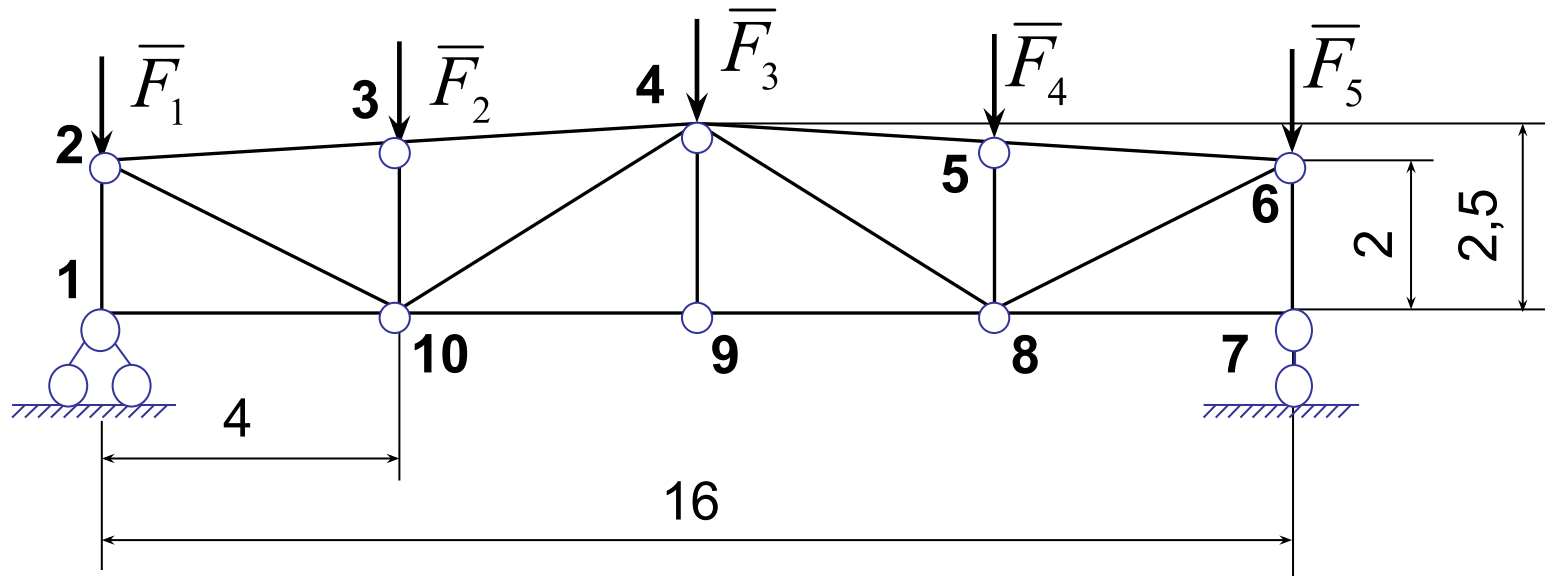
Плоские фермы

- Плоские фермы. Определения
- Модель плоской фермы
- Определение реакций опор плоской фермы
- Определение усилий в стержнях плоской фермы
- Алгоритм метода вырезания узлов
- Алгоритм метода сечений (Риттера)
- Нулевые стержни плоской фермы

Плоские фермы. Определения

- **Плоские фермы** – геометрически неизменяемые стержневые конструкции, стержни которых принадлежат в одной плоскости
- **Узлы фермы** – точки, в которых сходятся оси стержней
- **Верхний и нижний пояс** – стержни, образующие верхний и нижний контуры, соответственно
- **Стойки** – вертикальные стержни.
- **Раскосы** – наклонные стержни.
- **Пролет фермы** – расстояние между опорными узлами
- **Длина панели** – расстояние между стойками

Плоские фермы. Определения



- Шарниры 1,2,...,10 - **узлы фермы**
- Стержни 7-8, 8-9, 9-10, 10-1 - **нижний пояс**
- Стержни 2-3, 3-4, 4-5, 5-6 - **верхний пояс**
- Стержни 1-2, 3-10, 4-9, 5-8, 6-7 - **стойки**
- Стержни 2-10, 4-10, 4-8, 6-8 - **раскосы**
- **Пролет фермы** составляет 16
- **Длина панели** между 1-2 и 3-10 равна 4

