План проведения занятия по теме

Функции и их свойства

Скуднева Оксана Валентиновна

Образование: МГТУ им. Н. Э. Баумана, специальность «Системы автоматического управления»;

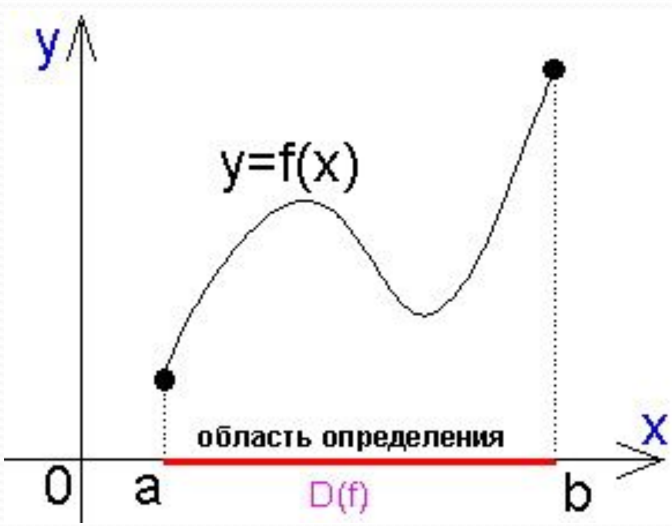
МГУ им. М. В. Ломоносова, специальность «Математика. Прикладная математика».

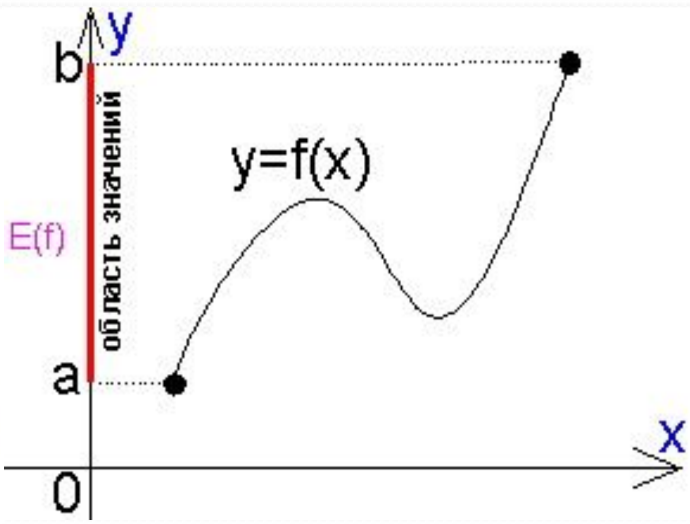
Место работы: МГТУ им. Н. Э. Баумана, НУК ФН, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», должность – старший преподаватель.

Опыт работы: средняя школа, 2002-2011 гг., факультативные курсы по подготовке к Олимпиадам МГТУ им. Н. Э. Баумана «Шаг в будущее», «Олимпиада Жуковского», ЕГЭ по математике, основной курс алгебры физ-мат. класса.

Основные понятия и определения.

Закон, ставящий каждому элементу из множества X (область определения -D(f)), не более одного элемента из множества Y, (область значений - E(f)), называется числовой функцией y=f(x).





Способы задания функции

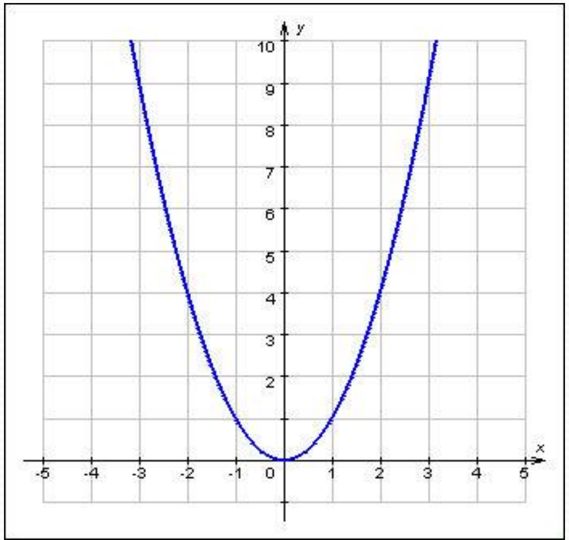
1) табличный

Пример:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

2) Графический

Пример:

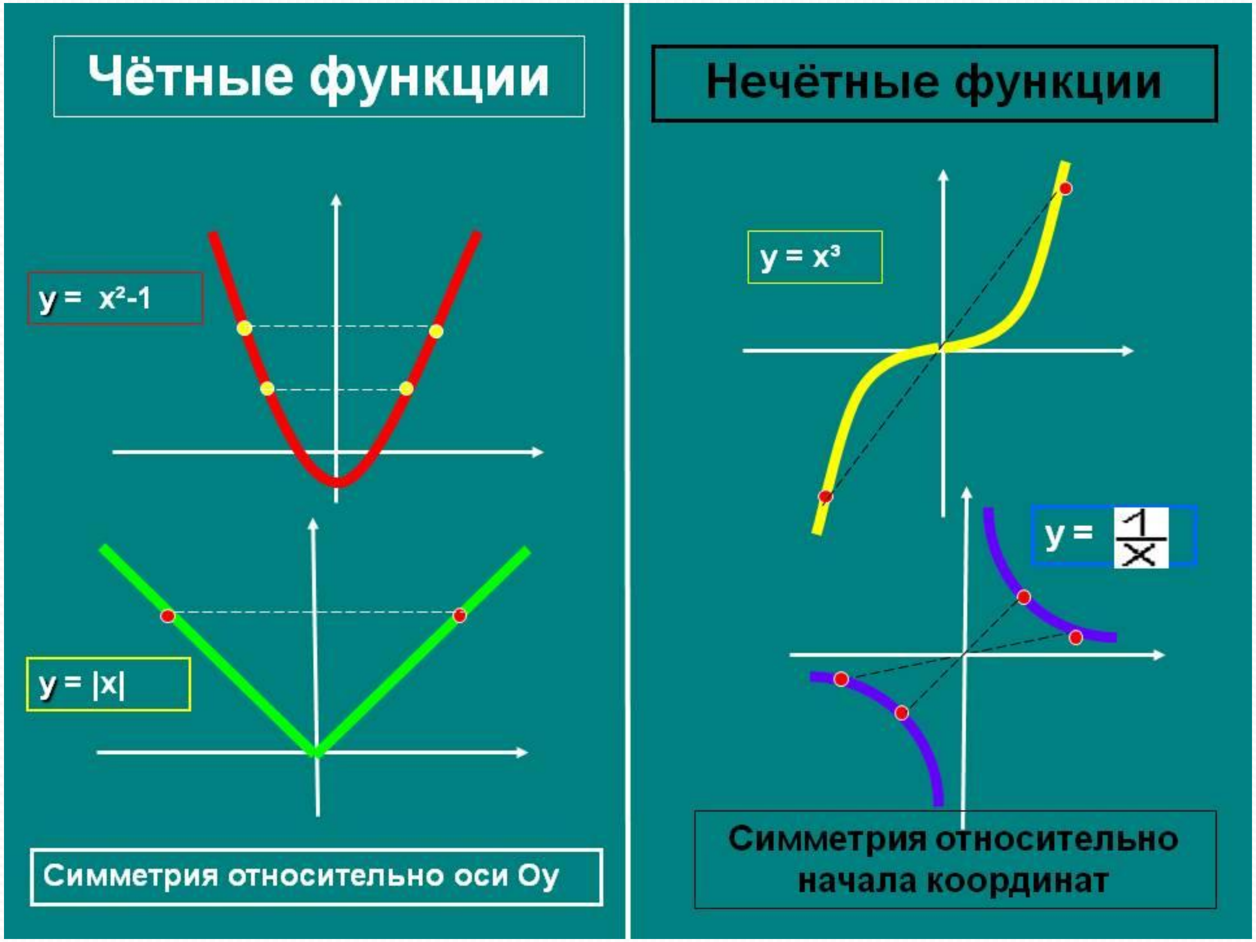


3)аналитический(формулой):

