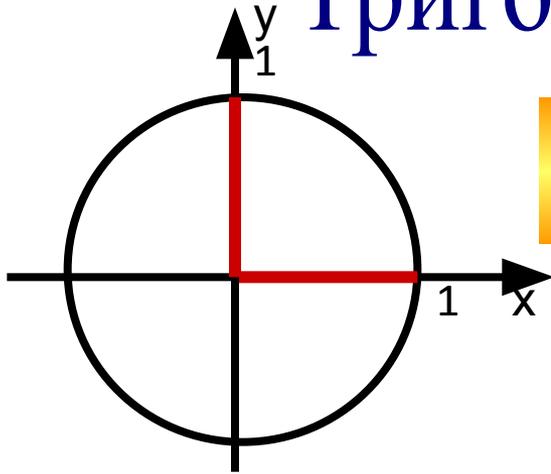
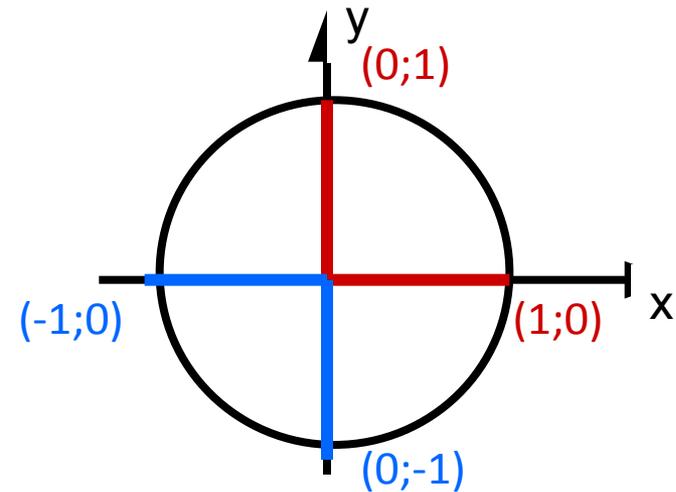


# Тригонометрический круг

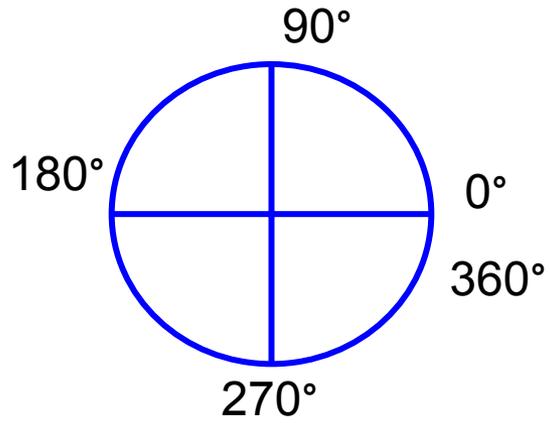


Тригонометрический круг – это круг с радиусом равным единице и с центром в начале координат.