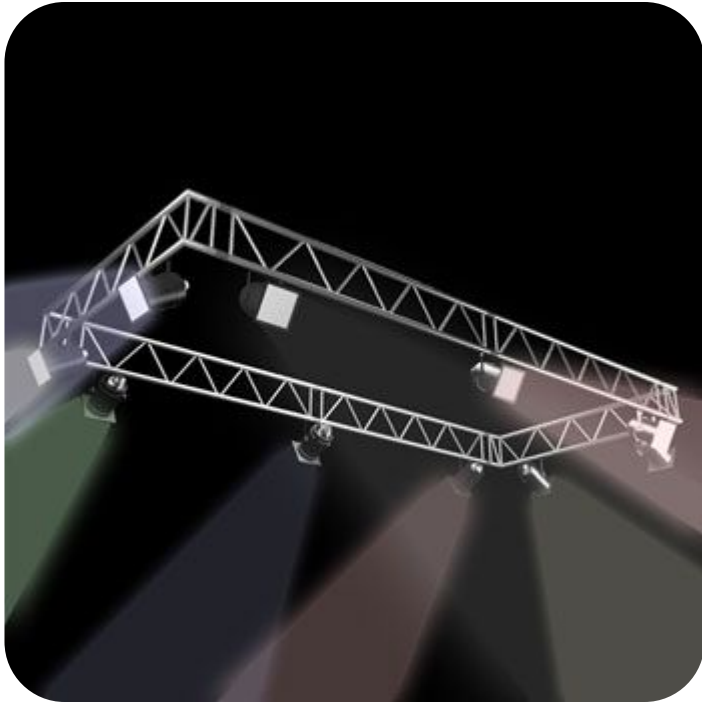


Рисунок 1 – Металлическая конструкция для освещения из плоских ферм



Рисунок 2 – Металлическая плоская ферма сцены



Рисунок 3 – Металлические плоские фермы ангара

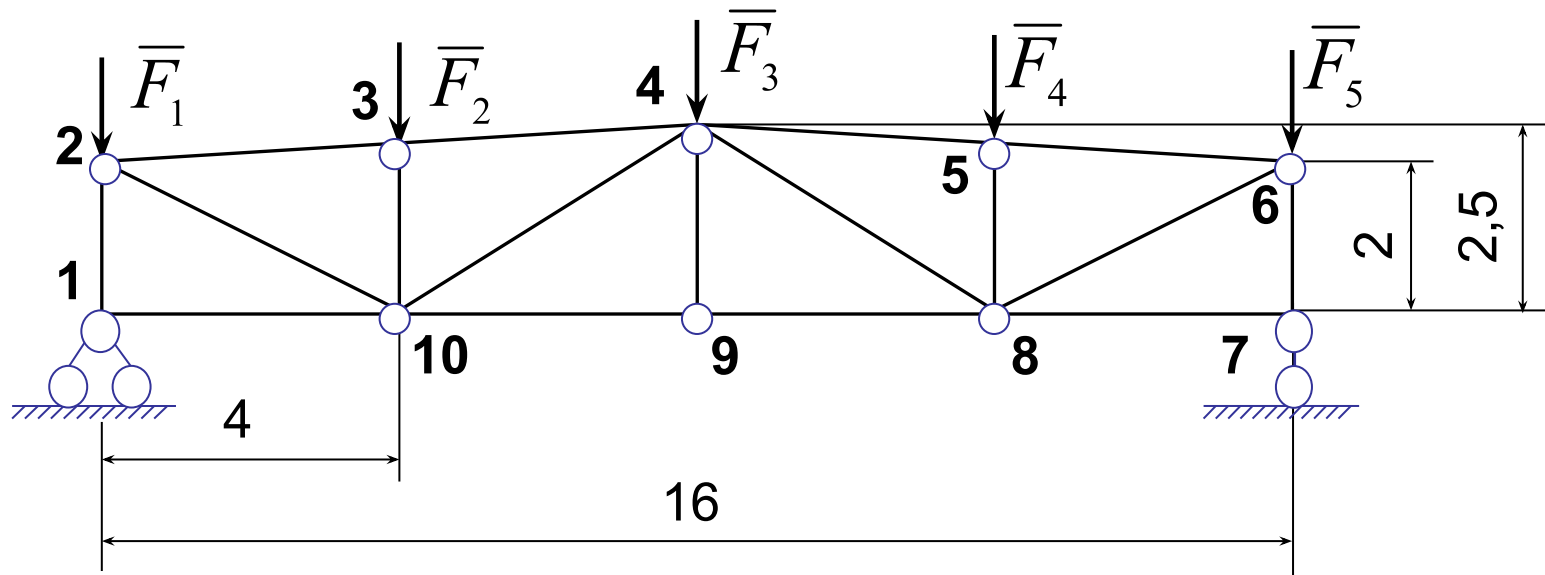
Модель плоской фермы

- **Предполагаем:**
 1. стержни прямолинейные, невесомые
 2. внешние силы приложены только к узлам фермы
 3. узлы – идеальные шарниры
- **Задача расчета фермы** – определение реакций опор (*внешних реакций связей*) и усилий в стержнях (*внутренних реакций связей*) фермы
