Графы

Ирина Борисовна Просвирнина

- Эйлеровы графы
- Гамильтоновы графы
- Изоморфизмы графов

Эйлеровы графы

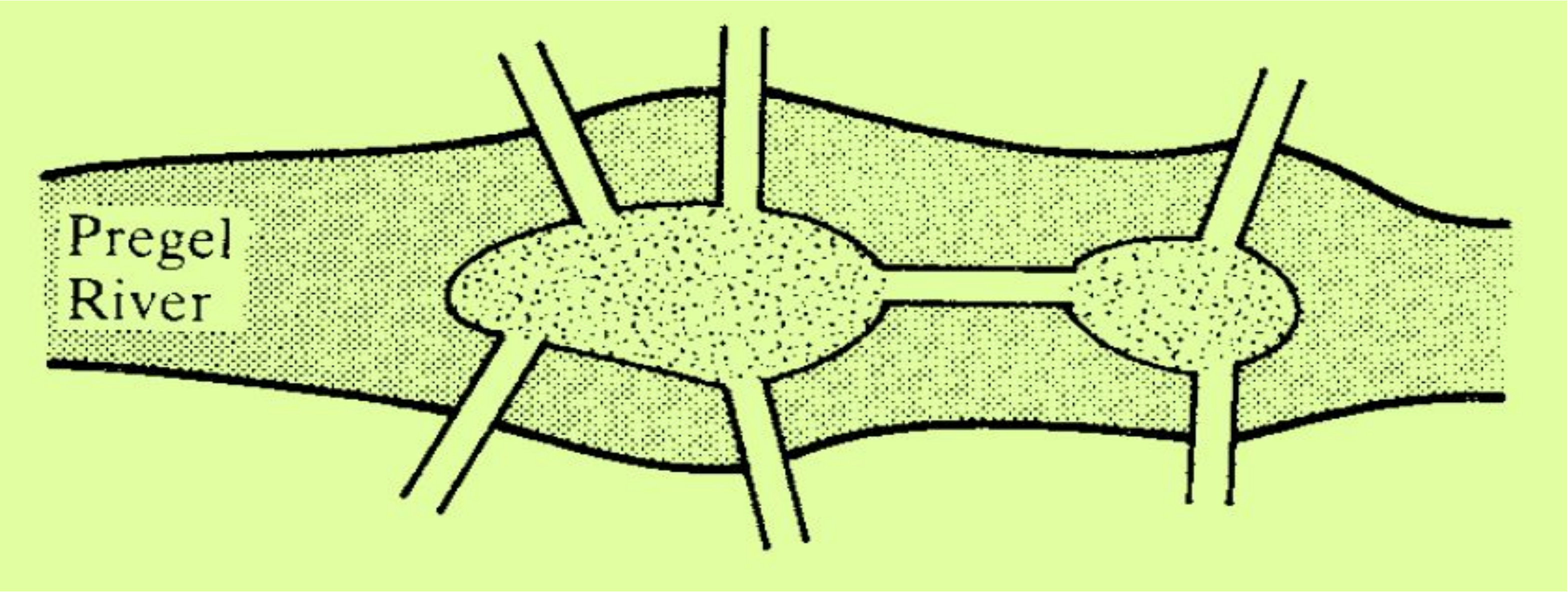
Мы уже упоминали работу Эйлера, датированную 1736 годом, которая положила начало теории графов.

В этой работе Эйлер изложил теорию, позволившую решить задачу о мостах Кенигсберга.

Перейдем к изложению задачи о кенигсбергских мостах. Она состоит в следующем.

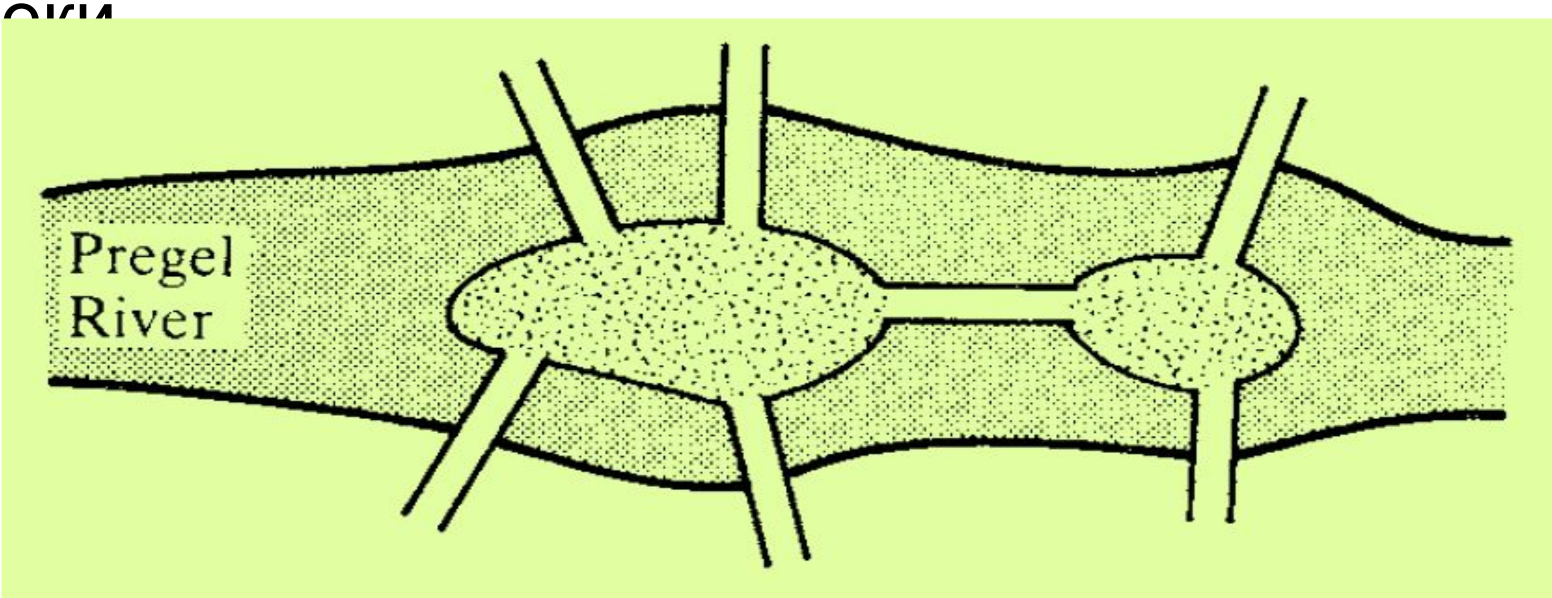
Эйлеровы графы

Задача возникла в прусском городе Кенигсберг на реке Прегел. На реке Прегел было два острова, один из которых – остров Кнайпхоф (это больший остров). Этот район и семь его мо



Эйлеровы графы

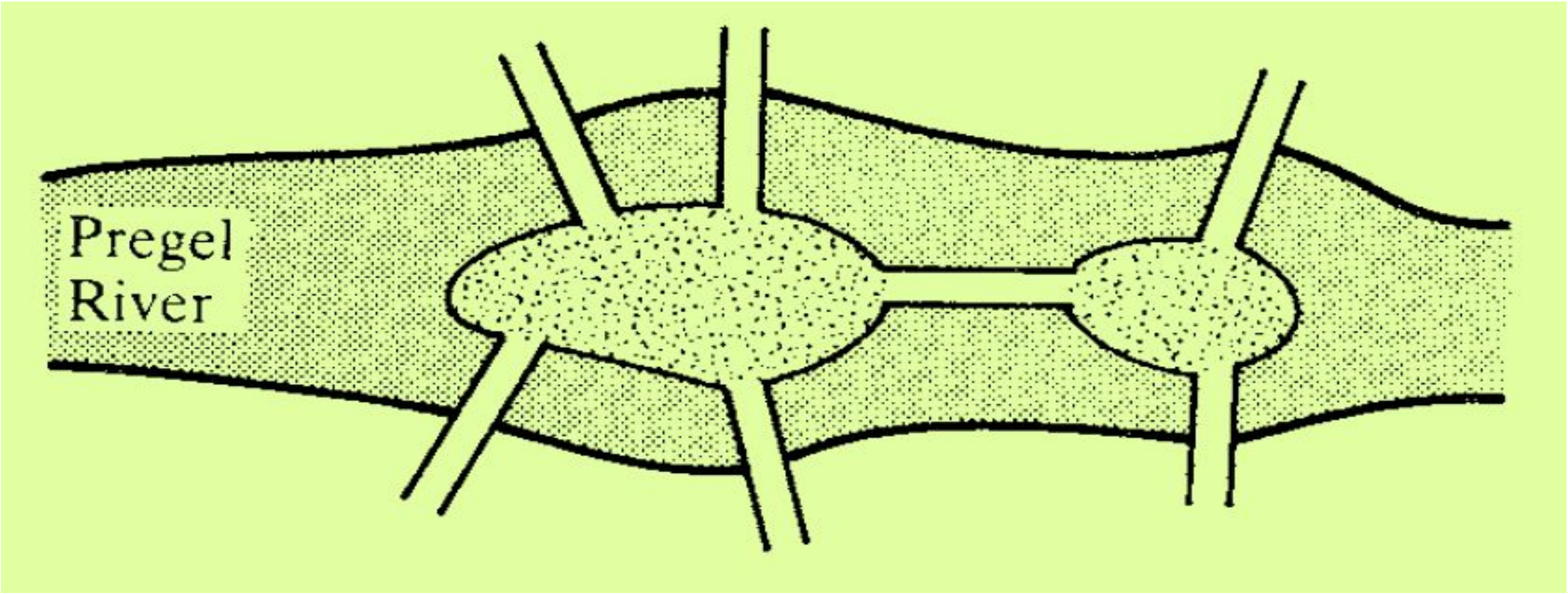
Жители Кенигсберга интересовались, могут ли они, начав путь с одного участка суши, обойти все мосты, посетив каждый лишь однажды, и вернуться в точку начала пути, не переплывая реки.



Эйлеровы графы

Жители Кенигсберга не могли найти такого пути.

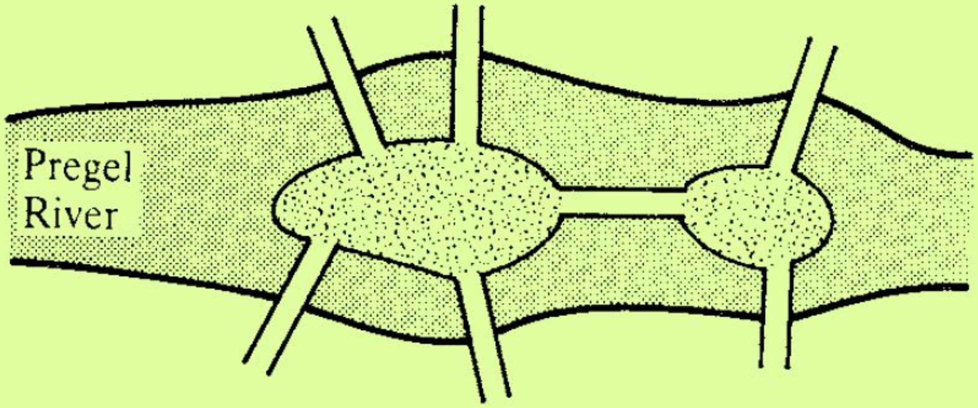
Задача заключалась в следующем: найти путь с требуемыми свойствами или доказать, что такого пути не существует.



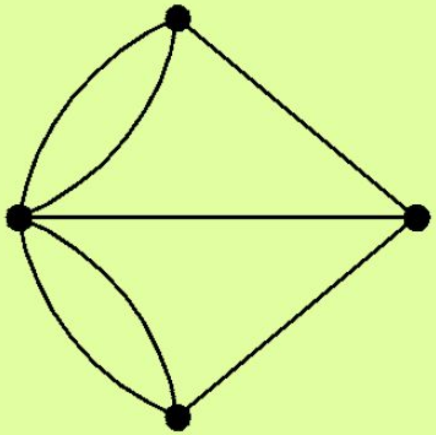
Эйлеровы графы

- Эйлер представил географию указанного района Кенигсберга в виде графа (рисунок (b)).

Оба берега реки и острова изображены вершинами графа, а ребра графа соответствуют мостам, соединяющим участки суши.



(a)

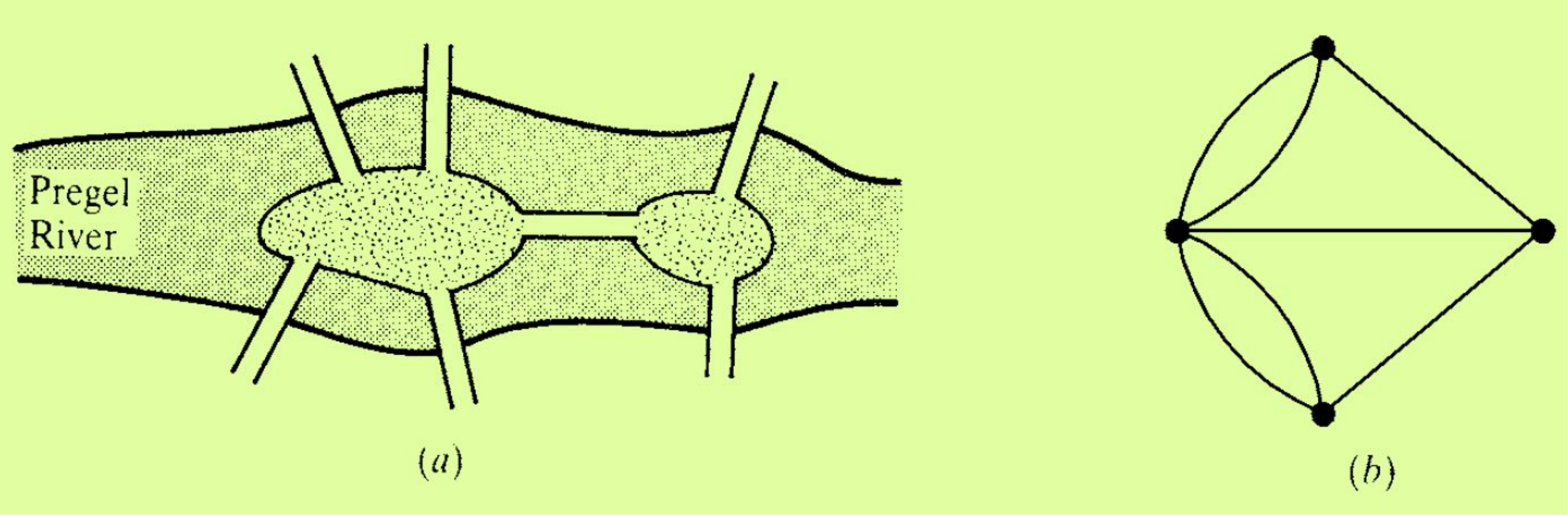


(b)

Эйлеровы графы

- Переформулируем задачу о кенигсбергских мостах на языке теории графов.