Пример: $y = x^2$

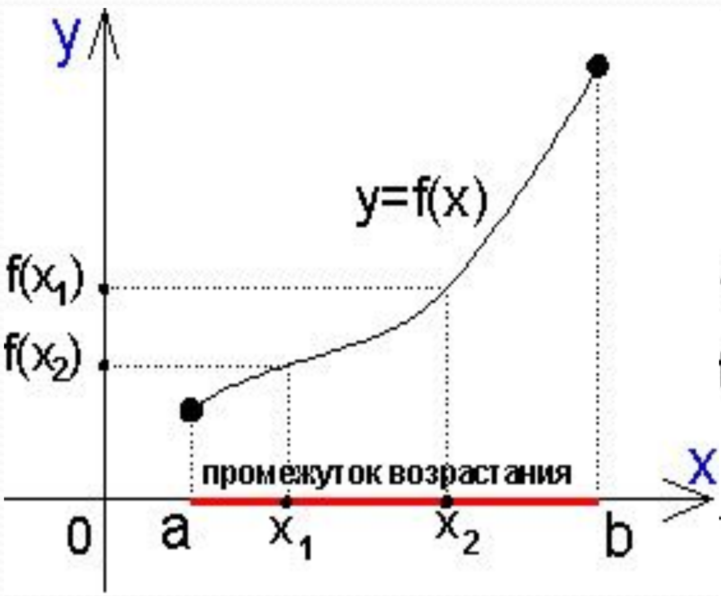
Если область определения функции D(f) симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x)=f(x)$, функция называется **чётной.** График чётной функции симметричен относительно оси OY.

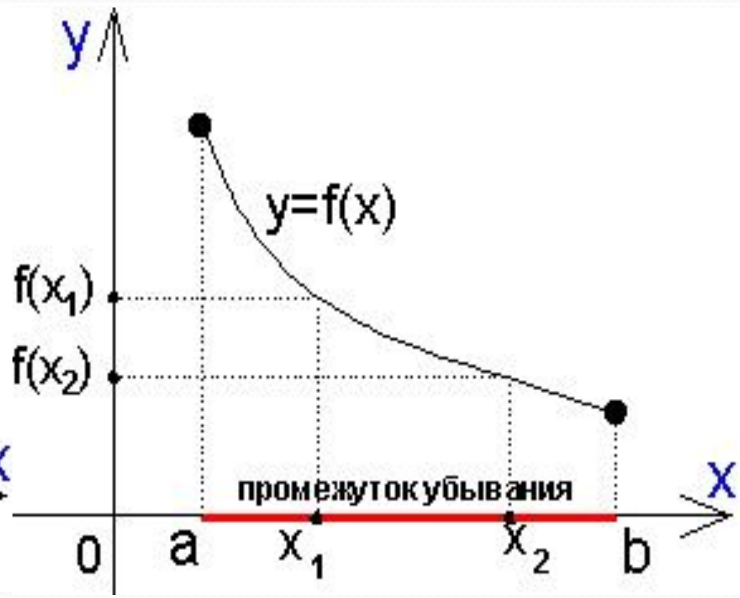
Если область определения функции D(f) симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x)=-f(x)$, функция называется **нечётной**. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



Если для любых $x_1 \in (a; b)$ и $x_2 \in (a; b)$, причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **возрастает** на интервале $(a; b)$.

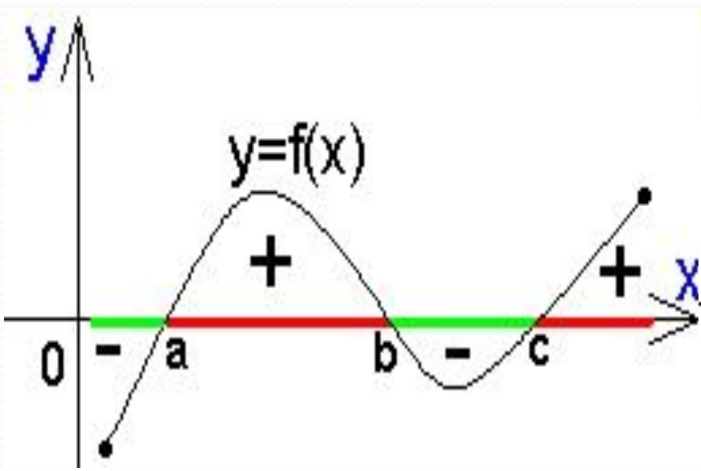
Если для любых $x_1 \in (a; b)$ и $x_2 \in (a; b)$, причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **убывает** на интервале $(a; b)$.

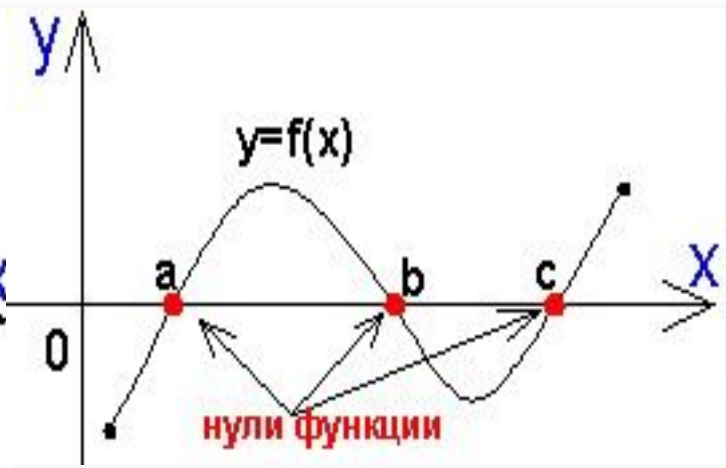




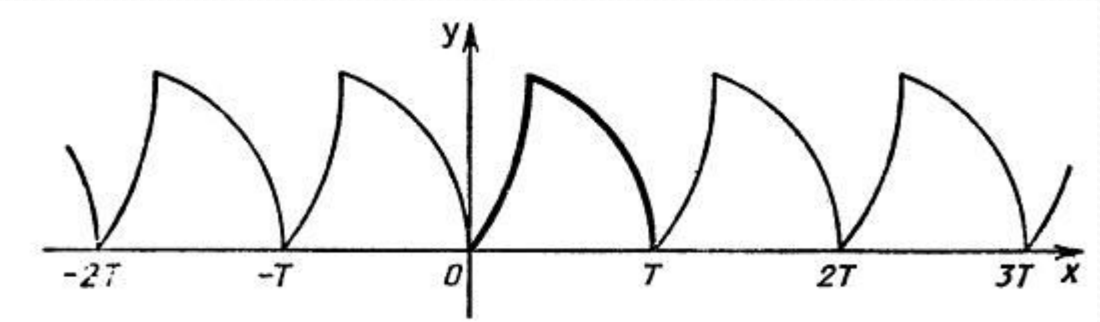
Возрастание и убывание функции объединяется понятием **монотонности**.

Если на промежутке области определения функция имеет значения одного знака (плюс или минус), такой интервал называется промежутком знакопостоянства функции. Числа, в которых значение функции равно нулю, называются нулями функции.