- **Для статически определимых ферм**
 1. число неизвестных в системе уравнений, описывающей условие равновесия фермы не больше числа независимых уравнений
 2. число стержней N связано с числом узлов n равенством

$$N=2n-3$$

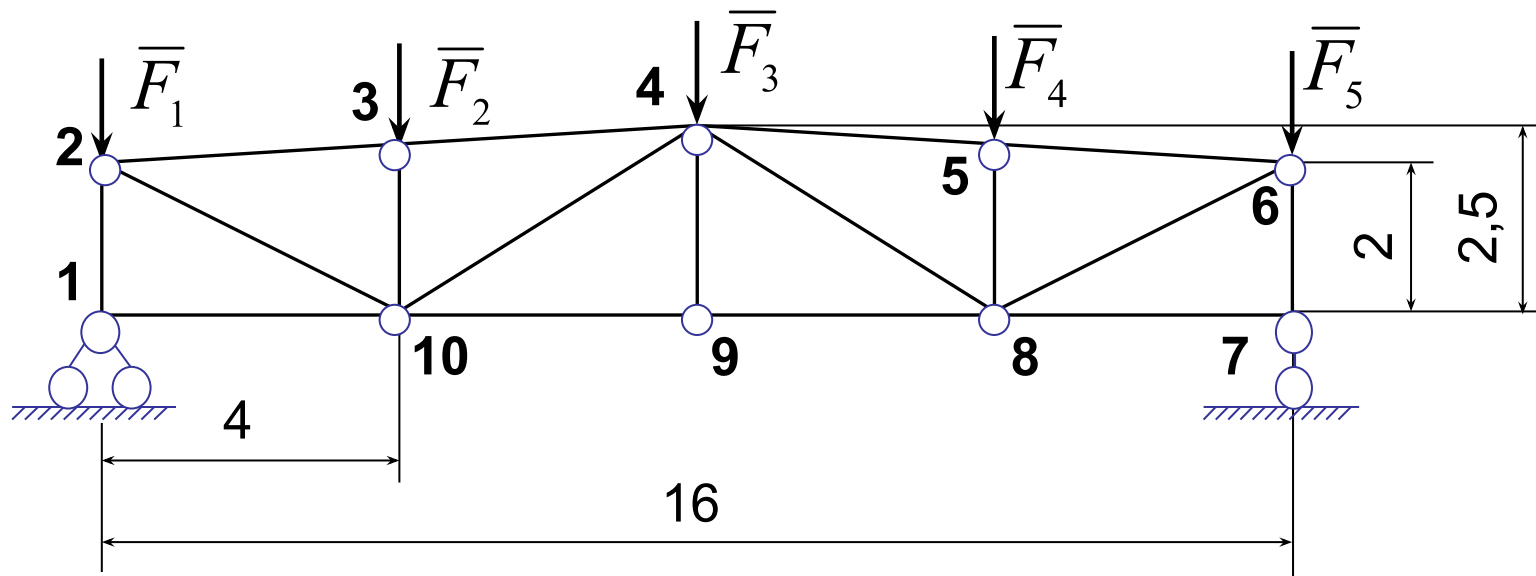
Модель плоской фермы

- **Задание 1.** Является ли ферма статически определимой?



Определение реакций опор плоской фермы

- Задание 2.** Найти реакции опор фермы если $F_1 = F_5 = 5 \text{ кН}$, $F_2 = F_3 = F_4 = 11 \text{ кН}$; линейные размеры фермы приведены в метрах