Следует выяснить, существует ли замкнутый путь, который включает все ребра графа, изображенного на рисунке (b).



Эйлеровы графы

Определение 1

Эйлеров цикл в графе Γ – это замкнутый путь, который включает все ребра графа Γ.

Граф называется **эйлеровым**, если он имеет хотя бы один эйлеров цикл.

Напомним, что в пути все ребра различны.

Таким образом, эйлеров цикл включает каждое ребро графа в точности один раз, хотя, конечно, вершины в эйлеровом цикле могут повторяться.

Эйлеровы графы

Теорема 1

Связный граф Γ является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.

? Если связный граф Γ является эйлеровым, то каждая его вершина имеет четную степень.

Доказательство

- Предположим, что Γ – связный и имеет эйлеров цикл.

Так как Γ – связный, то последовательность вершин эйлерова цикла содержит все вершины графа Γ.

Всякий раз, когда цикл проходит через вершину графа, он вносит 2 в степень этой вершины (1 вносит ребро, ‘входящее в’ вершину и 1 вносит ребро, ‘выходящее из’ вершины).

Так как эйлеров цикл проходит каждое ребро графа в точности один раз, то каждая вершина должна иметь четную степень. ■

? Если граф Γ является связным и каждая его вершина имеет четную степень, то Γ – эйлеров.

Доказательство

- Докажем утверждение индукцией по $|E|$, числу ребер графа Γ.

Индуктивный переход (набросок доказательства).

Во-первых, выберем произвольную вершину v графа Γ и замкнутый путь P, начинающийся и заканчивающийся в v.

Если P содержит все ребра графа Γ, то доказательство закончено. В противном случае удалим все ребра пути P и построим новый граф Γ'.

? Если граф Γ является связным и каждая его вершина имеет четную степень, то Γ – эйлеров.

Доказательство

- Этот новый граф Γ' может оказаться несвязным.

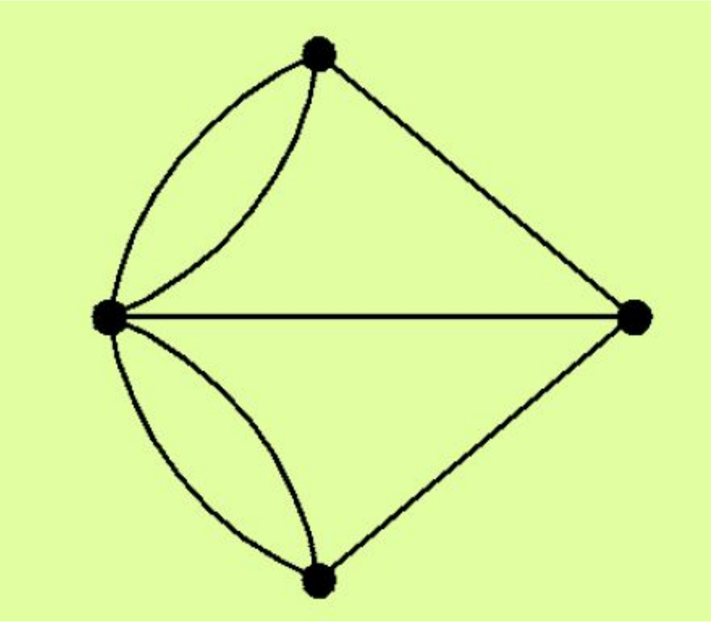
Рассмотрим каждую компоненту графа Γ' по очереди и воспользуемся индуктивным предположением для построения эйлеровых циклов в каждой компоненте.

Наконец, соединим P и эйлеровы циклы каждой компоненты графа Γ' в эйлеров цикл для графа Γ. ■

Эйлеровы графы

Жители Кенигсберга не могли найти свой эйлеров цикл по теперь весьма понятной для нас причине – его не существует.

Граф, представляющий задачу о кенигсбергских мостах, связен, но не удовлетворяет условию теоремы 1. Каждая его вершина



Эйлеровы графы

Пример 1

Полный граф K_n является $(n-1)$-регулярным – каждая вершина имеет степень $n-1$.

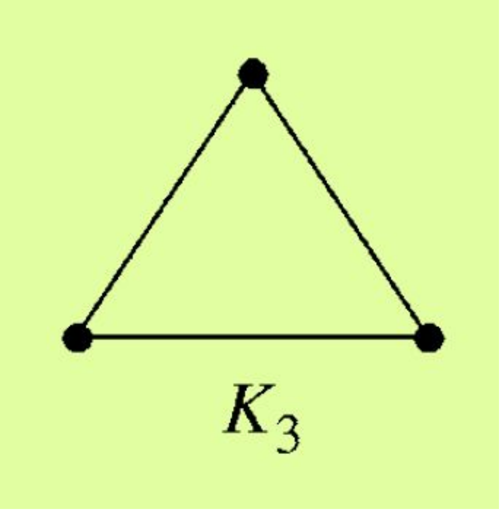
Так как он связен, то K_n является эйлеровым тогда и только тогда, когда n – нечетное число (так что $n-1$ – четное число).

Эйлеровы графы

Пример 1

K_n – эйлеров граф тогда и только тогда, когда n – нечетное число (так что $n-1$ четно).

Граф K_3 имеет очевидный эйлеров цикл.



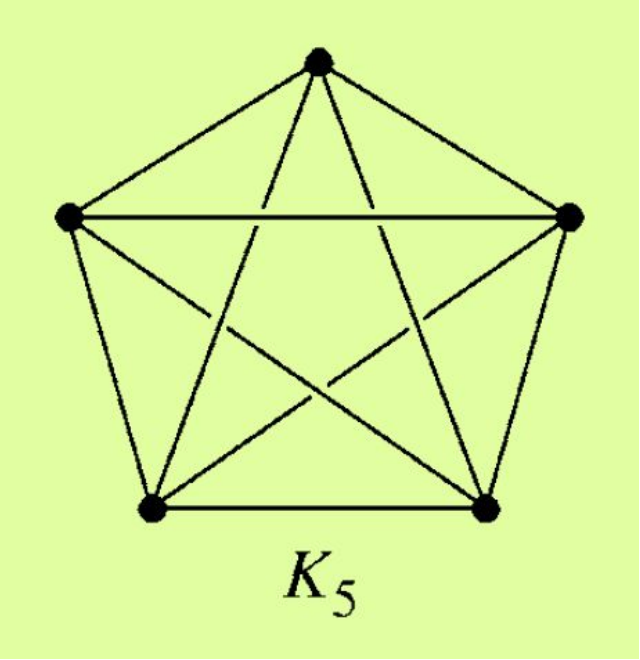
Эйлеровы графы

Пример 1

K_n – эйлеров граф тогда и только тогда, когда n – нечетное число (так что $n-1$ четно).

Найдите эйлеров цикл в K_5.

В действительности, K_5 имеет 264 эйлеровых цикла.



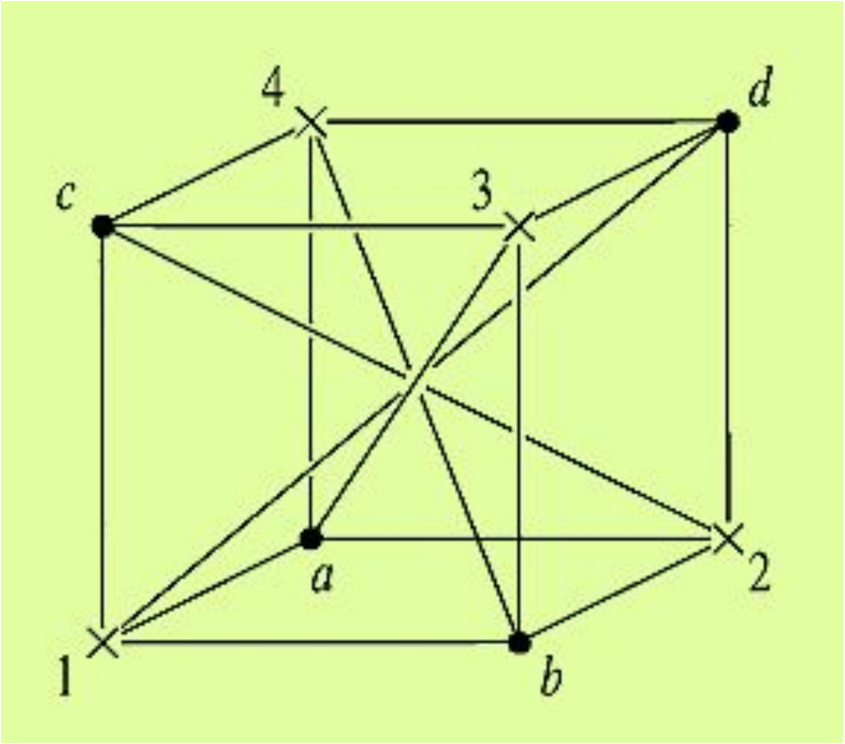
Эйлеровы графы

- Полный двудольный граф $K_{4,4}$ изображен на рисунке.

Множество его вершин разбито на два подмножества {1, 2, 3, 4} и {a, b, c, d}.

$K_{4,4}$ связен и каждая вершина имеет степень 4.

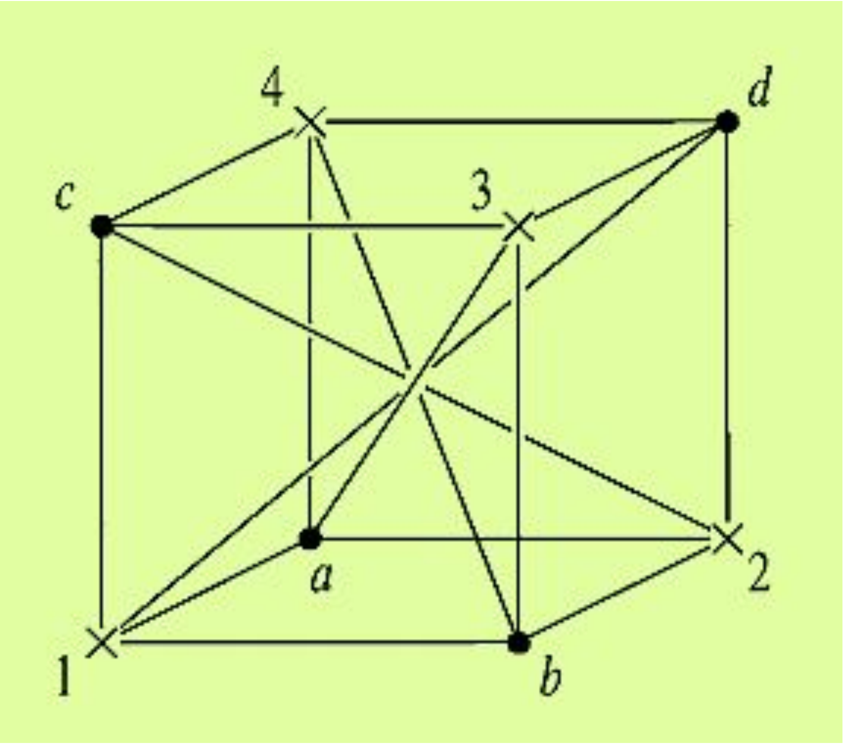
Значит, по теореме 1 $K_{4,4}$ эйлеров.



Эйлеровы графы

-

Один эйлеров цикл, начинающийся в вершине 1, имеет такую последовательность вершин:
$1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 1, c, 2, d, 3, a, 4, b, 1$.



Гамильтоновы графы

Эйлеров цикл проходит через каждое ребро графа (один раз) и возвращается в начальную точку пути.

Сформулируем аналогичную задачу: можем ли мы побывать в каждой вершине графа один раз, проходя по каждому ребру не более одного раза, и вернуться в начальную точку пути.

Этой задачей занимался Гамильтон (хотя он был не первым ее исследователем) и сегодня его имя ассоциируется с путями указанного типа.

Гамильтоновы графы

Определение 2

Гамильтонов цикл в графе – это цикл, который проходит через каждую вершину графа один раз.

Граф называется **гамильтоновым**, если он имеет гамильтонов цикл.

Этой терминологией мы обязаны игре, изобретенной в 1857 ирландским математиком Сэром Уильямом Роуэном Гамильтоном.

Гамильтоновы графы

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805 – 1865) был выдающимся ирландским математиком. Закончив университет, в возрасте 22 лет он был избран профессором астрономии и Королевским Астрономом Ирландии.

Однако, его вклад в астрономию невелик; его наиболее значительные результаты относятся к математике и физике.

Гамильтоновы графы

В 1843 он открыл кватернионы – одну из разновидностей обобщения комплексных чисел – и большую часть своей жизни он посвятил их изучению. Его имя также ассоциируется с гамильтоновым оператором энергии, используемым в физике (в частности, в волновой механике).