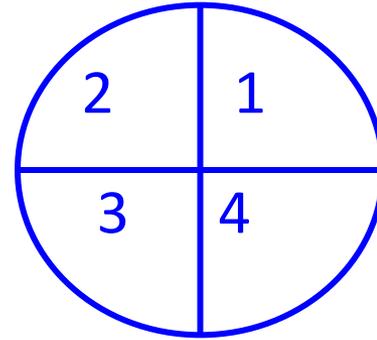
Радиус  $R = 1$



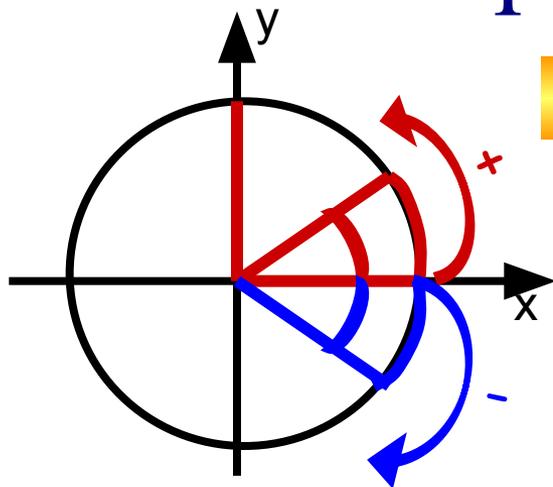
# Градусная мера углов



# Четверти круга



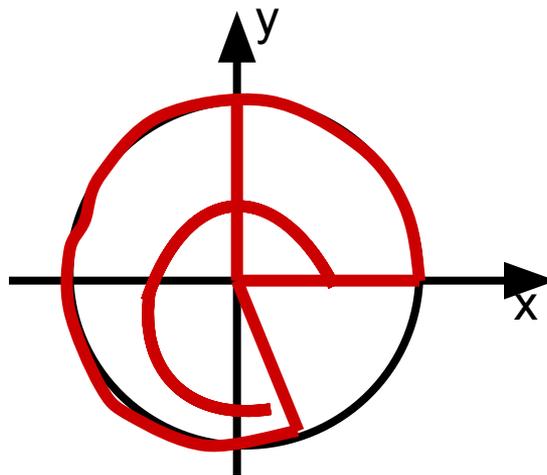
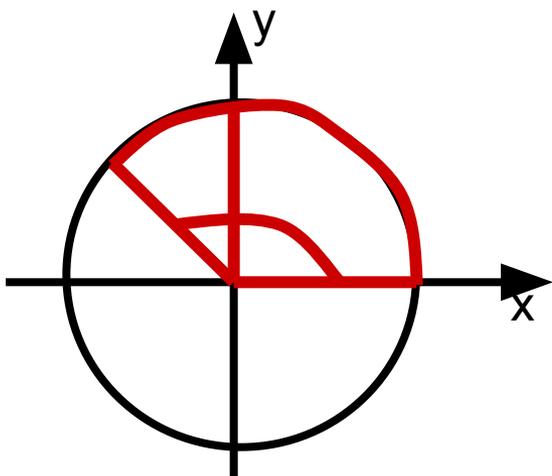
# Углы на тригонометрическом круге



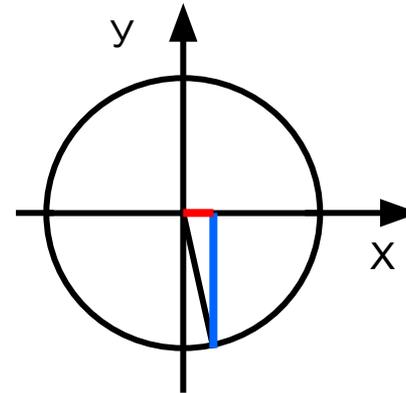
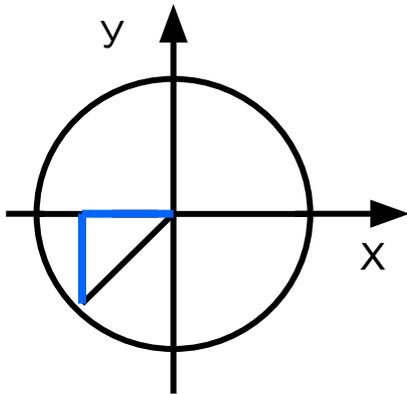
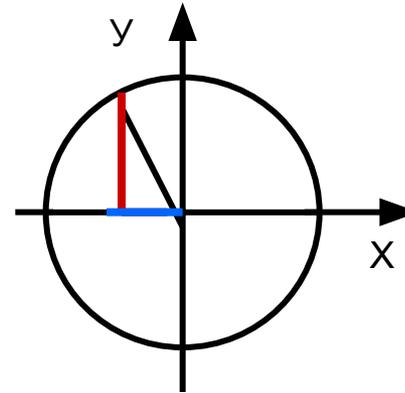
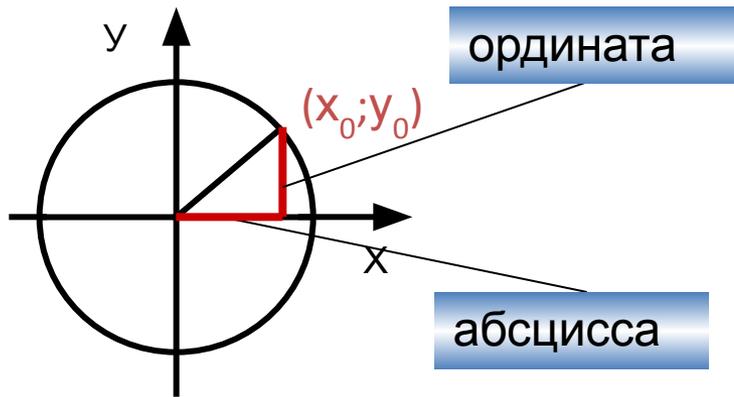
Угол на круге определяется поворотом радиуса

За нулевое положение радиуса принято его положение на положительном направлении оси X.

Угол поворота радиуса отсчитывается от положительного направления оси X: с плюсом - против часовой стрелки, с минусом - по часовой стрелке.