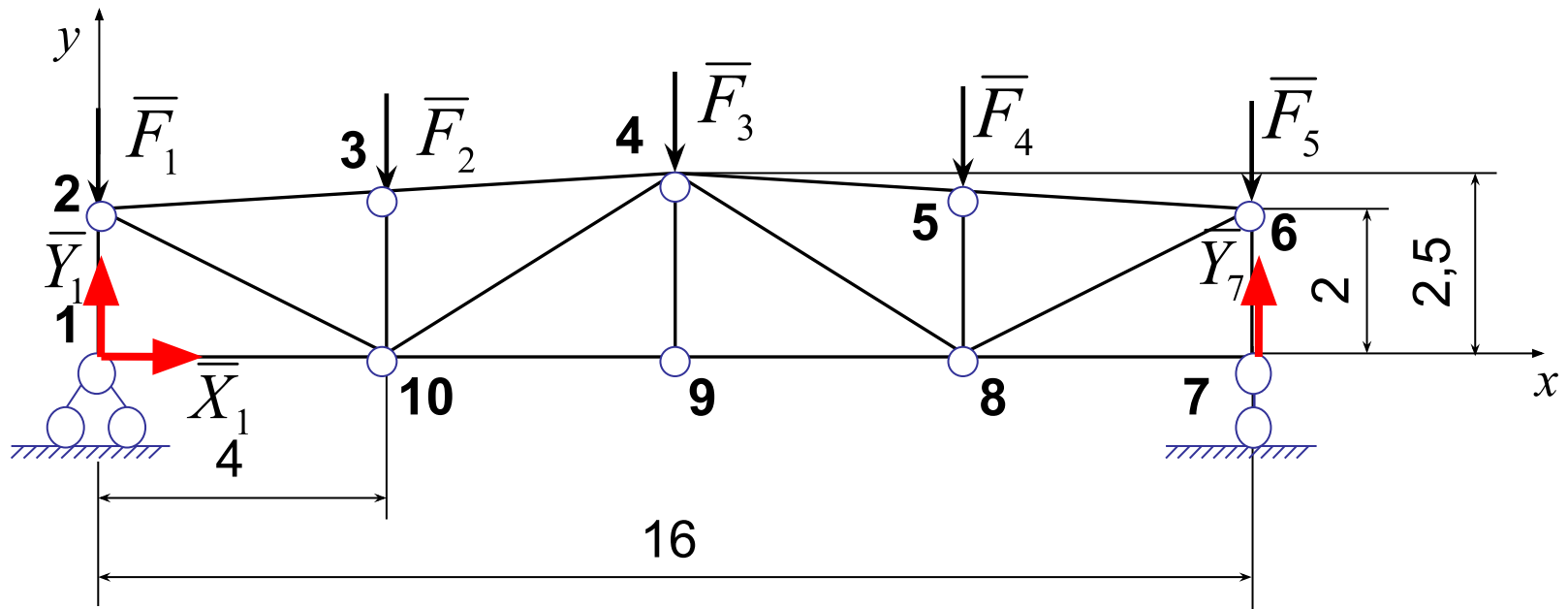


Система внешних сил фермы – плоская произвольная система сил, следовательно условие равновесия системы сил имеет вид:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_{\text{узел1}} = 0 \end{cases}$$

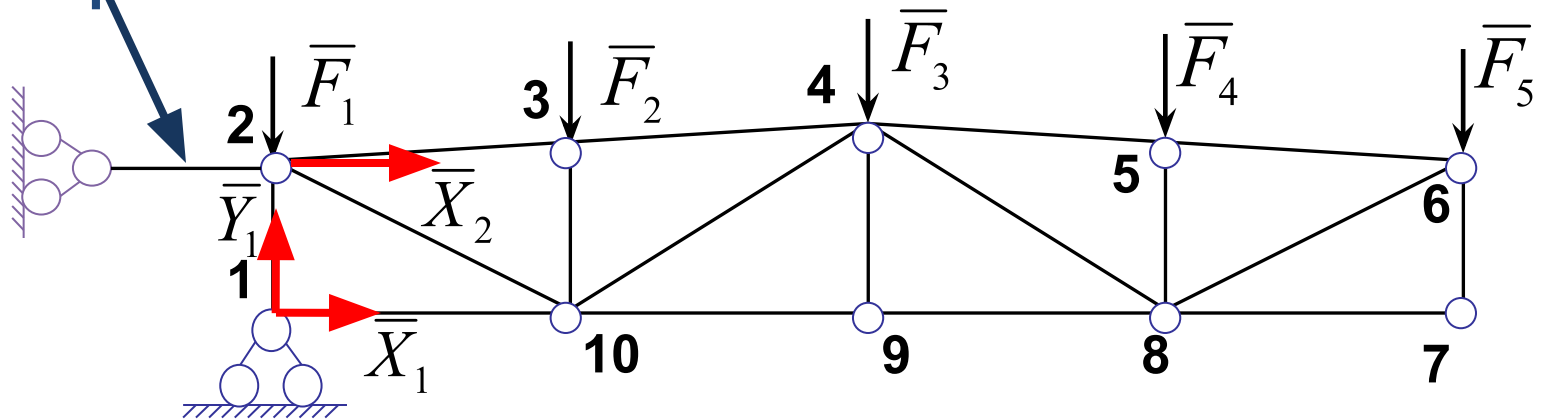
$$\begin{cases} X = 0 \\ -\sum_{i=1}^5 F_i + Y_1 + Y_7 = 0 \\ -F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 8 - F_4 \cdot 12 - F_5 \cdot 16 + Y_7 \cdot 16 = 0 \end{cases}$$