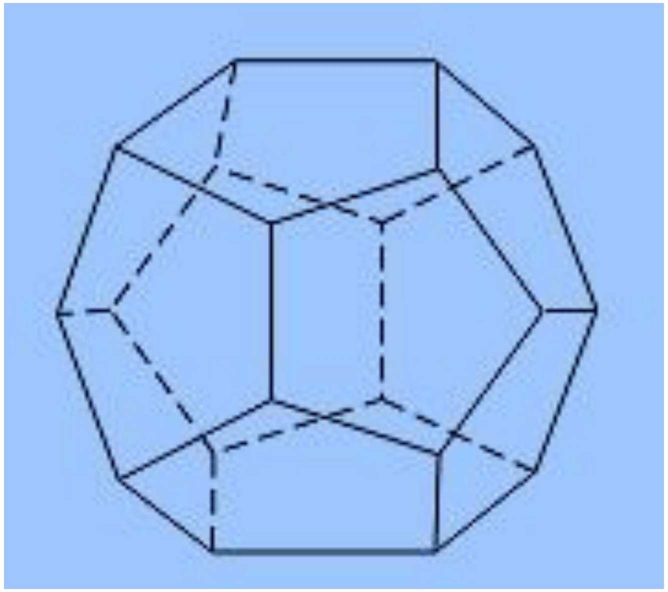
Гамильтоновы графы

Итак, в 1857 году Уильям Роуэн Гамильтон придумал игру.

Существует несколько версий того, как это произошло. По одной из версий он описал эту игру в письме к другу. Согласно другой, он действительно изобрел игру и продал ее производителю игрушек.

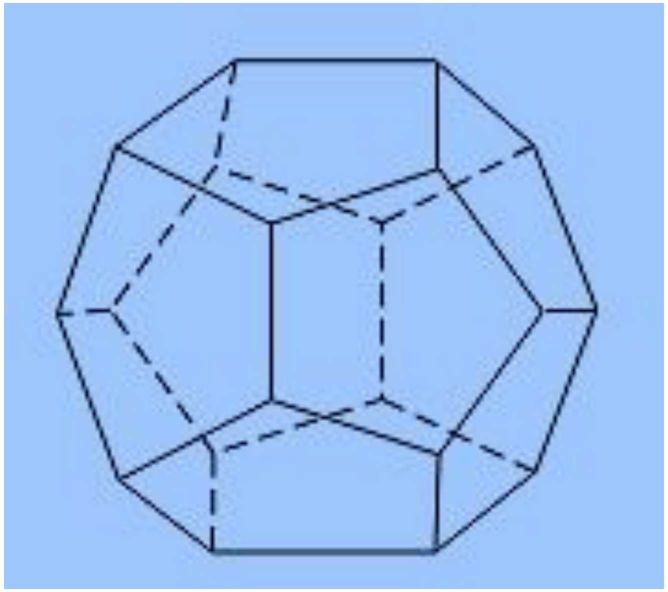
Гамильтоновы графы

В любом случае игра, по-видимому, включала додекаэдр, т.е. правильный многогранник, 12 граней которого представляли собой конгруэнтные правильные пятиугольники. В каждом из 20 углов, или вершин тела, просверливалась дырка, в которую вставлялся колышек, изображавший город.



Гамильтоновы графы

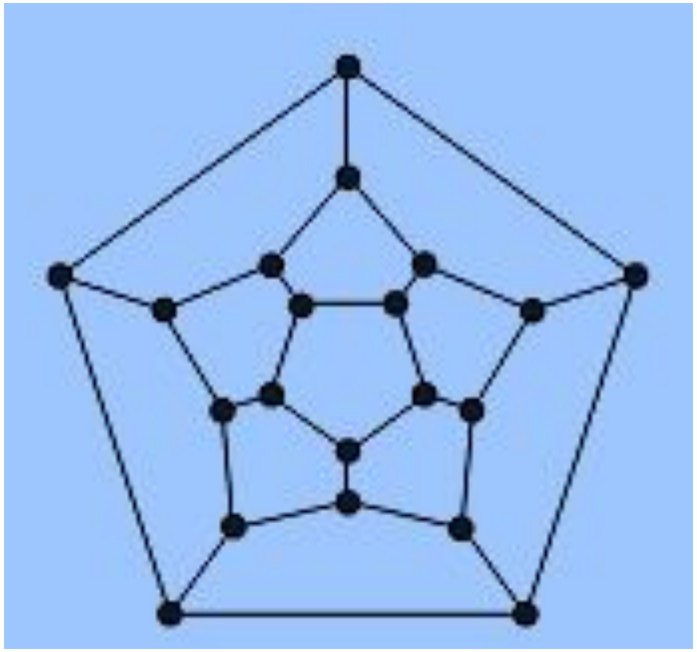
Используя веревку, требовалось найти путь через города, посетив каждый город один раз, и вернуться в исходный город.



Гамильтоновы графы

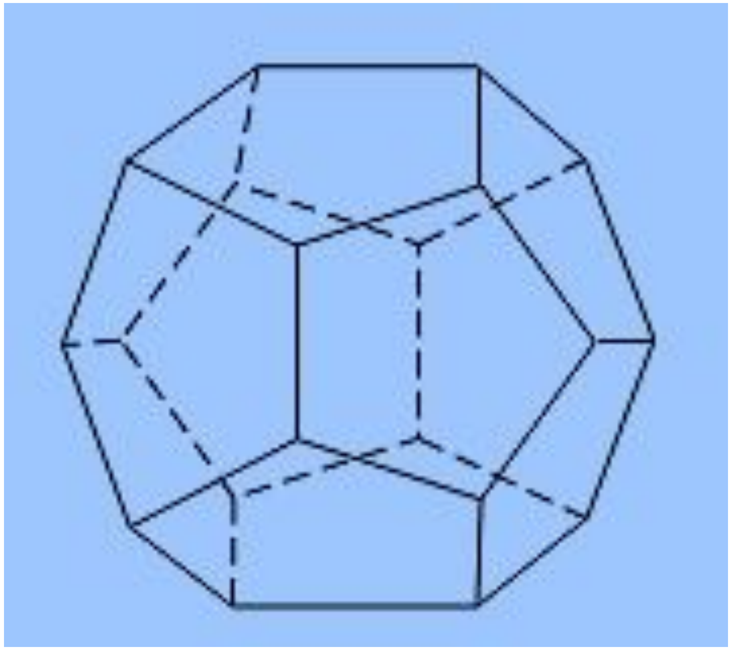
Рассмотрим эквивалентный вопрос.

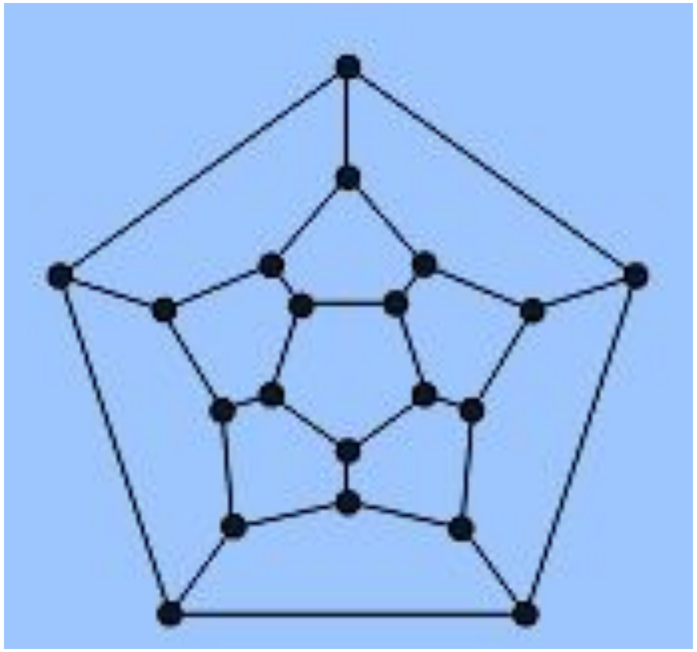
Существует ли цикл в графе, изображенном на рисунке, который проходит через каждую вершину графа ровно один раз?



Гамильтоновы графы

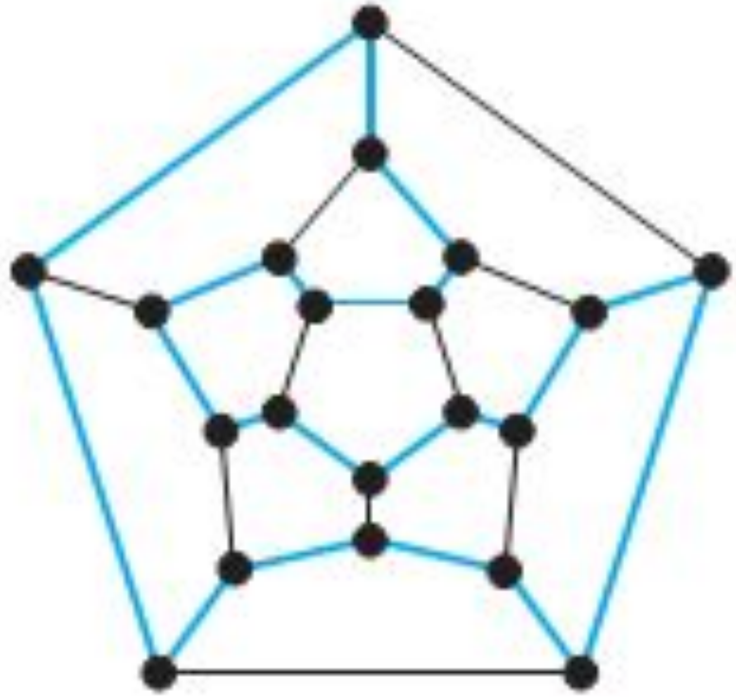
Ответ на последний вопрос решает головоломку Гамильтона, так как построенный граф изоморфен графу, составленному из вершин и ребер додекаэдра.





Гамильтоновы графы

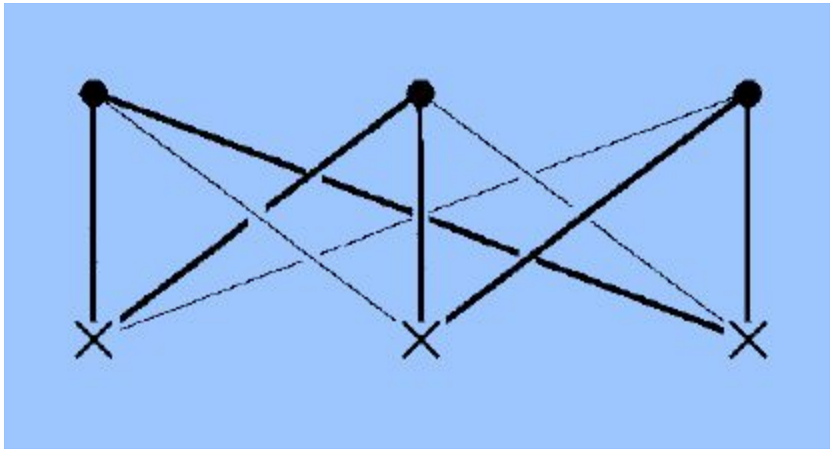
Решение головоломки Гамильтона показано на рисунке.



Гамильтоновы графы

- **Пример 1**

На рисунке изображен гамильтонов цикл в полном двудольном графе $K_{3,3}$.



Гамильтоновы графы

Для эйлеровых графов имеется достаточно простой критерий. Однако, не так обстоят дела с гамильтоновыми графами.

Действительно, изучая последние графы более столетия, математики до сих пор не нашли критерия гамильтоновости графов.

(Под ‘критерием’ гамильтоновости графа мы понимаем необходимое и достаточное условия того, что граф является гамильтоновым.)

Гамильтоновы графы

Эта задача остается одной из основных нерешенных проблем теории графов.

Очевидным **необходимым** условием гамильтоновости графа является его связность.

Известны также и различные **достаточные** условия гамильтоновости графа.

Как правило, в **достаточных** условиях гамильтоновости графа требуется, чтобы граф имел ‘достаточно’ ребер в определенном смысле этого слова.

Гамильтоновы графы

- Приведем один из простейших результатов такого сорта.

Теорема 1

Если Γ – связный простой граф с n (≥ 3) вершинами и если степень каждой вершины v удовлетворяет неравенству

$$deg(v) \geq \frac{1}{2}n,$$

то Γ – гамильтонов граф.

Гамильтоновы графы

Теорема 1

Если Γ – связный простой граф с n (≥ 3) вершинами и если степень каждой вершины v удовлетворяет неравенству $deg(v) \geq \frac{1}{2}n$, то Γ – гамильтонов граф.

Условие, накладываемое на степени вершин: $deg(v) \geq \frac{1}{2}n$, – не является необходимым условием гамильтоновости графа Γ. Граф может быть гамильтоновым и без выполнения этого условия.

Гамильтоновы графы

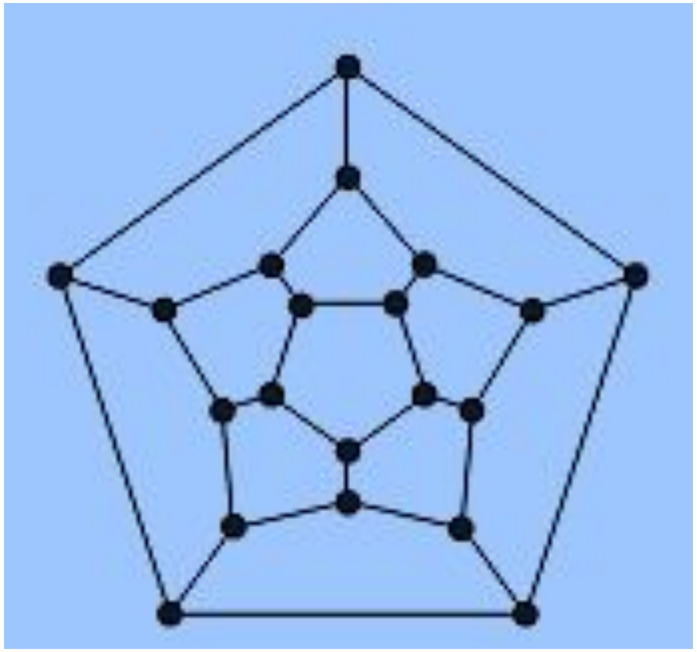
- Убедимся в этом, обратившись к графу додекаэдра.