Если существует положительное число T, такое, что на всей области определения выполняется равенство [illegible] = [illegible] + [illegible] , [illegible] функция называется периодической, а число T – периодом.

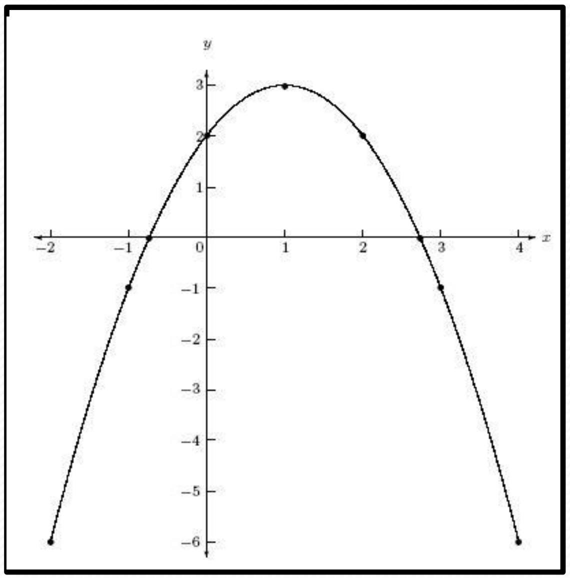


Ограниченные функции.

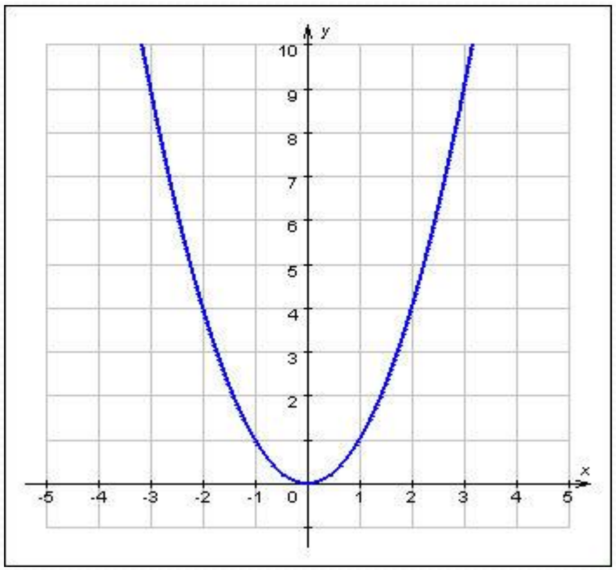
Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если

$$\exists\, M(m)\in R\ \forall\, x\in X \Rightarrow f(x)\le M\ (f(x)\ge m).$$

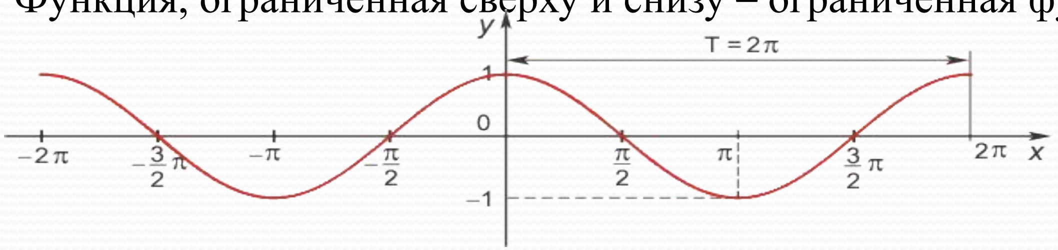
Пример. Функция, ограниченная сверху:



Функция, ограниченная снизу:

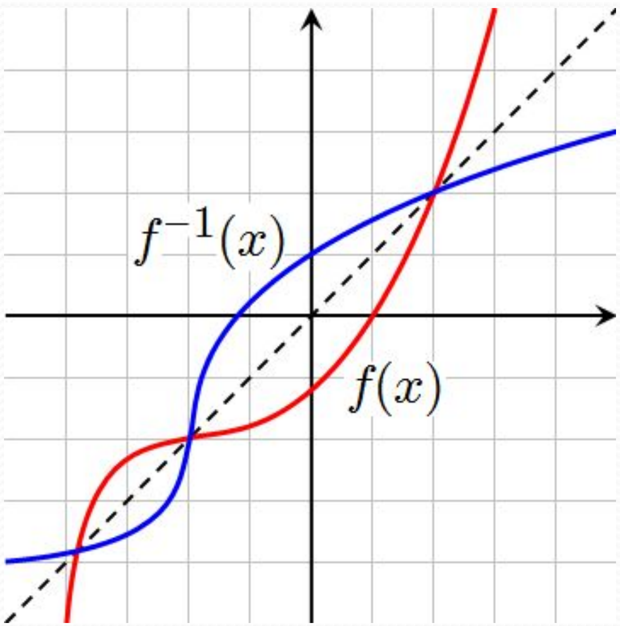


Функция, ограниченная сверху и снизу – ограниченная функция.



Обратная функция.

Пусть на множестве X определена строго монотонная функция ⊠⊠ = ⊠⊠⊠⊠ , осуществляющая отображение ⊠⊠ ⊠ ⊠⊠. обратной функцией к ней , ⊠⊠ = ⊠⊠$^{-1}$(⊠⊠) называется функция, осуществляющая отображение ⊠⊠ ⊠ ⊠⊠, такое, что для каждого ⊠⊠ ⊠ ⊠⊠ ⊠⊠ = ⊠⊠⊠⊠. Графики исходной и обратной функций, таким образом, симметричны относительно прямой ⊠⊠ = ⊠⊠.



Чтобы получить обратную функцию:

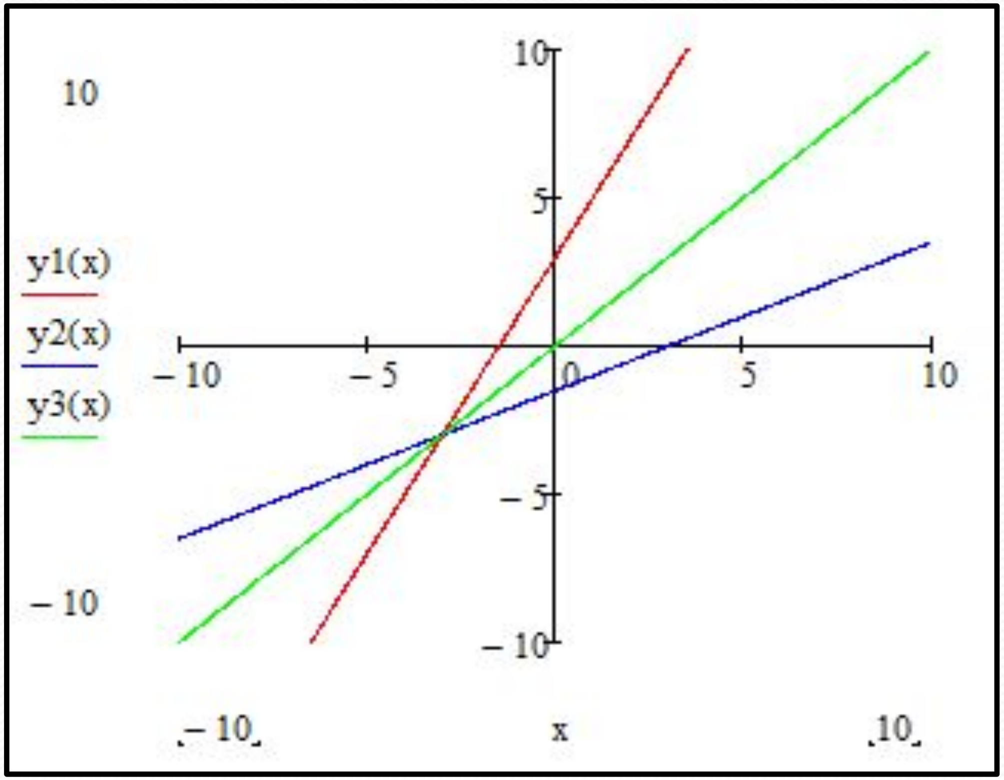
1) Определить участки монотонности функции ⊠ = ⊠⊠⊠ ;
2) Для каждого участка монотонности составить функцию ⊠ = ⊠⊠⊠;
3) Выразим из данного выражения переменную у, получим обратную функцию , ⊠ = ⊠$^{-1}$(⊠) .