$$X = 0, \quad Y_1 = Y_7 = 21,5 \text{ кН}$$



- **Задание 3.** Показать реакции опор фермы

Опорный стержень



Определение усилий в стержнях плоской фермы

- **Методом вырезания узлов** : последовательно вырезаем узлы фермы так, чтобы рассматриваемый узел являлся статически определимым, то есть в двух уравнениях равновесия плоской сходящейся системы сил для каждого из узлов было не более двух неизвестных усилий.
- **Методом сечений (Риттера)**: проводим сечение фермы по трем стержням с неизвестными усилиями и составляем уравнение равновесия одной части фермы, используя вторую (третью) форму системы линейных уравнений произвольной плоской системы сил
- **!** Опорные реакции фермы должны быть предварительно определены.

Алгоритм метода вырезания узлов

1. Определить опорные реакции фермы: выбрать в качестве объекта равновесия ферму в целом
2. Пронумеровать узлы фермы
3. Найти нулевые стержни (если существуют)
4. Найти узел, в котором сходятся два стержня с неизвестными усилиями
5. Разрезать стержни в окрестности этого узла, направить усилия от узла в предположении, что стержень растянут
6. Выбрать в качестве объекта равновесия этот узел
7. Найти усилия стержней, связанных с этим узлом, из системы линейных уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил
8. Повторить алгоритм с пункта 4

! Если усилие направлено от узла, то оно вызывает растяжение стержня, и положительно. Если усилие направлено к узлу, то вызывает сжатие стержня, и отрицательно.

Алгоритм метода сечений (Риттера)

1. Определить опорные реакции фермы: выбрать в качестве объекта равновесия ферму в целом
2. Пронумеровать узлы фермы
3. Провести сечение фермы по трем стержням с неизвестными усилиями
4. Выбрать в качестве объекта равновесия одну из частей фермы
5. Направить усилия разрезанных стержней от узлов, принадлежащих этой части, в предположении, что стержни растянуты
6. Найти усилия разрезанных стержней из системы линейных уравнений равновесия произвольной плоской системы сил в треугольной форме (или во второй форме, если два стержня, усилия которых неизвестны, параллельны):
причем ось x не перпендикулярна M_1M_2
$$3) \sum M_{M_1} = 0, \quad \sum M_{M_2} = 0, \quad \sum M_{M_3} = 0,$$
$$M_1, M_2, M_3 - \text{точки Риттера}$$