Этот граф имеет 20 вершин, степень каждой вершины равна 3 $(3 < 10)$, однако, граф – гамильтонов.

Теорема 1
Если Γ – связный простой граф с n (≥ 3) вершинами и если степень каждой вершины v удовлетворяет неравенству

$$deg(v) \geq \frac{1}{2}n,$$

то Γ – гамильтонов граф.



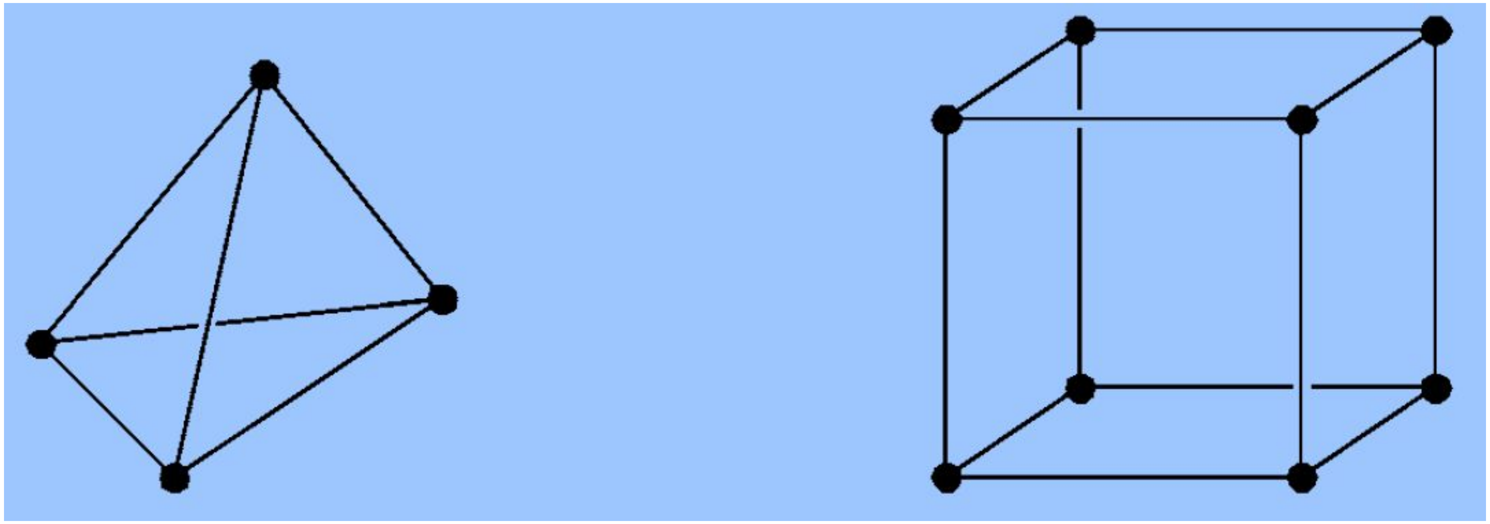
Гамильтоновы графы

В действительности, каждый из графов, связанных с пятью правильными многогранниками, имеет гамильтонов цикл.

Гамильтоновы графы

Задача 1

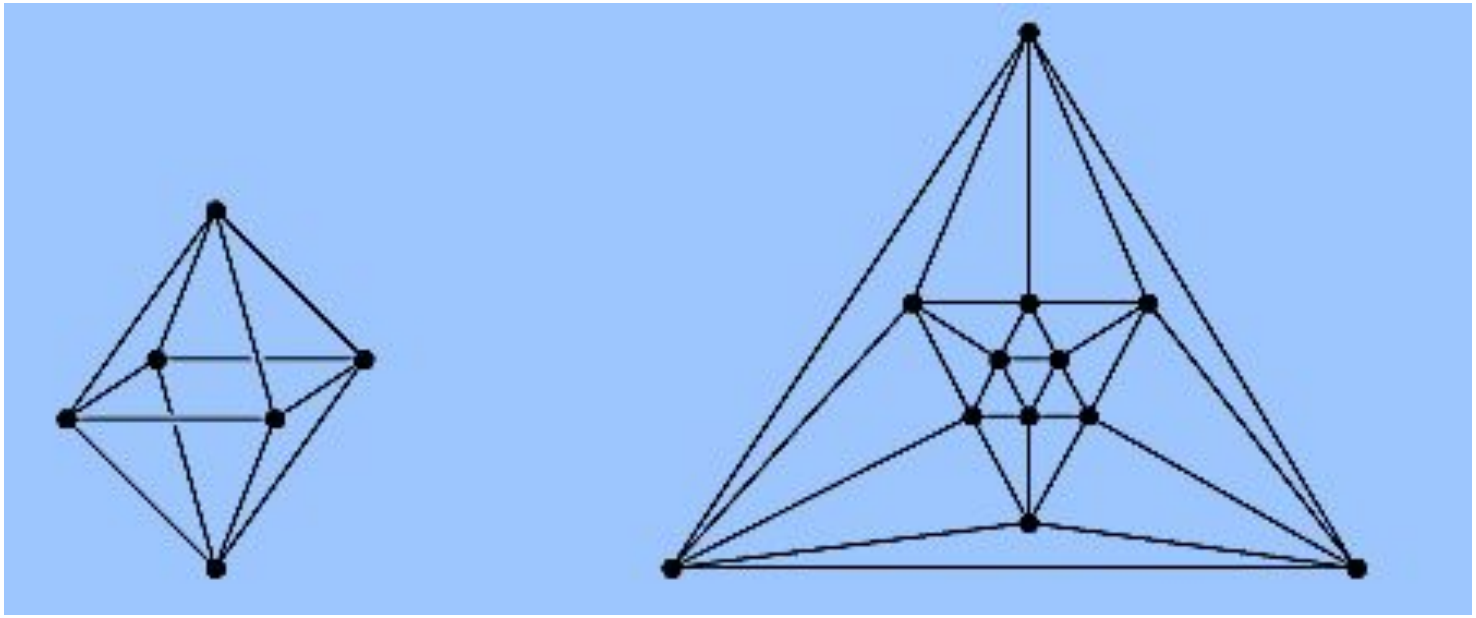
Покажите, что каждый из графов, изображенных на рисунке и связанных с правильными многогранниками (тетраэдр K_4 – слева и куб – справа) является гамильтоновым.



Гамильтоновы графы

Задача 1

Покажите, что каждый из графов, изображенных на рисунке и связанных с правильными многогранниками (октаэдр – слева и икосаэдр – справа) является гамильтоновым.



Изоморфизм графов

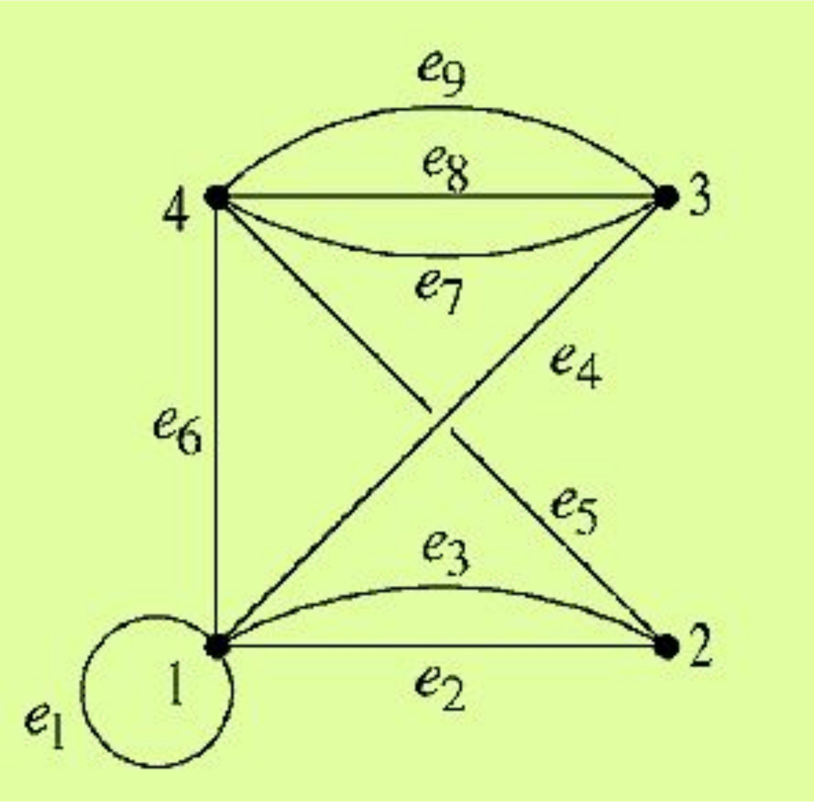
- Рассмотрим два графа Γ и Σ, определенные следующим образом: Γ имеет множество вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ и матрицу смежности A, и Σ имеет множество вершин $\{a, b, c, d\}$ и матрицу смежности B, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Изоморфизм графов

- F имеет множество вершин {1, 2, 3, 4} и матрицу смежности

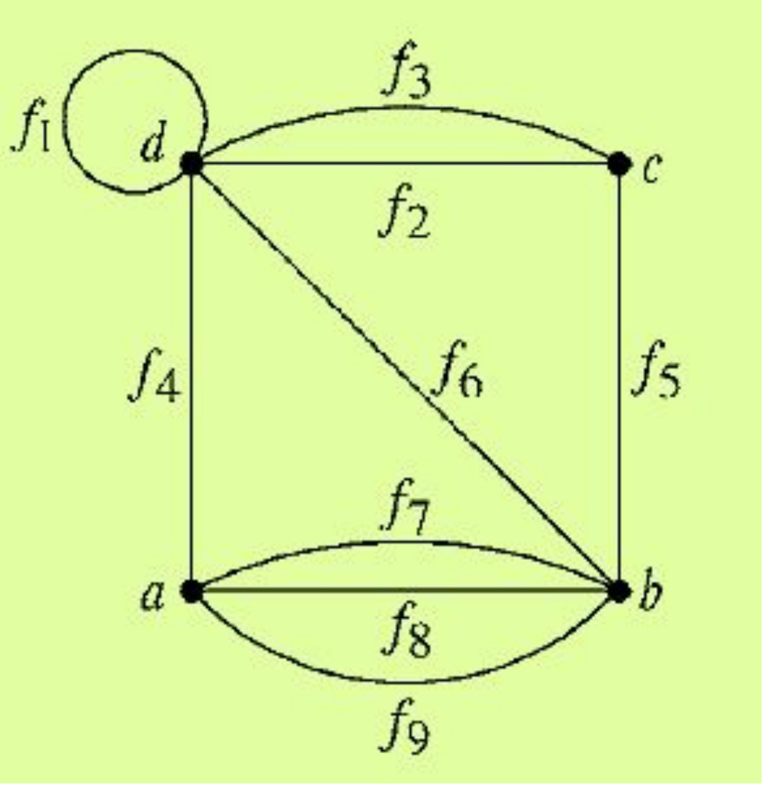
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$



Изоморфизм графов

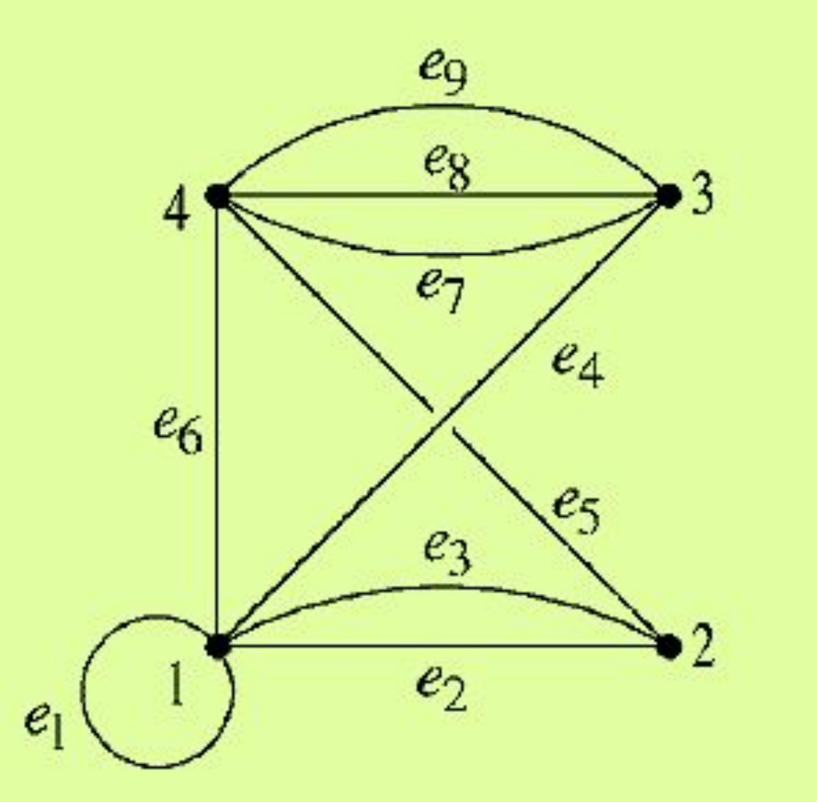
- имеет множество вершин $\{a, b, c, d\}$ и матрицу смежности

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

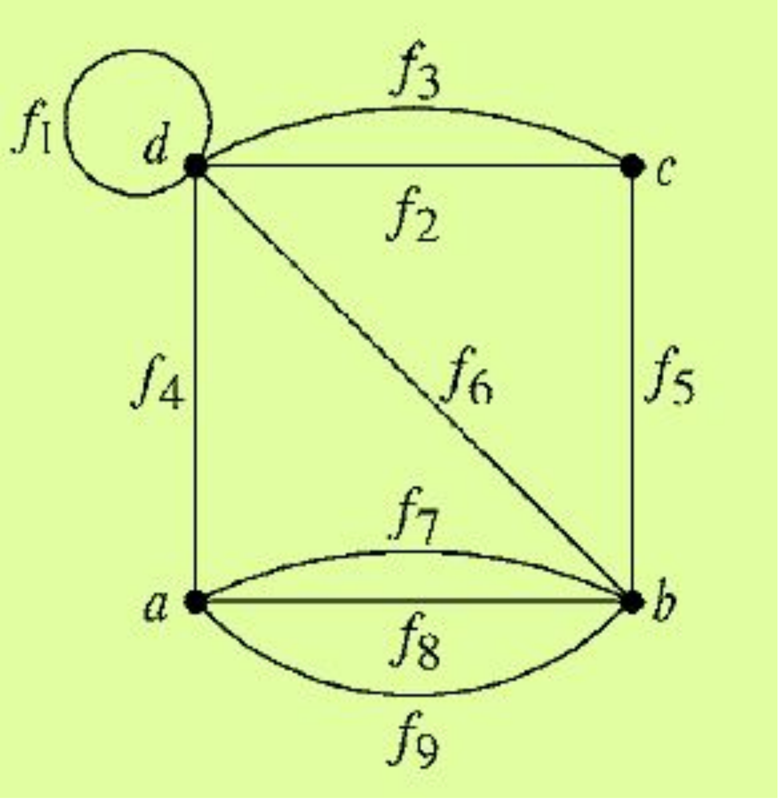


После недолгих раздумий становится очевидным, что графы Γ и Σ по существу одинаковы.