Пример.

1) ⊠ = 2⊠+ 3 возрастает на всей области определения ⊠⊠⊠ = ⊠ ;

2) Механически меняем местами переменные : ⊠ = 2⊠+ 3;

3) выражаем переменную у: ⊠ = $\frac{⊠-3}{2}$. Это и есть обратная функция. Строим графики и убеждаемся в симметрии относительно прямой ⊠ = ⊠

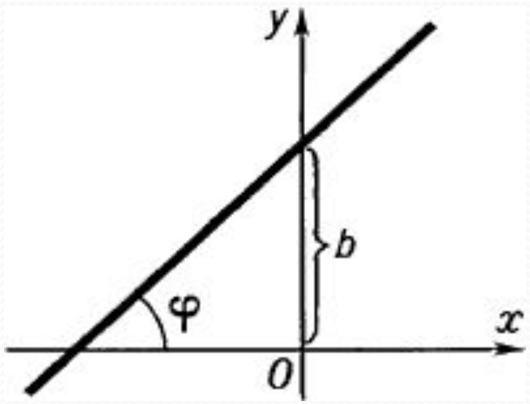


10
y1(x)
y2(x)
y3(x)
− 10
10
5
− 5
− 10
− 10
− 5
0
5
10
− 10
x
10

Основные элементарные функции.

Линейная функция

y = kx + b

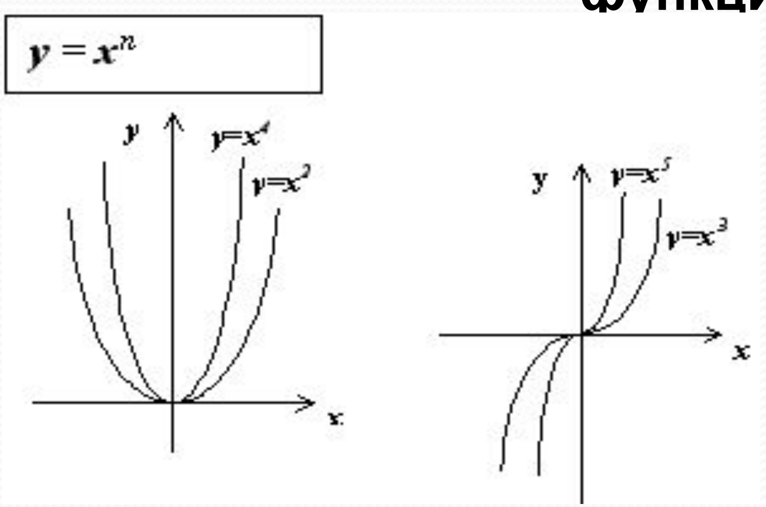


[illegible] = [illegible] - функция определена на всей числовой оси.

[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible]

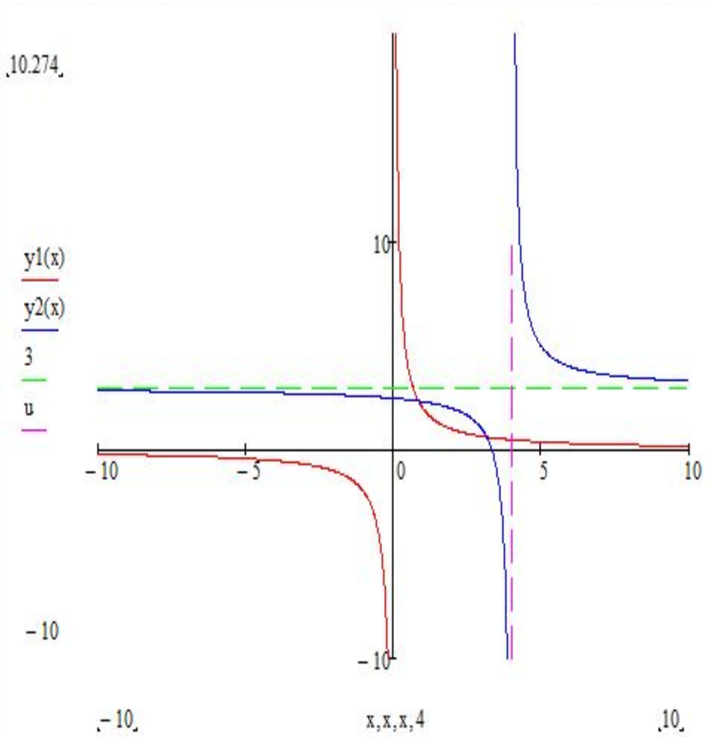
Степенная функция.



[illegible] , [illegible] = 2[illegible] [illegible]чётное[illegible] [illegible] = [illegible] , [illegible] = [illegible]0,+ ∞[illegible]

[illegible] , [illegible] = 2[illegible]+ 1 [illegible]нечётное[illegible] [illegible] = [illegible] , [illegible] = [illegible]

Дробно-рациональная функция.