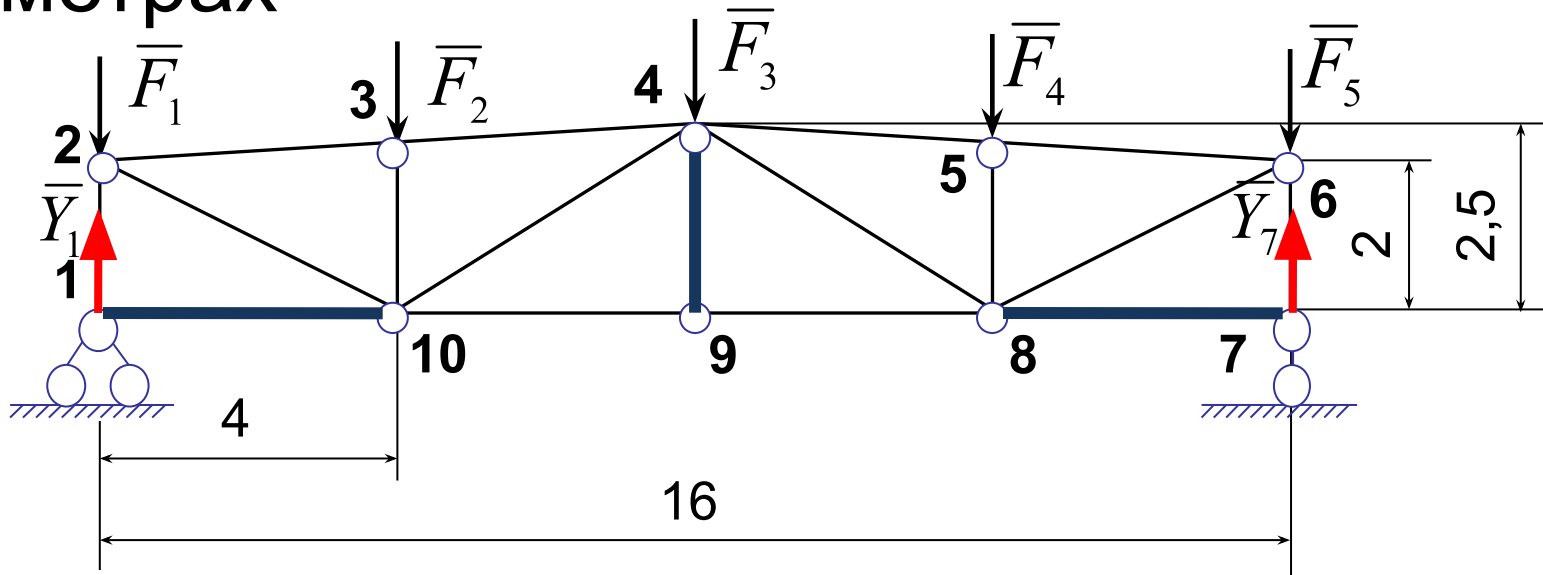
(точки пересечения линий действия двух неизвестных усилий)

7. Повторить алгоритм с пункта 3

Нулевые стержни плоской фермы

- **Стержни** называются **нулевыми**, если усилия в них равны нулю
- **Условия существования нулевых стержней:**
 1. Если к узлу с двумя стержнями, которые не принадлежат одной прямой, не приложена внешняя нагрузка, то усилия в них равны нулю
 2. Если в узле сходятся три стержня, причем два принадлежат одной прямой и нагрузка в узле отсутствует, то в третьем стержне, не принадлежащем этой прямой, усилие равно нулю
 3. Если в узле сходятся два стержня, а нагрузка направлена вдоль оси одного из них, то усилие в другом равно нулю

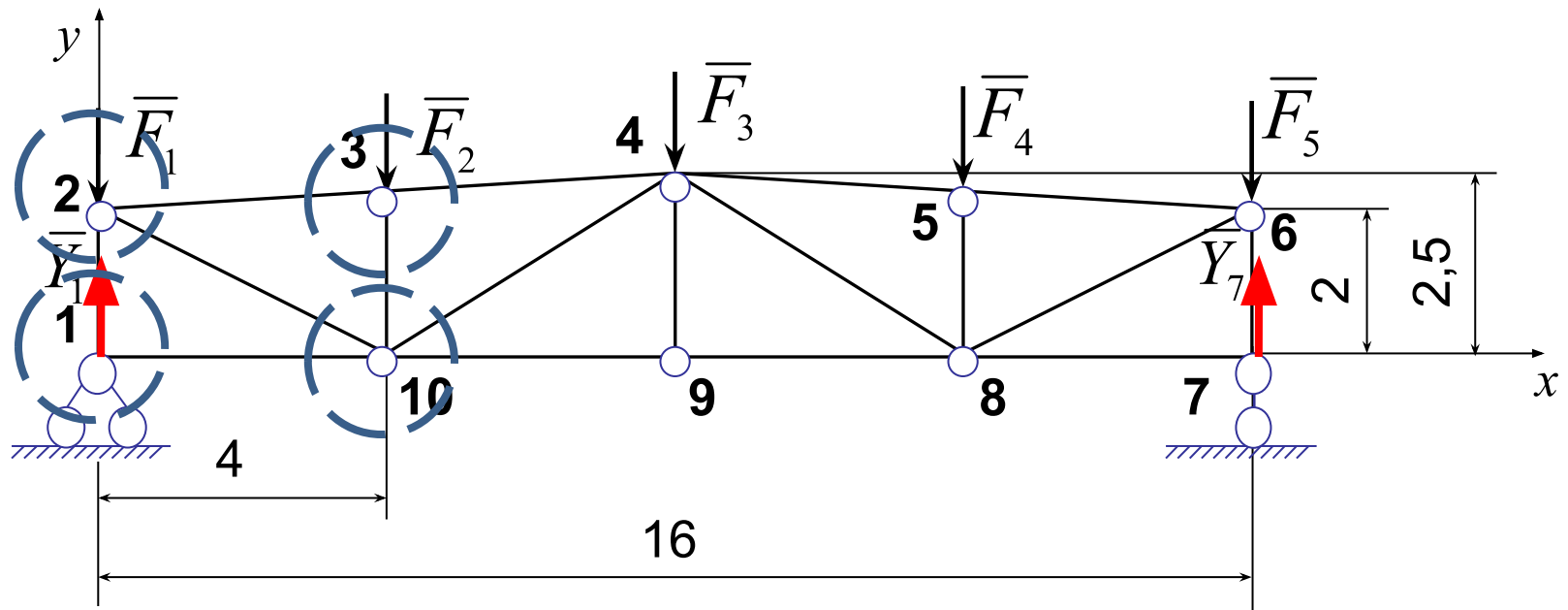
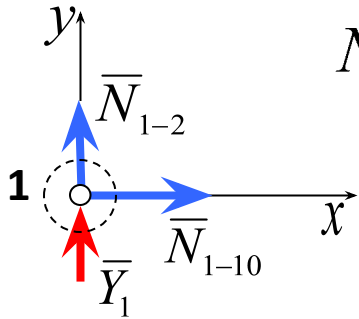
- Задание 4. Найти усилия в стержнях фермы если $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = F_3 = F_4 = 11 \text{ кН}$;
 линейные размеры фермы приведены в метрах**