Граф Γ

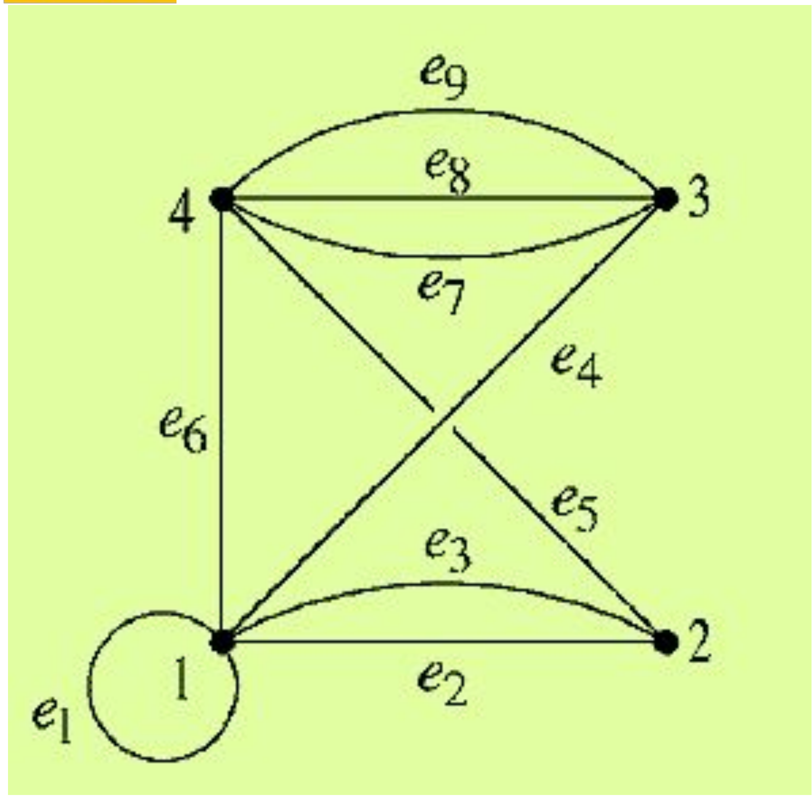


Граф Σ

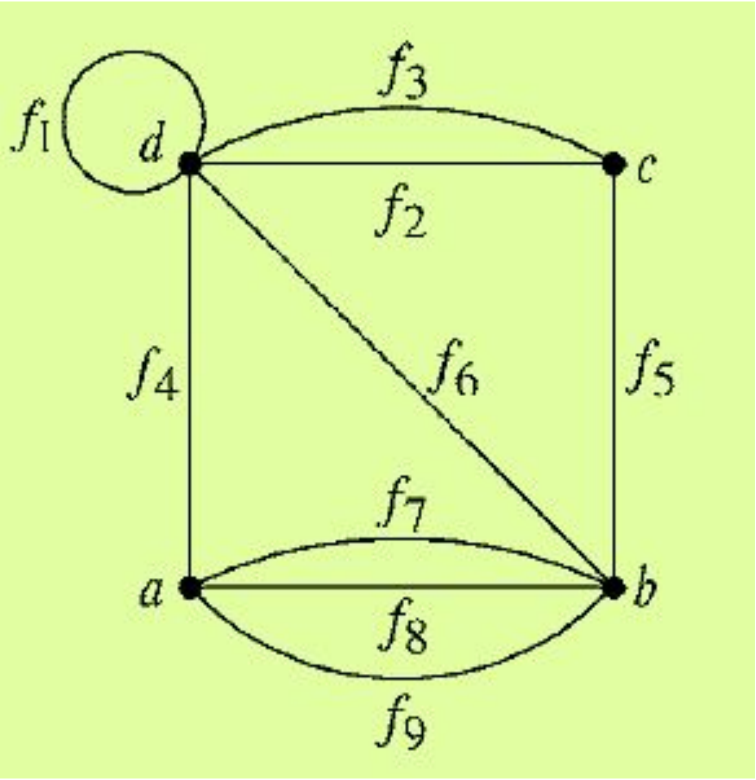


Если мы переименуем вершины a, b, c, d графа Σ как $3, 4, 2, 1$, в указанном порядке, и переименуем ребра f_i как e_i for $i = 1, \dots, 8$, то эти две диаграммы будут различными графическими представлениями одного и того же графа.

Граф Γ



Граф Σ



Изоморфизм графов

Определение 1

Пусть Γ и Σ – два графа. **Изоморфизм** из Γ в Σ состоит из пары (θ, φ) биекций

$$\theta: V_\Gamma \to V_\Sigma \text{ и } \varphi: E_\Gamma \to E_\Sigma$$

таких, что для каждого ребра e графа Γ, если $\delta_\Gamma(e) = \{v, w\}$, то $\delta_\Sigma\big(\varphi(e)\big) = \{\theta(v), \theta(w)\}$.

Два графа называют **изоморфными** и пишут $\Gamma \cong \Sigma$, если существует изоморфизм из одного графа на другой.

Изоморфизм графов

- Условие

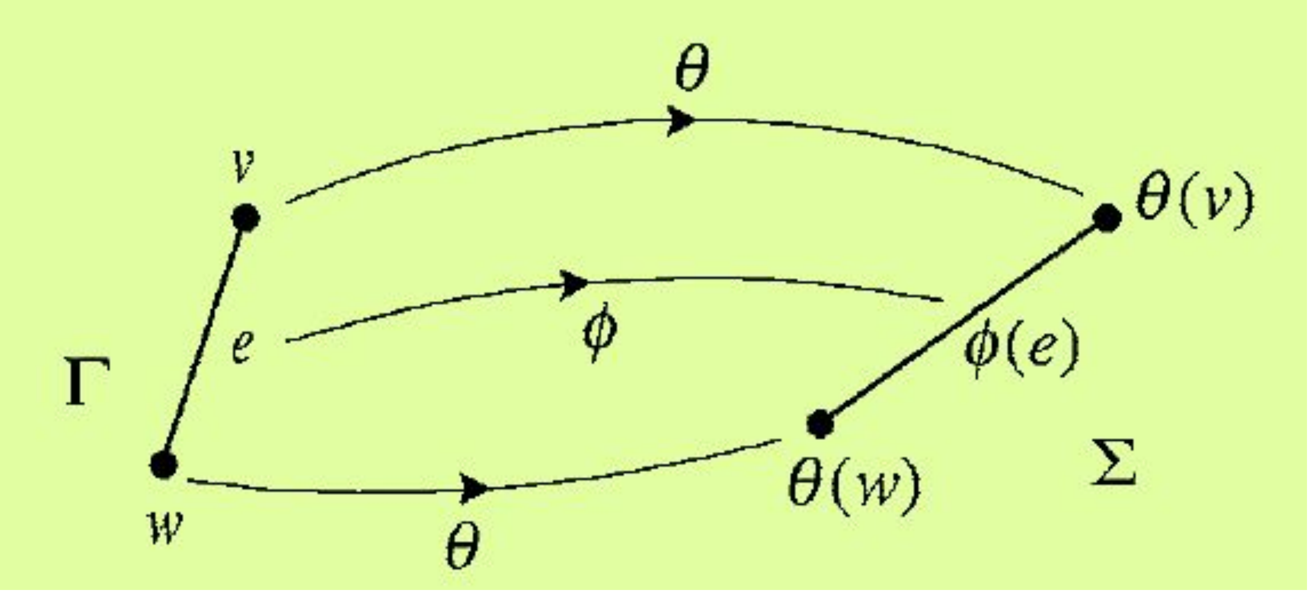
если $\boldsymbol{\delta_{\Gamma}(e) = \{v, w\}}$, то $\boldsymbol{\delta_{\Sigma}\big(\varphi(e)\big) = \{\theta(v), \theta(w)\}}$

гарантирует, что биекции между множествами вершин и множествами ребер двух графов корректно согласованы друг с другом.

Другими словами, если ребро e графа Γ соответствует ребру $\varphi(e)$ графа Σ, то множества вершин, инцидентные этим ребрам, также соответствуют друг другу (относительно биекции θ).

Изоморфизм графов

- Если ребро e графа Γ соответствует ребру $\varphi(e)$ графа Σ, то множества вершин, инцидентные этим ребрам, также соответствуют друг другу (относительно биекции θ). Это показано на рисунке.



Изоморфизм графов

- Пусть $E(v,w)$ обозначает множество ребер, соединяющих вершины v и w в графе Γ, тогда реберное отображение φ определяет биекцию

$$E(v,w) \to E(\theta(v),\theta(w)).$$

Поэтому для всех пар вершин v, w графа Γ,

$$|E(v,w)| = |E(\theta(v),\theta(w))|,$$

т.е. число ребер графа Γ, соединяющих v и w, равно числу ребер графа Σ, соединяющих соответствующие им вершины $\theta(v)$ и $\theta(w)$.

Изоморфизм графов

- Пусть Γ – простой граф. Чтобы определить изоморфизм из Γ в Σ, нам нужно только корректно специфицировать биекцию

$$\theta\colon V_\Gamma \to V_\Sigma \ .$$

Действительно, любую пару вершин соединяет не более одного ребра. Поэтому, если биекция θ (корректно) определена, то существует единственная функция

$$\varphi\colon E_\Gamma \to E_\Sigma,$$

удовлетворяющая требуемым свойствам.

Изоморфизм графов

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности.

Изоморфизм графов

Так как изоморфные графы имеют, по существу, одно и тоже строение, то любое теоретико-графовое свойство, которым обладает один граф, должно быть присуще и второму графу.

Мы перечислим некоторые такие свойства в следующей теореме.

Изоморфизм графов

Теорема 1

Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ на Σ, тогда:

a) Γ и Σ имеют одинаковое число вершин;
b) Γ и Σ имеют одинаковое число ребер;
c) Γ и Σ имеют одинаковое число компонент;
d) Соответствующие вершины имеют одинаковые степени: для любой $v \in V_{\Gamma}$, $\deg(v) = \deg(\theta(v))$;
e) Γ и Σ имеют одинаковые степенные последовательности;
f) если Γ является простым, то Σ – также простой;
g) если Γ является эйлеровым, то Σ – также эйлеров;
h) если Γ является гамильтоновым, то Σ – также гамильтонов.

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ, тогда Γ и Σ имеют одинаковое число вершин.

Доказательство

- Изоморфизм из Γ в Σ состоит из пары (θ, φ) биекций

$$\theta: V_\Gamma \to V_\Sigma \text{ и } \varphi: E_\Gamma \to E_\Sigma$$

таких, что для каждого ребра e графа Γ, если $\delta_\Gamma(e) = \{v, w\}$, то $\delta_\Sigma(\varphi(e)) = \{\theta(v), \theta(w)\}$.

Если $f: A \to B$ – биекция, где A и B – конечные множества, то $|A| = |B|$.

Таким образом, $|V_\Gamma| = |V_\Sigma|$.■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ, тогда Γ и Σ имеют одинаковое число ребер.

Доказательство

- Изоморфизм из Γ в Σ состоит из пары (θ, φ) биекций

$$\theta : V_\Gamma \to V_\Sigma \text{ и } \varphi : E_\Gamma \to E_\Sigma$$

таких, что для каждого ребра e графа Γ, если $\delta_\Gamma(e) = \{v, w\}$, то $\delta_\Sigma\big(\varphi(e)\big) = \{\theta(v), \theta(w)\}$.

Если $f : A \to B$ – биекция, где A и B – конечные множества, то $|A| = |B|$.

Таким образом, $|E_\Gamma| = |E_\Sigma|$.■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ, тогда Γ и Σ имеют одинаковое число компонент.

Доказательство

- Если $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – путь, соединяющий v_1 и v_2 в Γ, то $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ – путь, соединяющий $\theta(v_1)$ и $\theta(v_2)$ в Σ.

Обратно, если $f_1, f_2, \ldots, f_m$ – путь, соединяющий w_1 и w_2 в Σ, то $\varphi^{-1}(f_1), \varphi^{-1}(f_2), \ldots, \varphi^{-1}(f_m)$ – путь в Γ, соединяющий $\theta^{-1}(w_1)$ и $\theta^{-1}(w_2)$.

Поэтому v_1 и v_2 принадлежат одной и той же компоненте графа Γ тогда и только тогда, когда $\theta(v_1)$ и $\theta(v_2)$ принадлежат одной и той же компоненте графа Σ.

Следовательно, Γ и Σ имеют одинаковое число компонент.■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ, тогда соответствующие вершины имеют одинаковые степени: для любой $v \in V_\Gamma$, $\deg(v) = \deg\big(\theta(v)\big)$.

Доказательство

- $$\deg(v) = \sum_{w \in V_\Gamma} |E(v, w)|$$

и

$$\deg\big(\theta(v)\big) = \sum_{w' \in V_\Sigma} |E(\theta(v), w')|.$$

Осталось заметить, что $\theta -$ биекция и отображение φ определяет биекцию $E(v, w) \to E(\theta(v), \theta(w))$. ■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ, тогда Γ и Σ имеют одинаковые степенные последовательности.