$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad x \neq -\frac{d}{c}$$

Приводится к виду $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$,

где $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$,

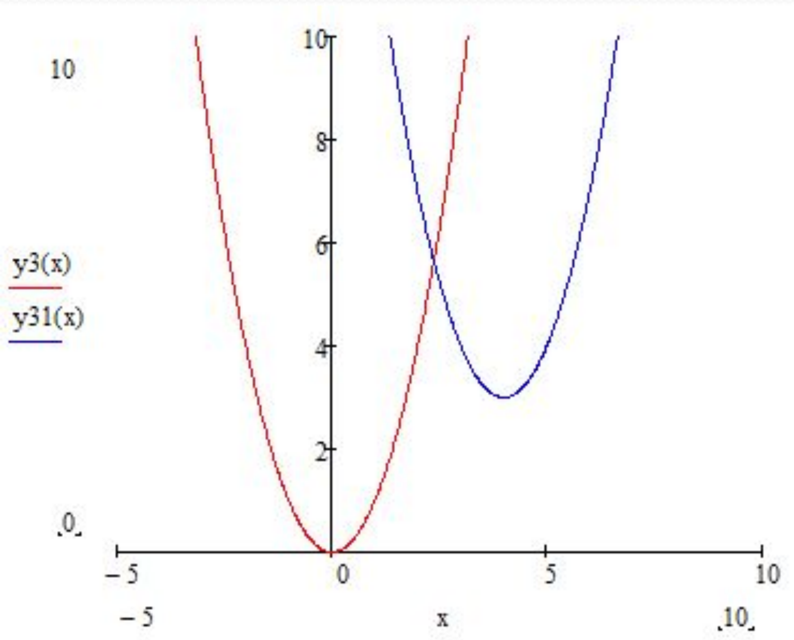
$$k = \frac{bc - ad}{c^2}$$

Пример. $y1(x) = \frac{2}{x}$

$$y2(x) = 3 + \frac{2}{x - 4}$$

Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c$$



Приводится к виду

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2,$$

где $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

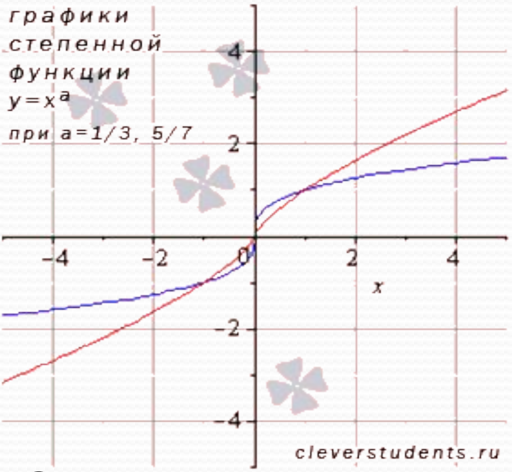
Пример. $y3(x) = x^2$,

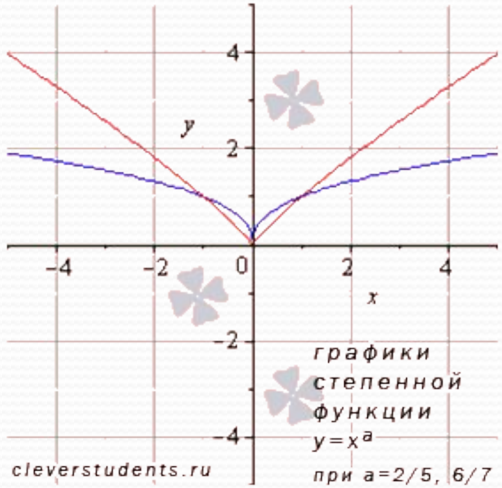
$$y31(x) = 3 + (x - 4)^2$$

Степенные функции с рациональным показателем.

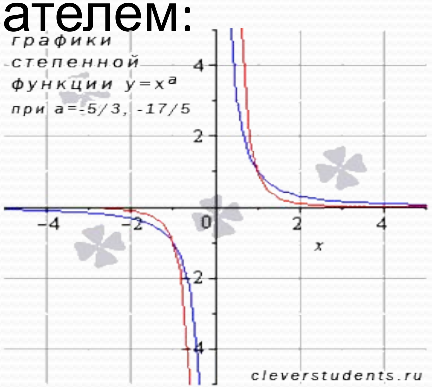
$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

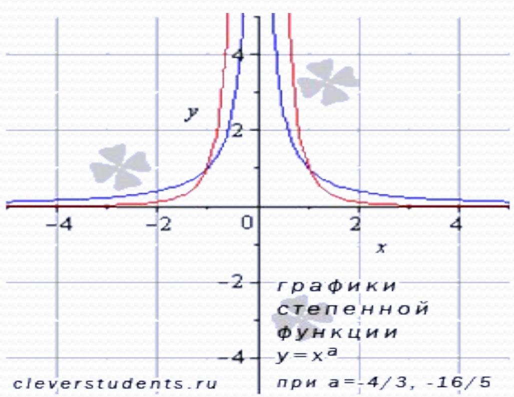
В зависимости от чётности *p* и *q* графики принимают вид:





Степенные функции с отрицательным рациональным показателем:





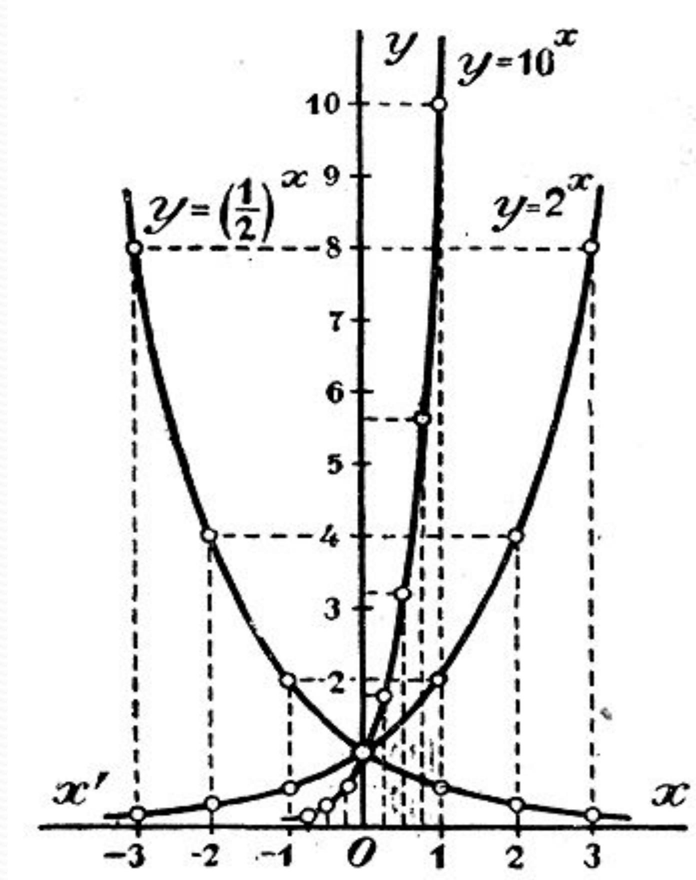
Показательная функция

$y = a^x, a > 0, a \neq 1.$

$D(y) = R, \quad E(y) = (0, +\infty),$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.



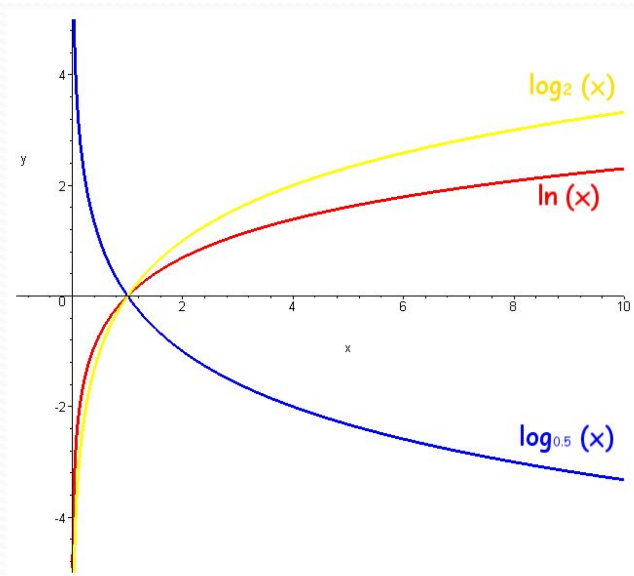
Логарифмическая функция. (Обратная к показательной)

$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$

$D(y) = (0, +\infty),\ E(y) = R$,

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.

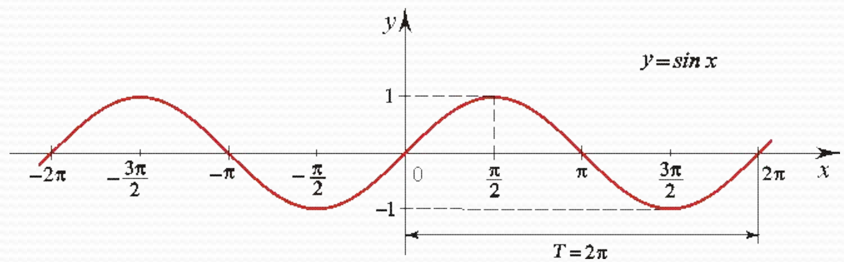


Тригонометрические функции .