$$1) X = 0, \quad Y_1 = Y_7 = 21,5 \kappa H$$

$$2) \text{узел } 1: \sum X = 0, \quad \sum Y = 0;$$

$$N_{1-10} = 0, \quad N_{1-2} + Y_1 = 0, \quad N_{1-2} = -Y_1 = -21,5 \kappa H$$



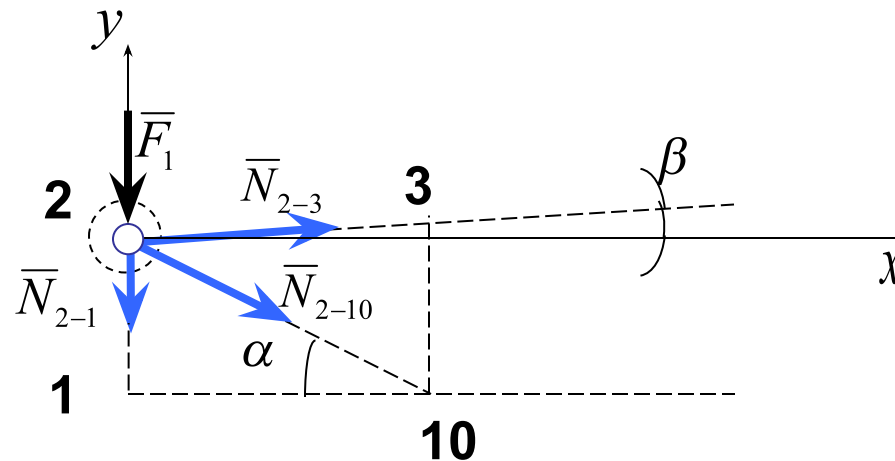
$$3) \text{узел } 2: \sum X = 0, \quad \sum Y = 0;$$

$$N_{2-10} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \beta = 0, \quad -N_{2-1} - N_{2-10} \sin \alpha + N_{2-3} \sin \beta - F_1 = 0,$$

$$N_{2-1} = -21,5 \text{ кН}; \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,8944; \quad \sin \alpha = 0,4472$$

$$\cos \beta = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{8^2 + (2,5 - 2)^2}} = 0,9981; \quad \sin \beta = 0,0624; \quad F_1 = 5 \text{ кН}$$