Доказательство

Это утверждение следует из d). ■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ. Если Γ является простым, то Σ – также простой.

Доказательство

- Γ – простой граф тогда и только тогда, когда $|E(v, w)| \leq 1$ и $|E(v, v)| = 0$ для всех $v, w \in V_\Gamma$.

Результат следует из существования биекций $E(v, w) \to E(\theta(v), \theta(w))$. ■

? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ. Если Γ является эйлеровым, то Σ – также эйлеров.

Доказательство

- Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.

Но Γ и Σ имеют одинаковые степенные последовательности. ■

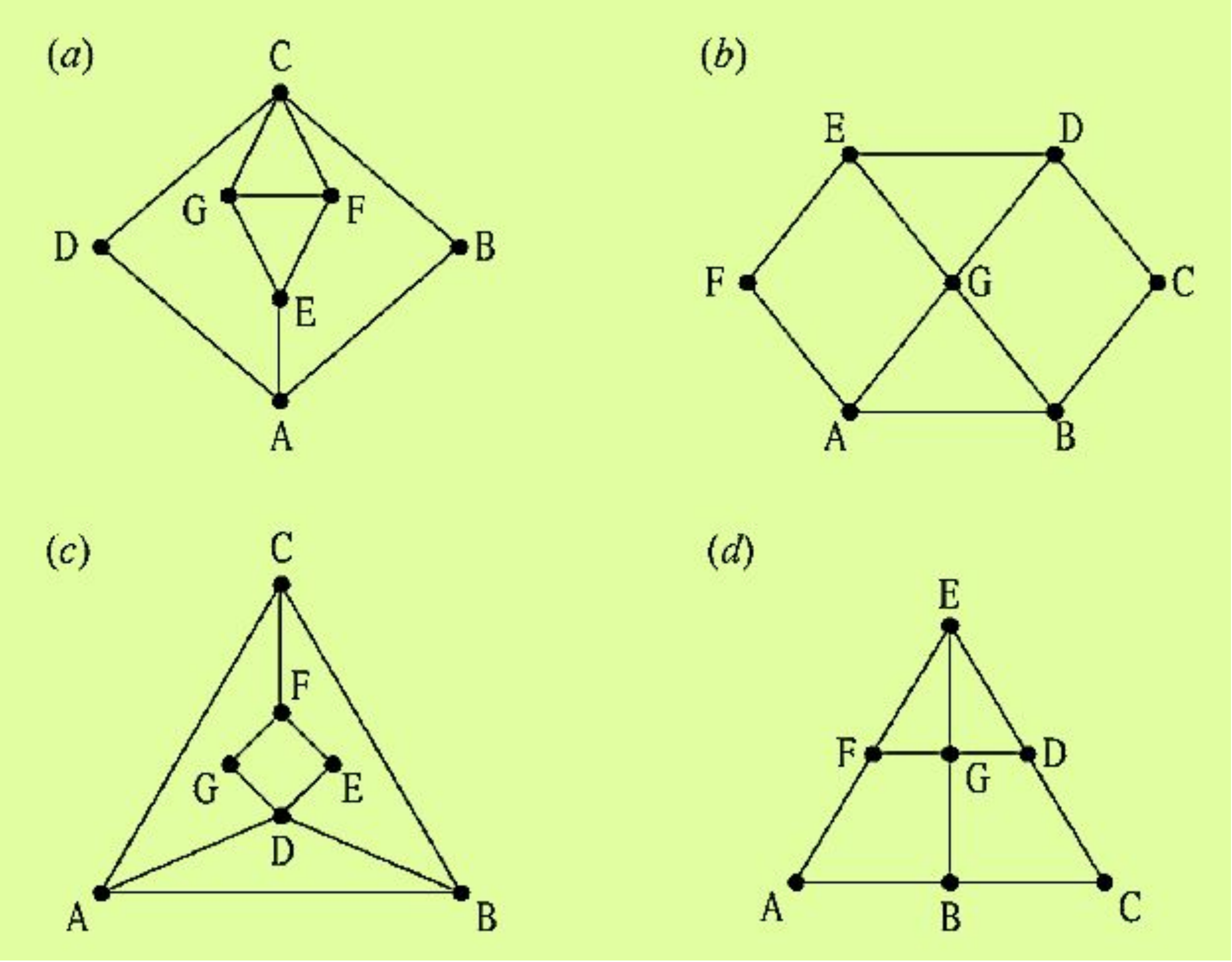
? Пусть (θ, φ) – изоморфизм из Γ в Σ. Если Γ является гамильтоновым, то Σ – также гамильтонов.

Доказательство

- Если e_1, e_2, …, e_n – гамильтонов цикл в Γ, то $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, …, $\varphi(e_n)$ – гамильтонов цикл в Σ. ■

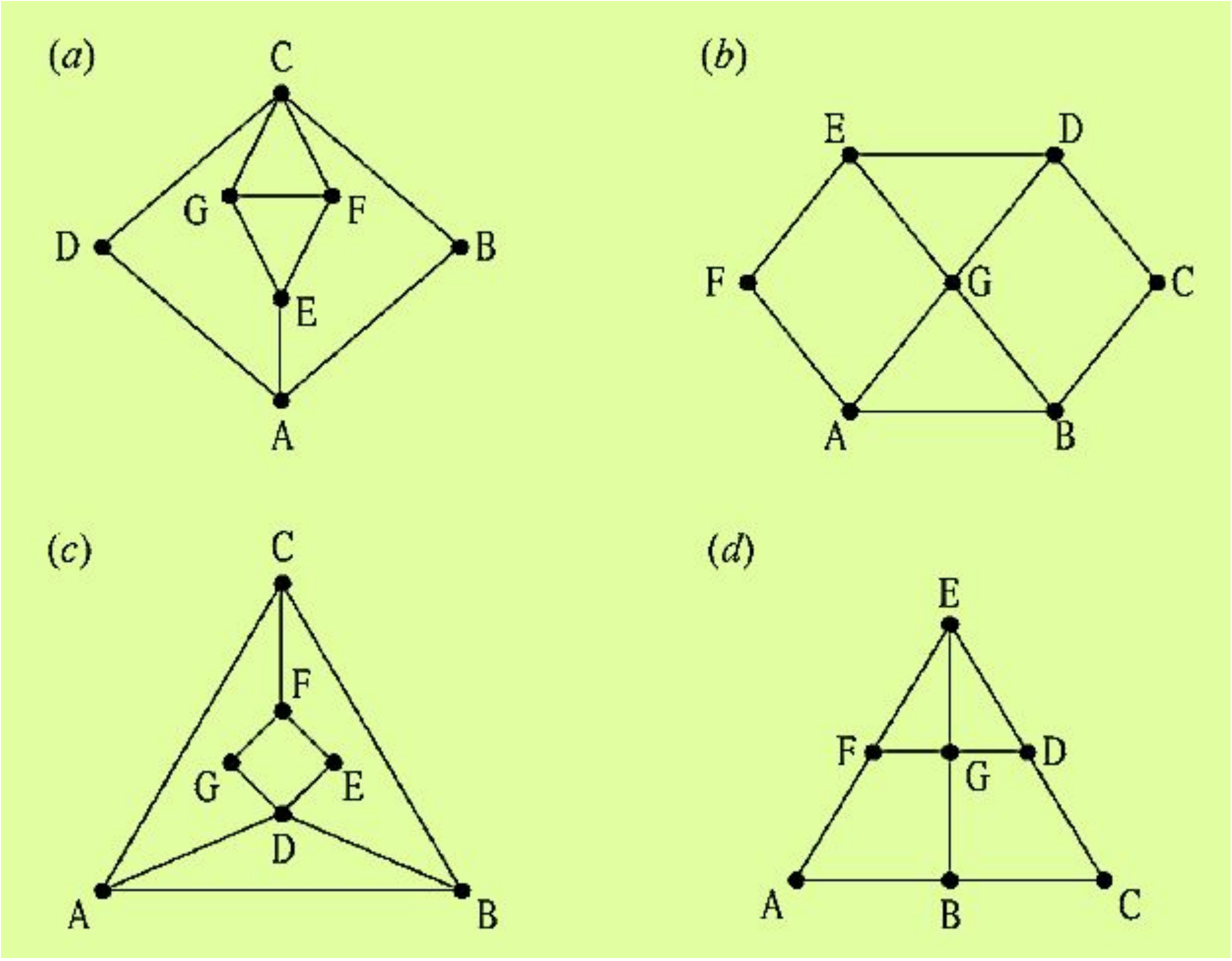
Изоморфизм графов

Пример Определим, какие из приведенных ниже графов являются изоморфными.



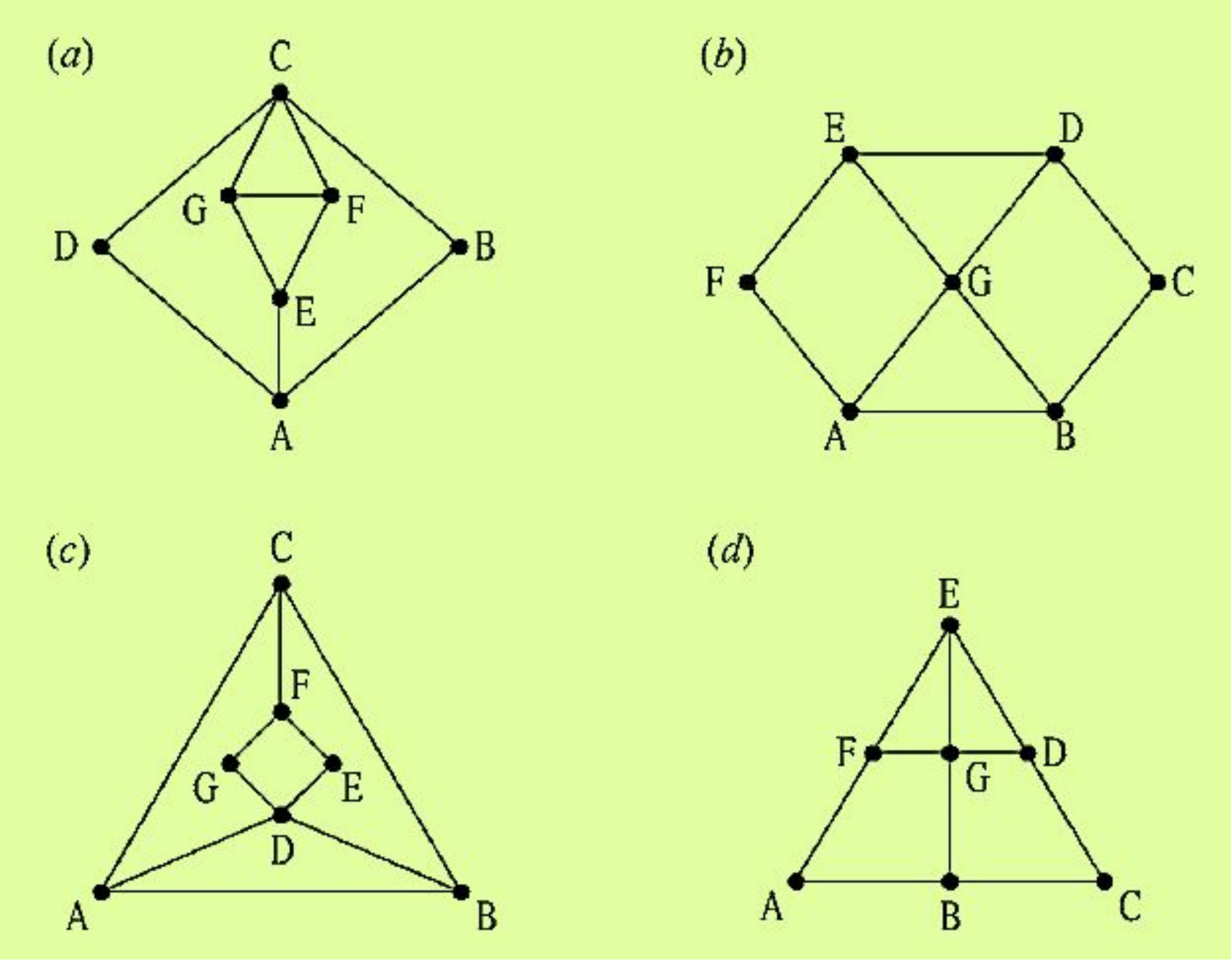
Пример Определим, какие из приведенных ниже графов являются изоморфными.

Каждый граф является простым, связным, имеет семь вершин и десять ребер.