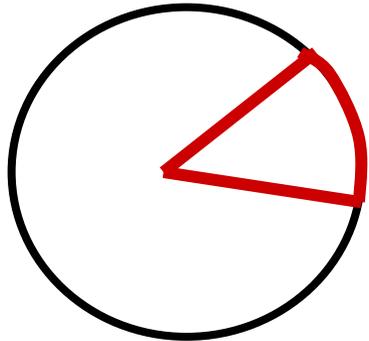


# Координаты положения радиуса



# Радианная мера угла

Один радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу равную радиусу



Длина окружности  $2\pi R$

В окружности  $2\pi R : R = 2\pi$  радиан

$2\pi$  соответствуют  $360^\circ$

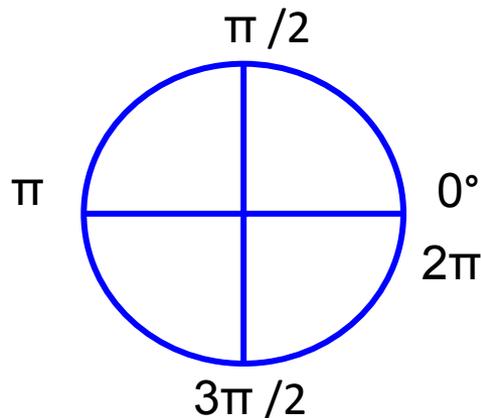
$2\pi$  -----  $360^\circ$

$\pi$  -----  $180^\circ$

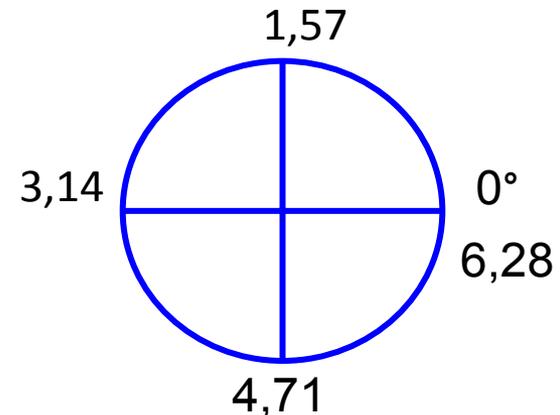
$90^\circ = 180^\circ / 2 = \pi / 2$

$270^\circ = 90^\circ \cdot 3 = 3\pi / 2$

## Радианная мера углов в круге



Так как  $\pi = 3,14\dots$ ,  
то



# Перевод градусов в радианы

Для перевода в радианы удобно пользоваться пропорцией.

$$\pi \text{ ----- } 180^\circ$$

Перевести  $120^\circ$  в радианы.

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 120^\circ \text{ ----- } x \end{array}$$

$$x = \frac{\cancel{120}^2 \cdot \pi}{\cancel{180}_3}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}$$



$$30^\circ = \pi / 6$$

$$45^\circ = \pi / 4$$

$$60^\circ = \pi / 3$$

# Перевод радиан в градусы

Подставьте вместо  $\pi$   $180^\circ$  и сократите

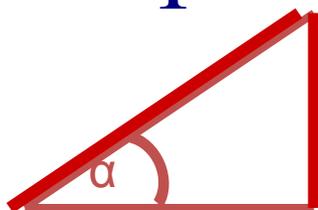
Перевести  $3\pi / 4$  в градусы.

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$$

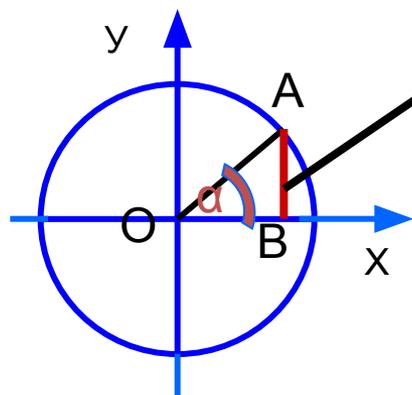
# Определение тригонометрических функций

## Повторение

$\sin \alpha$



$$\sin \alpha = \frac{\text{противолеж. катет}}{\text{гипотенуза}}$$



ордината

Заметим,  $OA = R = 1$

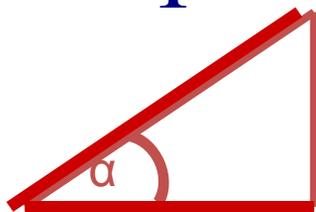
$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

Синусом угла  $\alpha$  является ордината точки A на круге, получающаяся при повороте радиуса на угол  $\alpha$ .