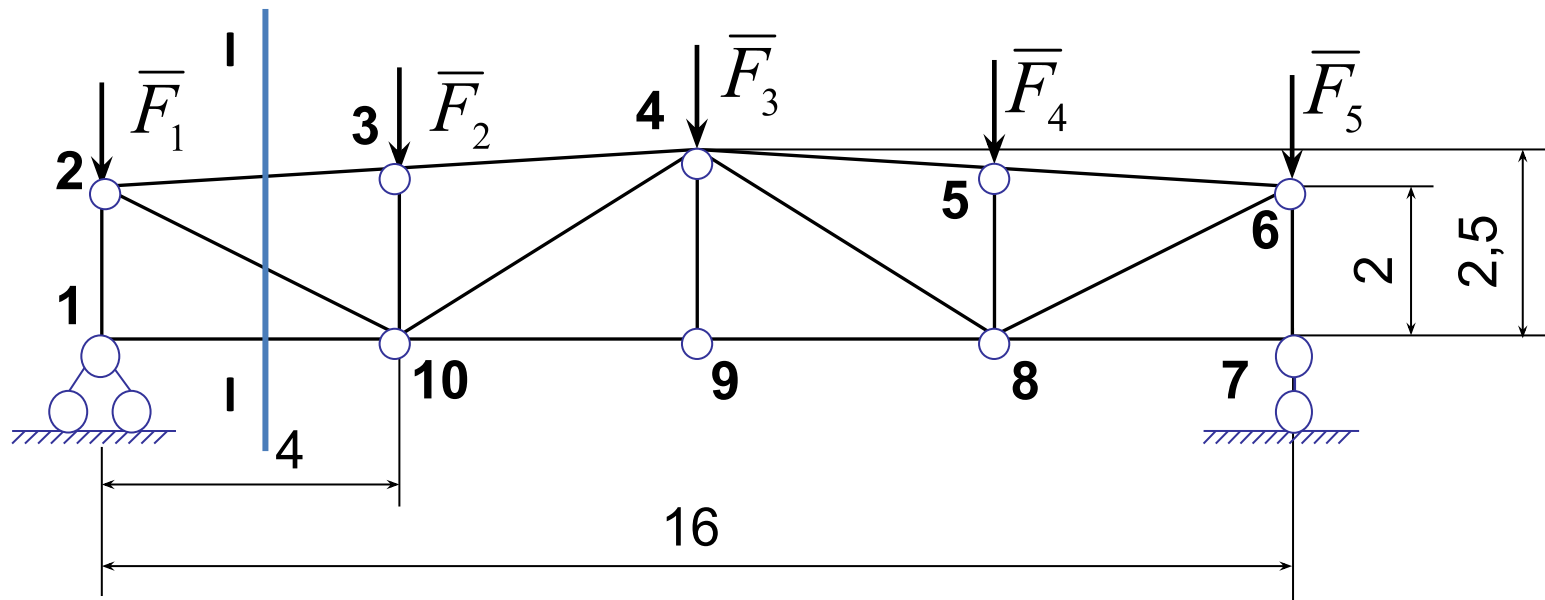
$N_{2-10} = 32,80 \text{ кН}; \quad N_{2-3} = -29,39 \text{ кН},$ стержень 2-10 растянут,
2-3 сжат



| | | | | | | | | | | |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|-------|-------|------|
| стержень | 1-2 | 2-3 | 3-4 | 4-5 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 8-9 | 9-10 | 10-1 |
| усилие в стержне | -21,50 | -29,39 | -29,39 | -29,39 | -29,39 | -21,50 | 0 | 35,20 | 35,20 | 0 |

| | | | | | | | |
|------------------|-------|--------|-------|-----|-------|--------|-------|
| стержень | 2-10 | 3-10 | 4-10 | 4-9 | 4-8 | 5-8 | 6-8 |
| усилие в стержне | 32,80 | -11,00 | -6,92 | 0 | -6,92 | -11,00 | 32,80 |

- Определим усилия в стержнях $1-10$, $2-3$, $2-10$ методом Риттера.
- Построим сечение $I-I$ через стержни $1-10$, $2-3$, $2-10$.
- Рассмотрим равновесие левой части фермы



$$\sum M_{\text{узел}10} = 0, \quad \sum M_{\text{узел}2} = 0, \quad \sum M_{M_1} = 0,$$

$$4F_1 - 4V_A - N_{2-3}d_2 = 0, \quad 2N_{1-10} = 0, \quad M_1A(V_A - F_1) - N_{2-10}d_1 = 0$$

$$M_1A = 2ctg\beta = 2 \cdot 16 = 32 \text{ м}, \quad d_2 = \frac{M_1A + 4}{M_1A} \cdot 2 = \frac{32 + 4}{32} \cdot 2 = 2,25 \text{ м}$$

$$d_1 = (M_1A + 4) \sin \alpha = (32 + 4) \cdot 0,4772 = 16,1 \text{ м},$$

$$N_{1-10} = 0 \text{ кН}, \quad N_{2-3} = -29,39 \text{ кН}, \quad N_{2-10} = 32,80 \text{ кН}$$