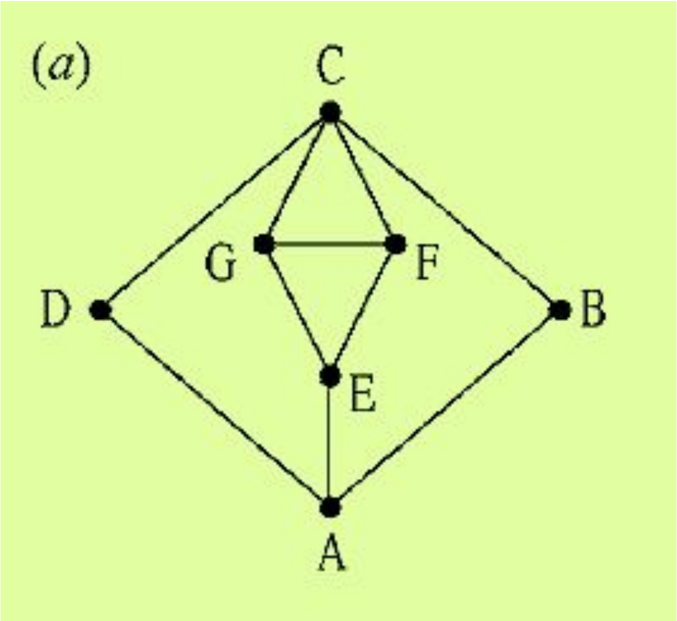


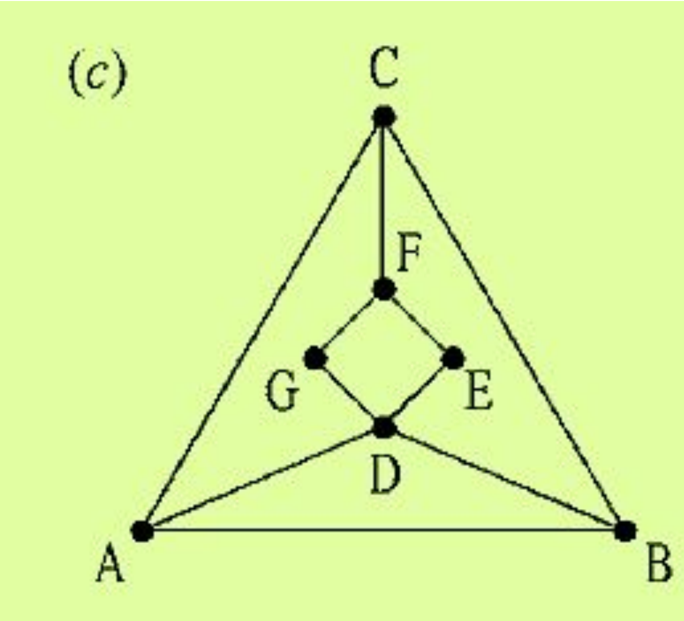
Пример Определим, какие из приведенных ниже графов являются изоморфными.

- Каждый граф имеет степенную последовательность $(2,2,3,3,3,3,4)$, каждый граф не эйлеров.



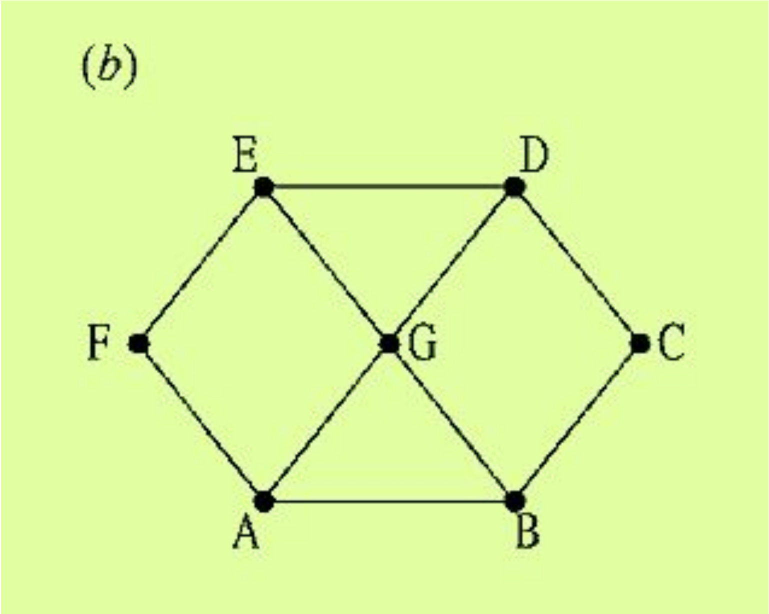
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

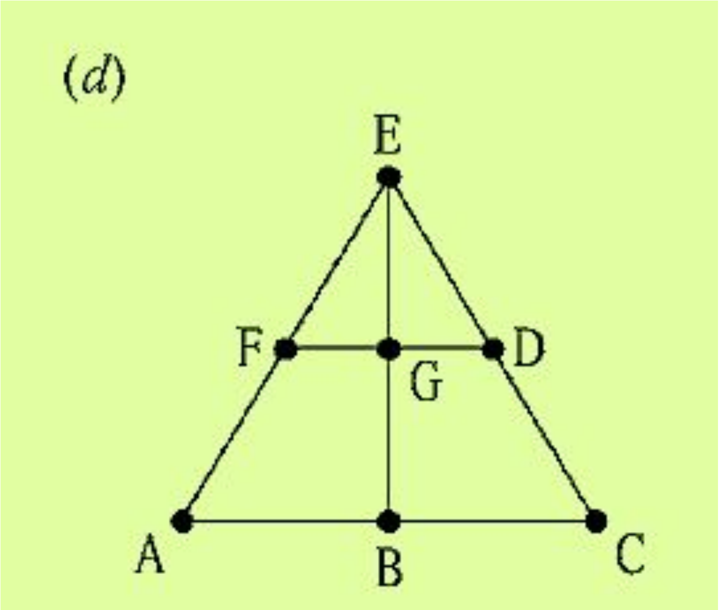
- 



Рассматривая вершины степени 2, мы видим, что графы (a) и (c) не являются гамильтоновыми.

Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

- 



Графы (b) и (d) являются гамильтоновыми (с гамильтоновыми циклами $AGBCDEFA$ и $ABCDGEFA$ соответственно).

Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

- Итак, графы (a) и (c) не являются гамильтоновыми.

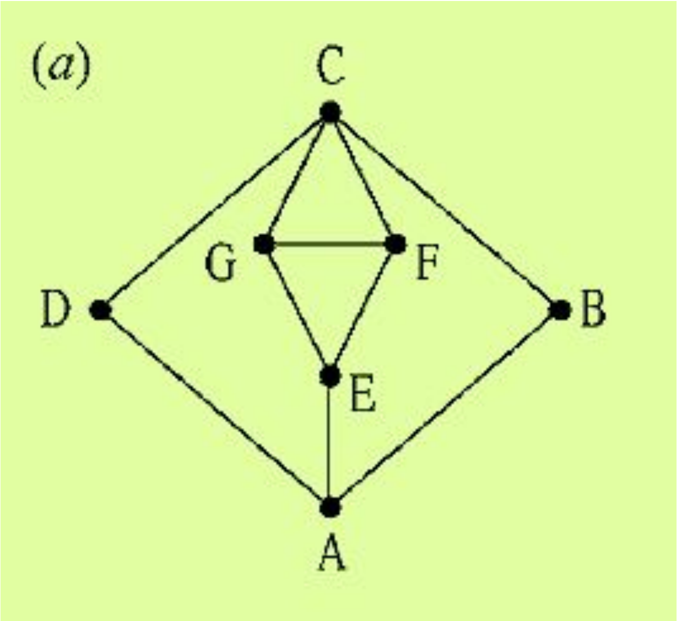
Графы (b) и (d) – гамильтоновы.

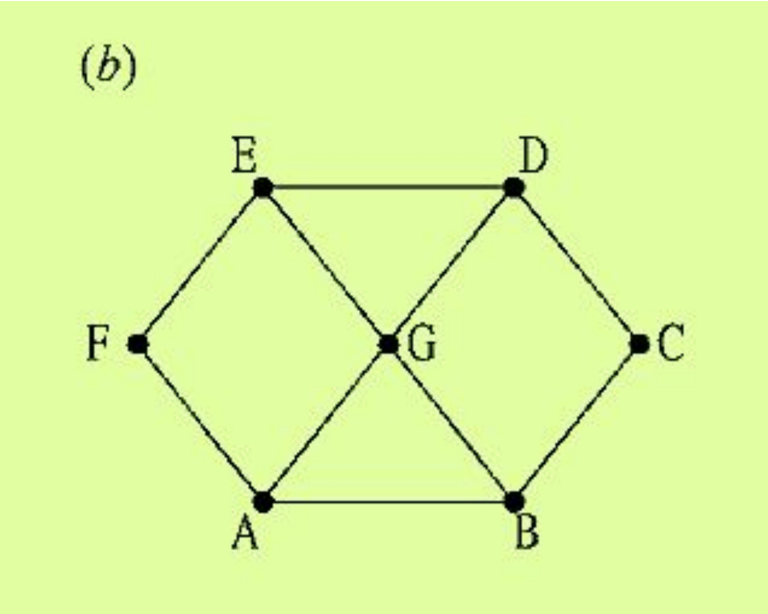
Отсюда следует, что ни граф (a), ни (c) не изоморфны графу (b) или графу (d).

Проверить, является ли произвольный граф не гамильтоновым, довольно сложно.

Поэтому можно предложить другое доказательство последних неизоморфностей.

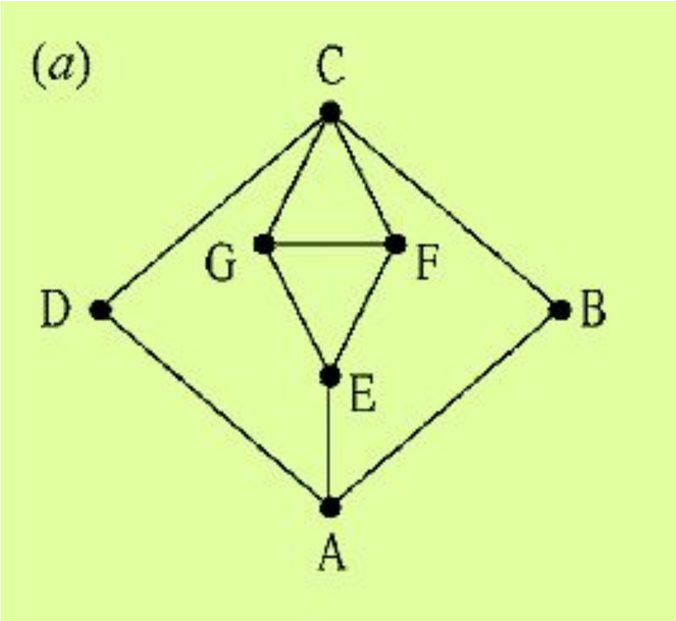
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

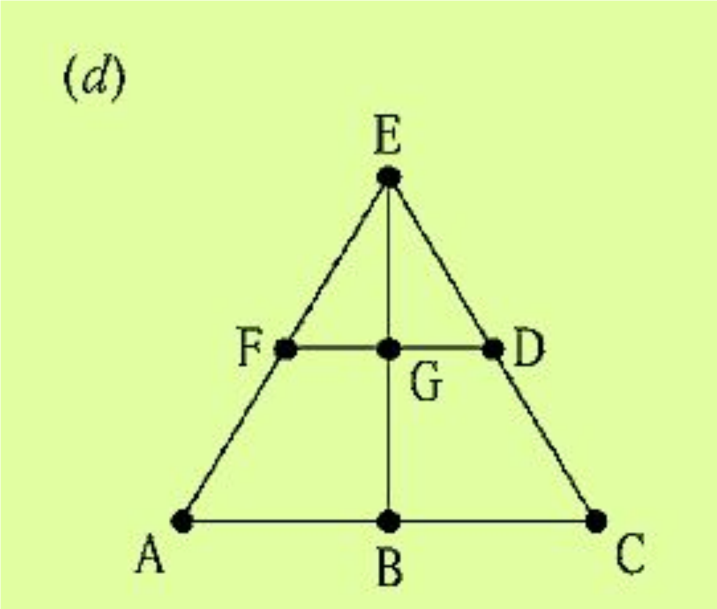
- 



Графы (a) и (b) не изоморфны: в графе (a) вершина степени 4 является смежной с двумя вершинами степени 3, а в графе (b) вершина степени 4 является смежной с четырьмя вершинами степени 3.

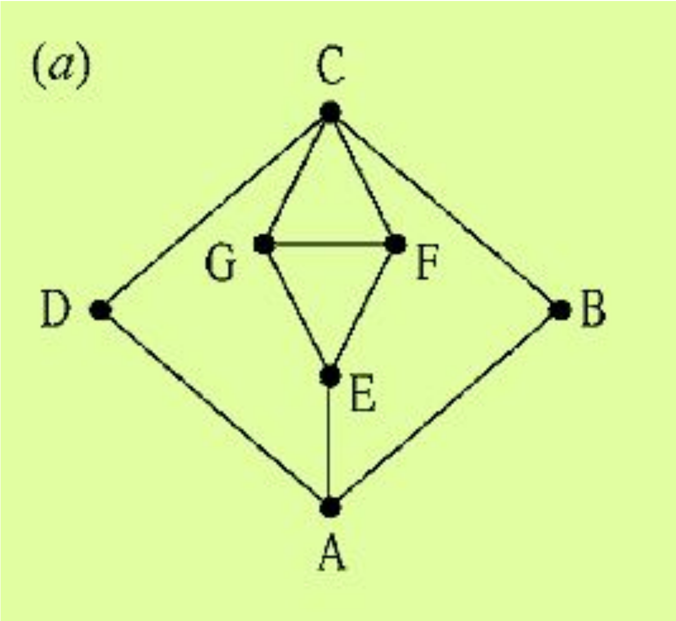
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

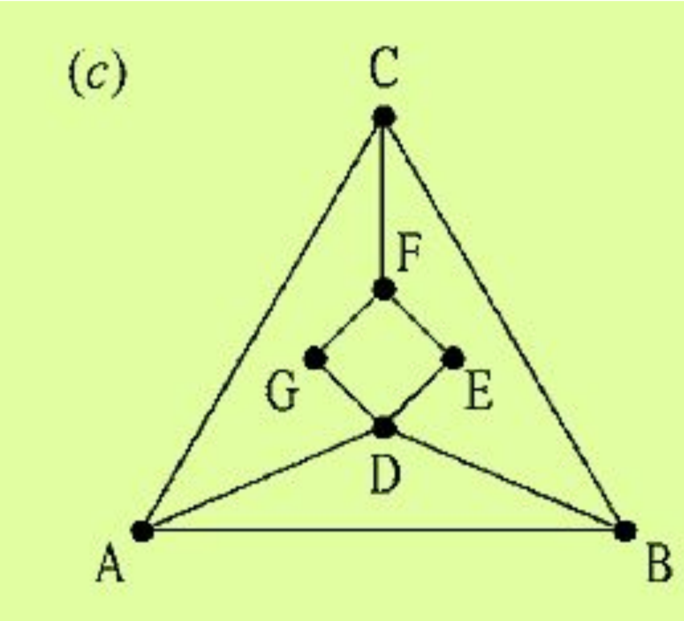




Графы (a) и (d) не изоморфны: в графе (a) вершина степени 4 является смежной с двумя вершинами степени 3, а в графе (d) вершина степени 4 является смежной с четырьмя вершинами степени 3.