[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] , [illegible] = [illegible]− 1, + 1[illegible], нечётная,

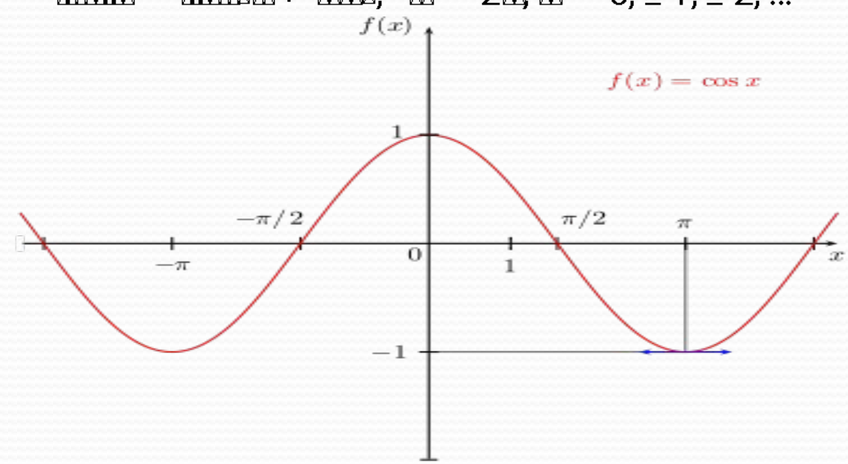
[illegible] = [illegible] + [illegible], [illegible] = 2[illegible], [illegible] = 0, ± 1, ± 2, …



[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] , [illegible] = [illegible]− 1, + 1[illegible], чётная

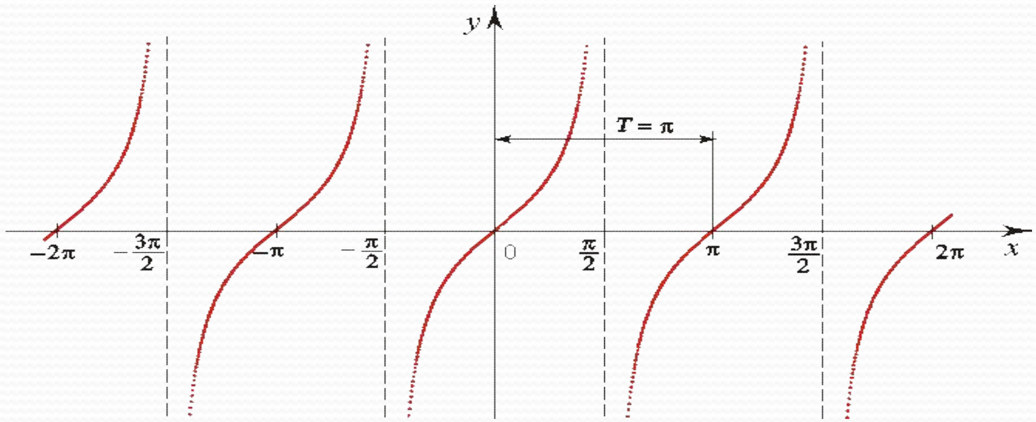
[illegible] = [illegible] + [illegible], [illegible] = 2[illegible], [illegible] = 0, ± 1, ± 2, …



[illegible] = [illegible], нечётная,

$[illegible] = [illegible] - \frac{[illegible]}{2} + [illegible], \frac{[illegible]}{2} + [illegible]$, $[illegible] = [illegible]$, $[illegible] = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

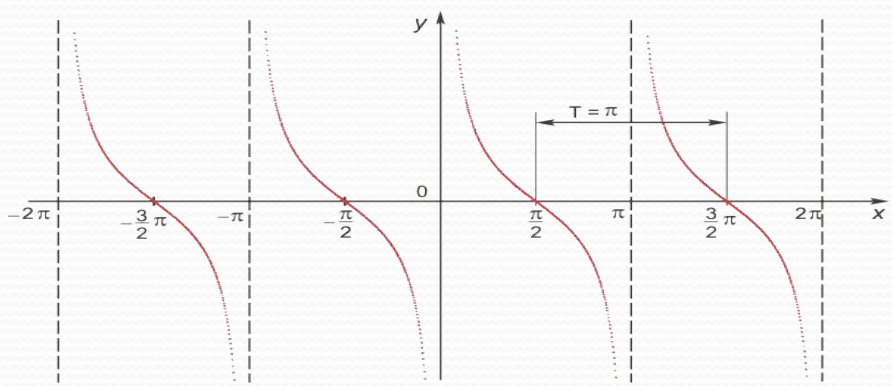
$[illegible] = [illegible] + [illegible]$, $[illegible] = [illegible]$, $[illegible] = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



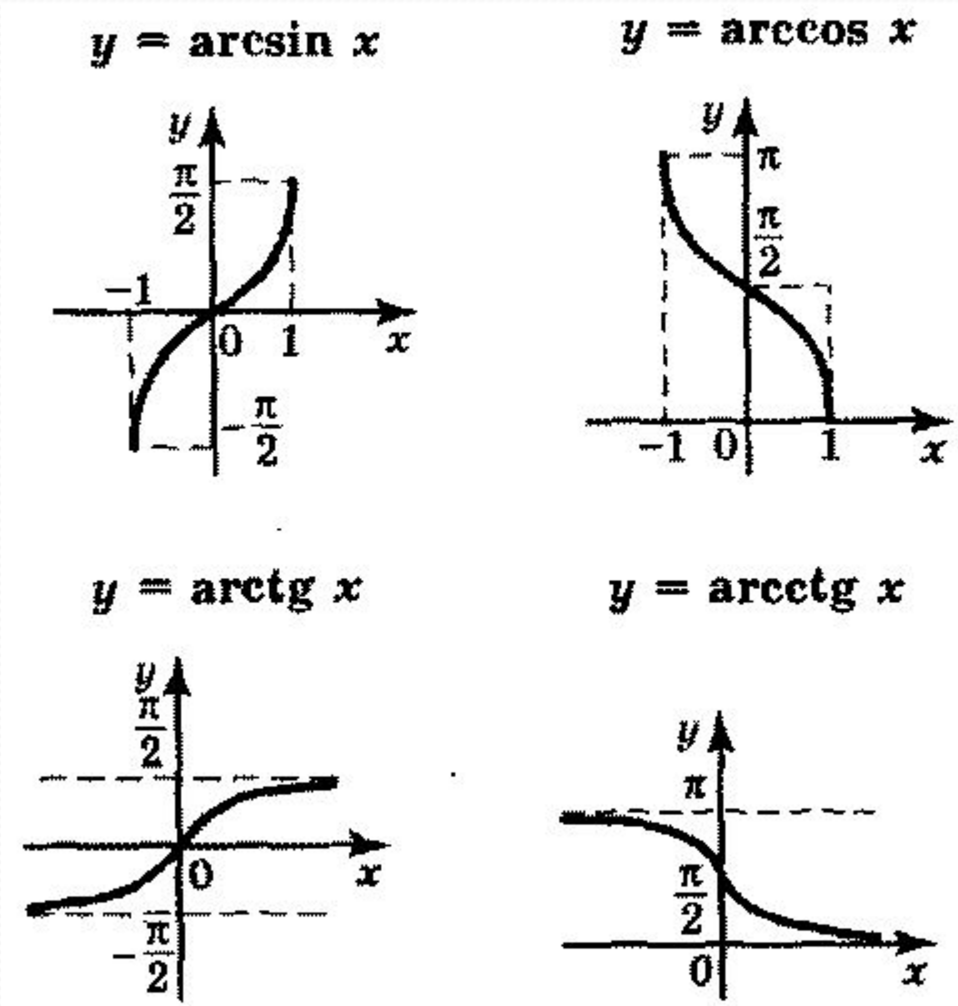
[illegible] = [illegible], нечётная,

$[illegible] = [illegible], [illegible] + 1[illegible]$, $[illegible] = [illegible]$, $[illegible] = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$[illegible] = [illegible] + [illegible]$, $[illegible] = [illegible]$, $[illegible] = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