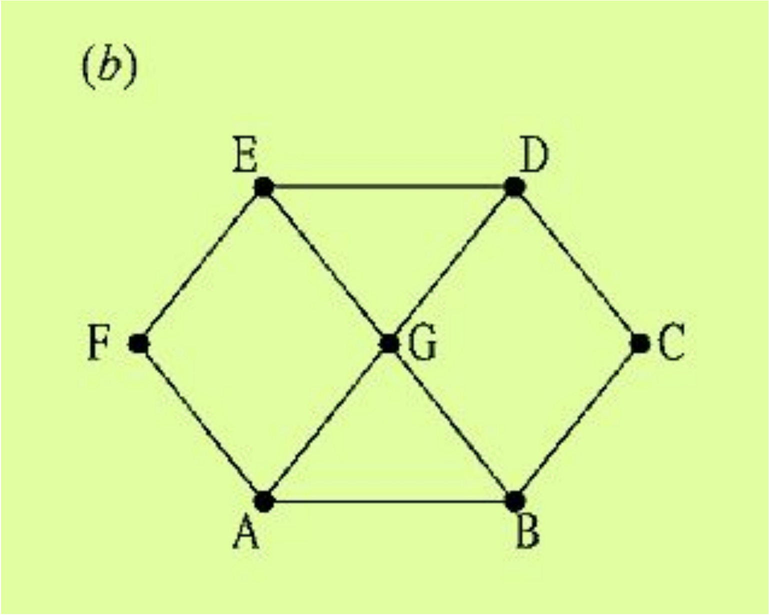
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

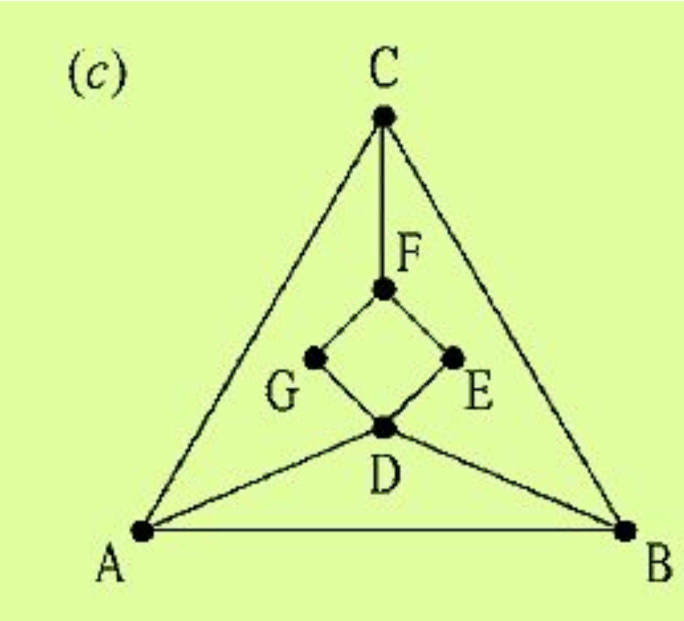
- 



Графы (a) и (c) изоморфны. Обозначим множества вершин графов (a) и (c) через V_1 и V_2, соответственно, и определим изоморфизм графов, задав биекцию $V_1 \to V_2$: $A \mapsto F, B \mapsto E, C \mapsto D, D \mapsto G, E \mapsto C, F \mapsto A, G \mapsto B$.

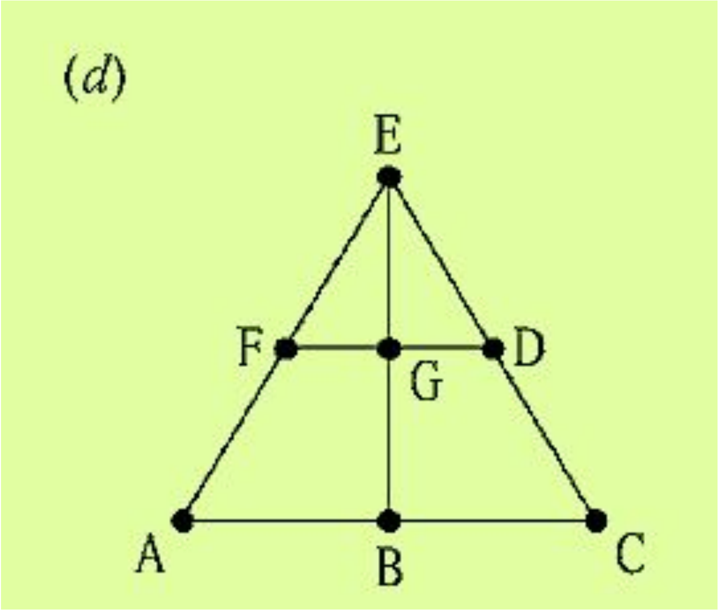
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

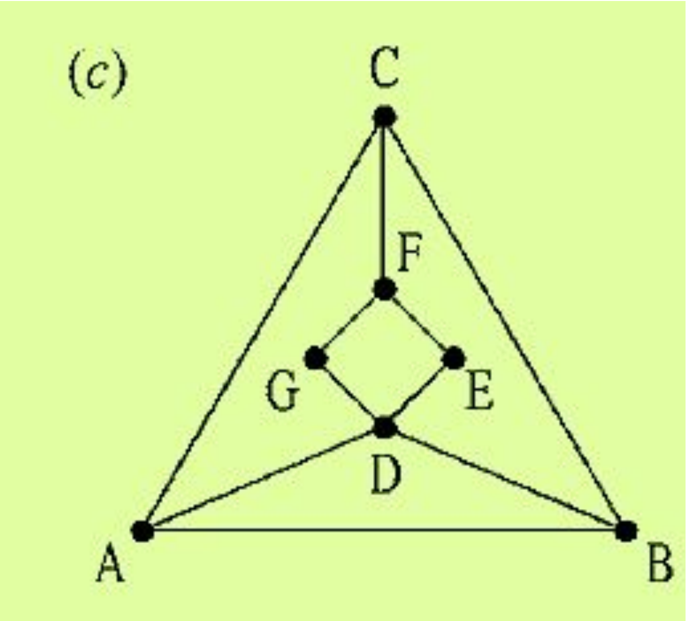
- 



Графы (b) и (c) неизоморфны, так как граф (c) изоморфен графу (a), а (b) – нет. Аналогично графы (d) и (c) неизоморфны.

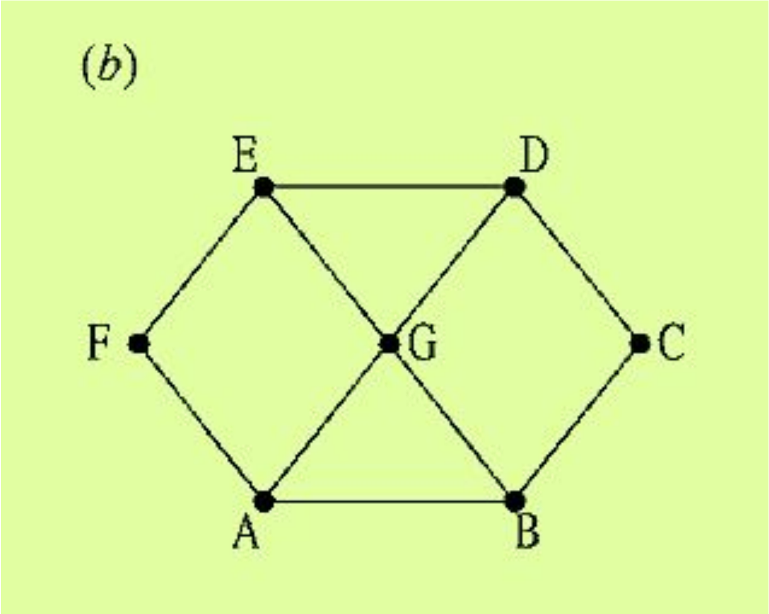
Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

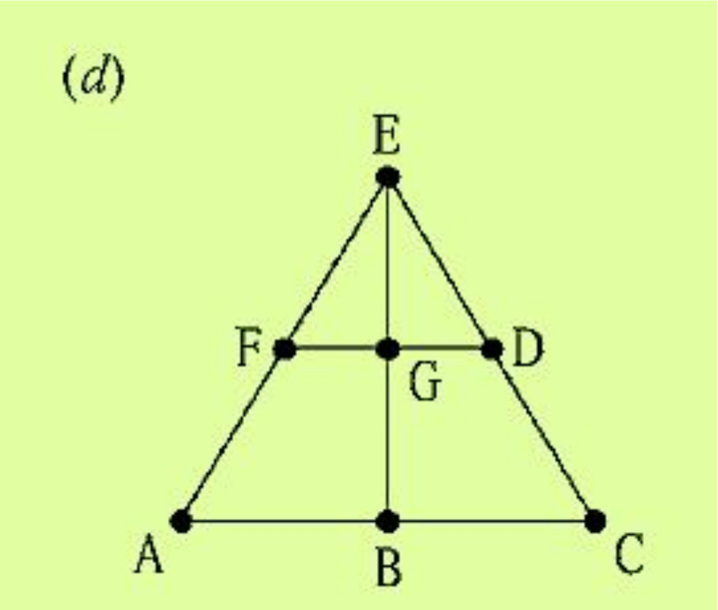
- 



Графы (d) и (c) неизоморфны, так как граф (c) изоморфен графу (a), а (d) – нет.

Пример Определим, какие из приведенных графов являются изоморфными.

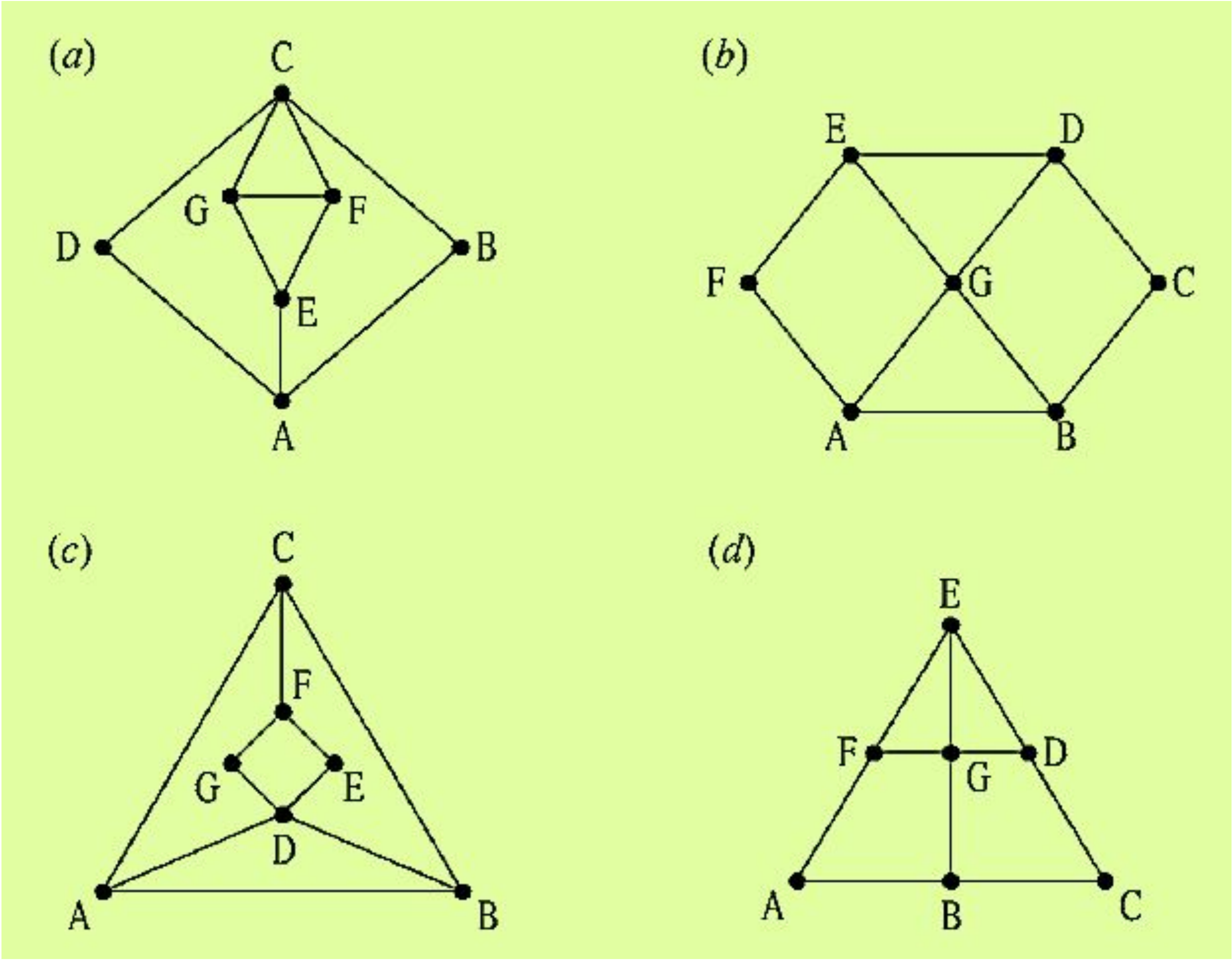
- 



Графы (b) и (d) неизоморфны. В (d) имеется вершина степени 3 (вершина E), смежная с двумя другими вершинами степени 3, а в (b) каждая вершина степени 3 является смежной только с одной вершиной степени 3.

Пример Определим, какие из приведенных ниже графов являются изоморфными.

- Подведем итоги: графы (a) и (c) изоморфны, а остальные пары графов не являются изоморфными. ■



Изоморфизм графов

Принцип изоморфизма

Чтобы доказать, что два графа **изоморфны**, следует построить изоморфизм из одного графа на другой;

чтобы доказать, что два графа **неизоморфны**, следует найти теоретико-графовое свойство, которым один граф обладает, а второй – нет.