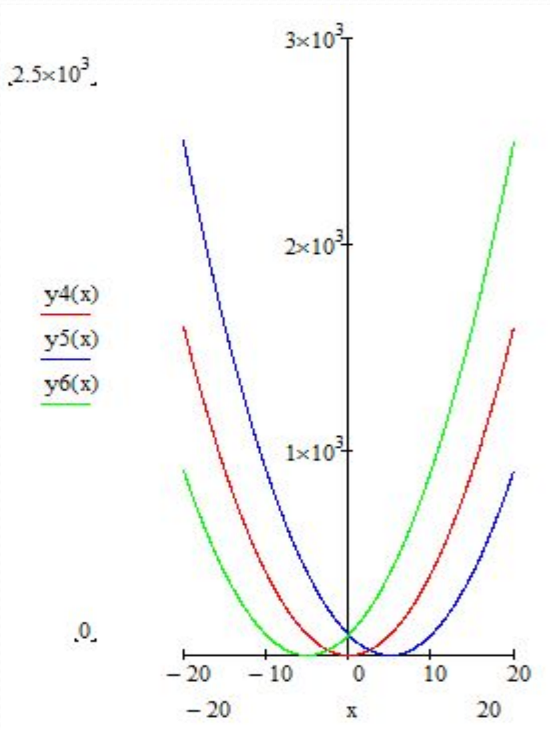


Обратные тригонометрические функции.



Построение эскизов графиков функций.

Смещение вдоль оси абсцисс.



а - действительное положительное число.

⊠ = ⊠(⊠) - исходная функция.

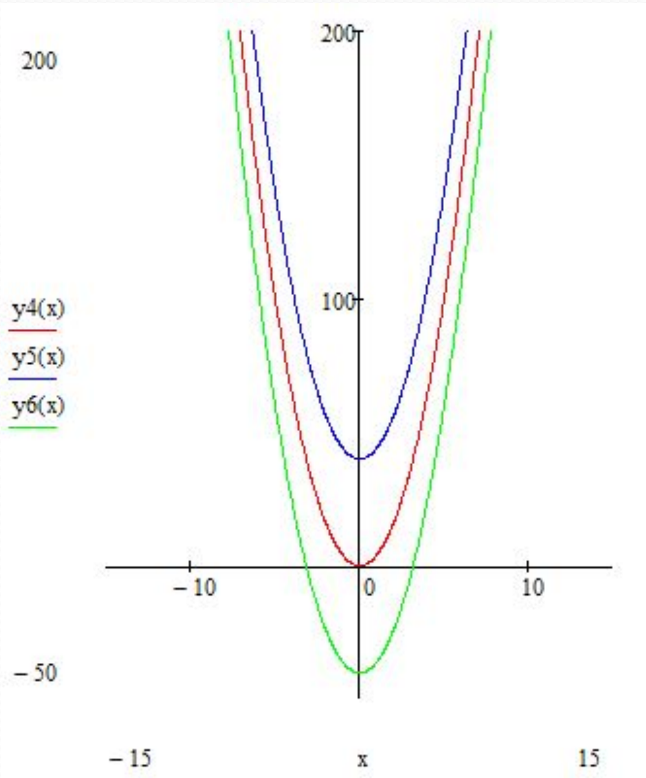
⊠ = ⊠⊠⊠ − ⊠⊠ - смещение графика

⊠ = ⊠(⊠) на а единиц вправо.

⊠ = ⊠(⊠+ ⊠) - смещение графика

⊠ = ⊠(⊠) на а единиц влево.

Смещение вдоль оси ординат.



b - действительное положительное число.

⊠ = ⊠(⊠) - исходная функция.

⊠ = ⊠+ ⊠⊠⊠⊠ - смещение графика

⊠ = ⊠(⊠) на b единиц вверх.

⊠ = ⊠⊠⊠⊠ − ⊠- смещение графика

⊠ = ⊠(⊠) на b единиц вниз.

Сжатие – растяжение вдоль оси абсцисс.

$y = f(x)$ - исходная функция. k- действительное положительное число, превосходящее единицу.График функции $y = f(kx)$- сжат в k раз по оси абсцисс

Пример. $y4(x) = \sin(x)$, $y5(x) = \sin(3x)$

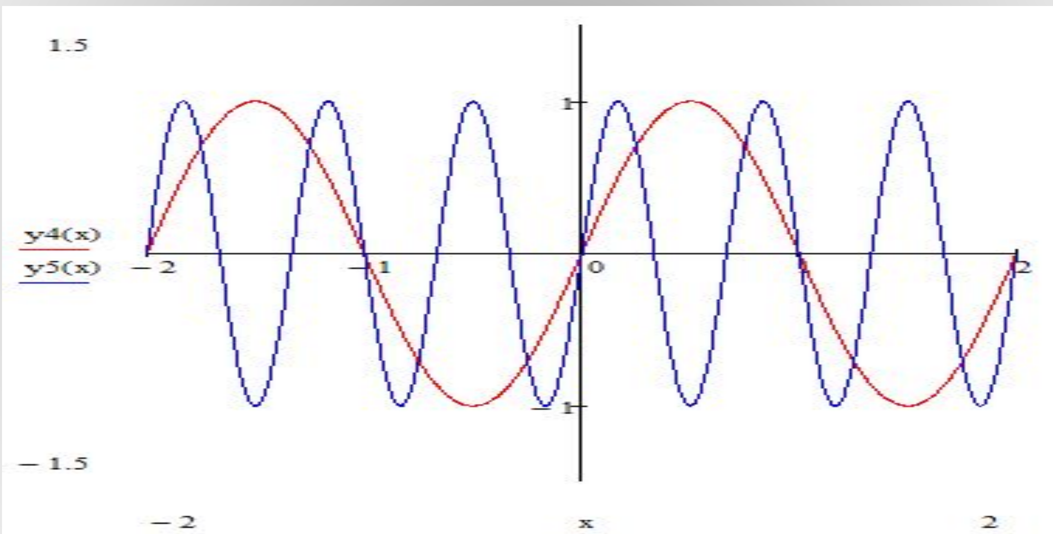
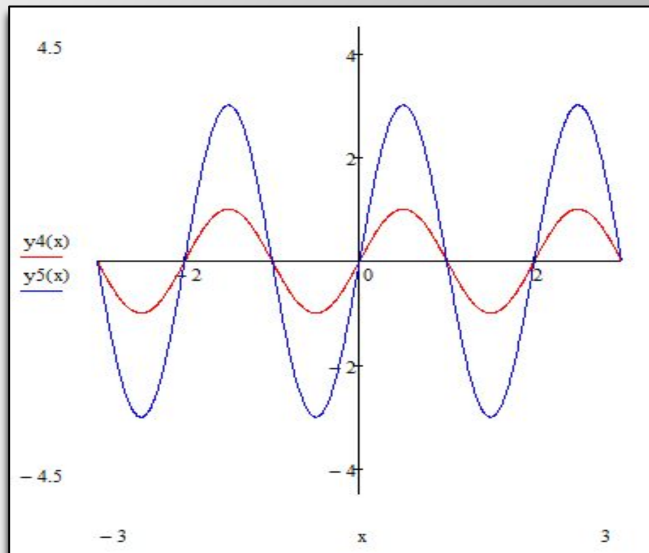


График функции $y = f(\frac{x}{k})$- растянут в k раз по оси абсцисс.

Пример. $y4(x) = \sin(x)$, $y5(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Сжатие – растяжение вдоль оси ординат.



[illegible] = [illegible]([illegible]) - исходная функция. k- действительное положительное число, превосходящее единицу.

График функции [illegible] = [illegible]([illegible])- растянут в k раз по оси ординат.

Пример. [illegible]4[illegible] = sin[illegible]; [illegible]5[illegible] = 3 sin[illegible]

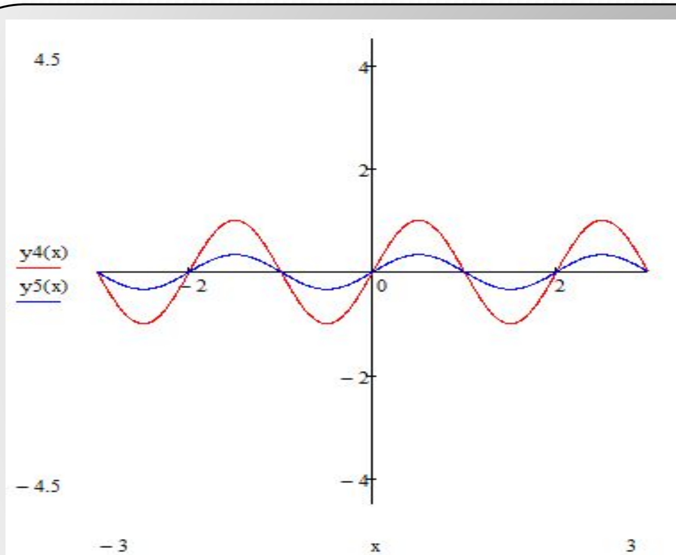
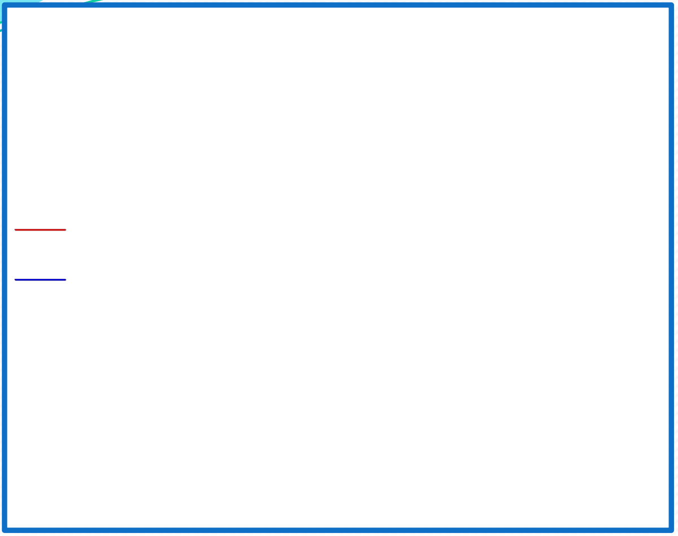


График функции [illegible] = $\frac{1}{[illegible]}$ [illegible]([illegible])- сжат в k раз по оси ординат.

Пример. [illegible]4[illegible] = sin[illegible]; [illegible]5[illegible] = $\frac{1}{3}$ sin[illegible]

Отражения графиков.

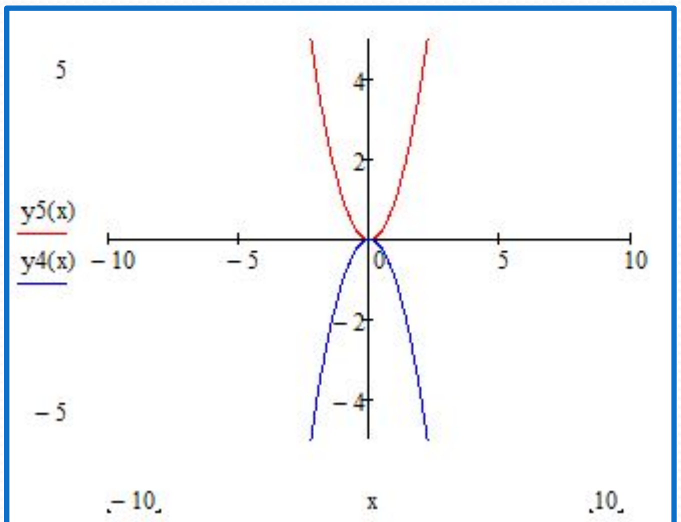


$y = f(x)$ - исходная функция.

$y = f(-x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси ординат.

Пример. $y5(x) =$ [illegible],

$y5(x) =$ [illegible].

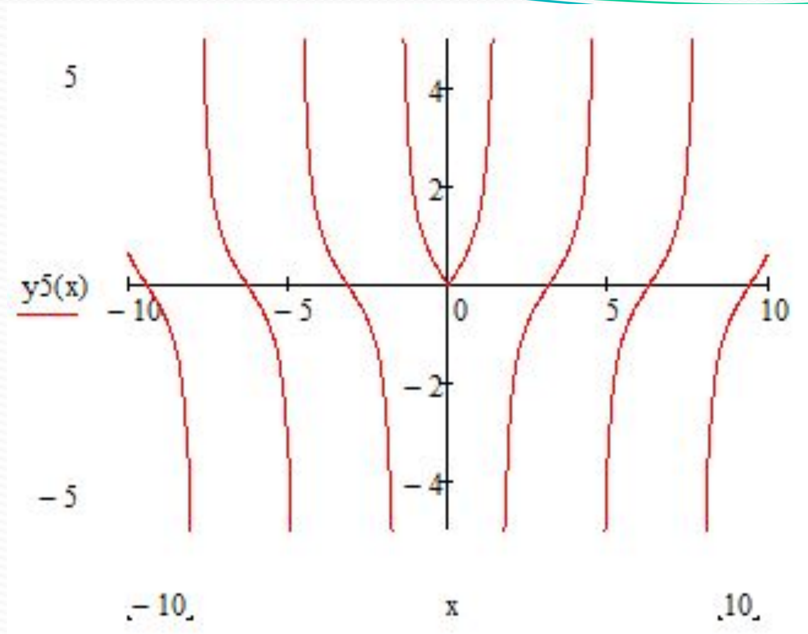


$y = -f(x)$ - исходная функция симметрично

отражается относительно оси абсцисс.

Пример. $y5(x) = x^2$,

$y5(x) = -x^2$



$y = f(|x|)$ - график исходной функции для $x \geq 0$ остаётся на прежнем месте, для $x < 0$ – заменяется на отражённую относительно оси ординат часть графика для $x \geq 0$.

Пример. $y = \mathrm{tg}\,|x|$

Билет 1

1. Построить эскизы графиков функций:

А) $y = \frac{3x-3}{5x+7}$ Б) $y = \left|\frac{3x-3}{5x+7}\right|$; $y = f(g(x)),\ f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = |x+2|$

В) $y = 5x^2 - 4x + 7$; Г) $y = 2x^2 - 6|x+2| + 5$; Д) $y = \frac{3|x|-3}{5|x|+7}$.

2. Определить вид монотонности функции $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

(возр. или убывание) на отрезке: $x \in [3;7]$

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} + \sqrt{\frac{3x^2+4x-4}{x+1}}$$

4. Найти обр.функцию $y = 6 - 3x$