Синус угла  $\alpha$  – это ордината (y) угла  $\alpha$

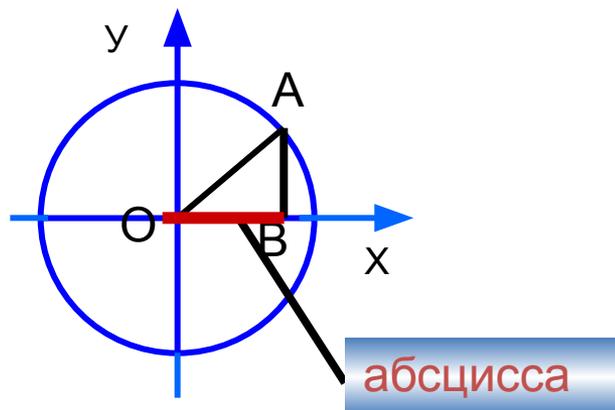
# Определение тригонометрических функций

## Повторение



$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$\cos \alpha$



Заметим,  $OA = R = 1$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = OB$$

Косинусом угла  $\alpha$  является абсцисса точки  $A$  на круге,  
получающаяся при повороте радиуса на угол  $\alpha$ .

Косинус угла  $\alpha$  – это абсцисса ( $x$ ) угла  $\alpha$

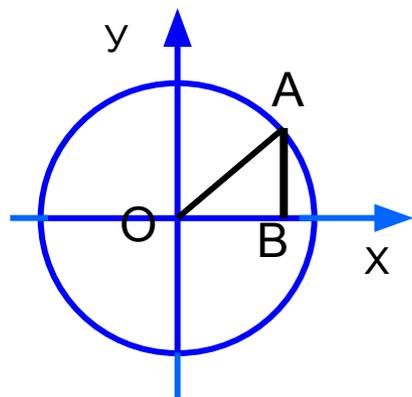
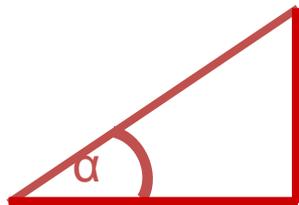
# Определение тригонометрических функций

## Повторение

$\text{tg}\alpha, \text{ctg}\alpha$

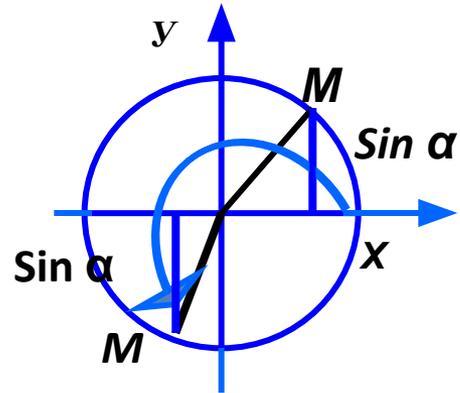
$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{противолеж.катет}}{\text{прилеж.катет}}$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\text{прилеж.катет}}{\text{противолеж.катет}}$$



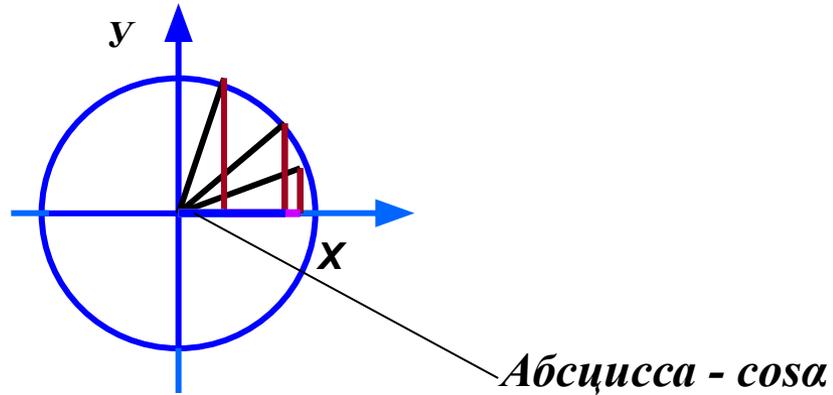
$$\text{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

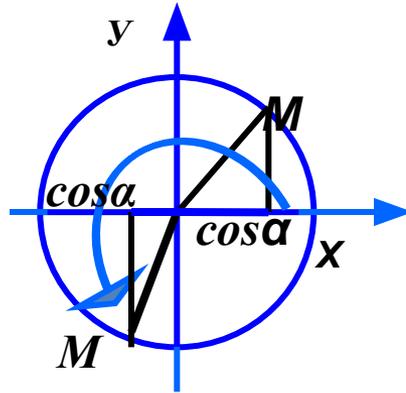


***Запомни! Синус – это ордината (y)***

$\cos \alpha$

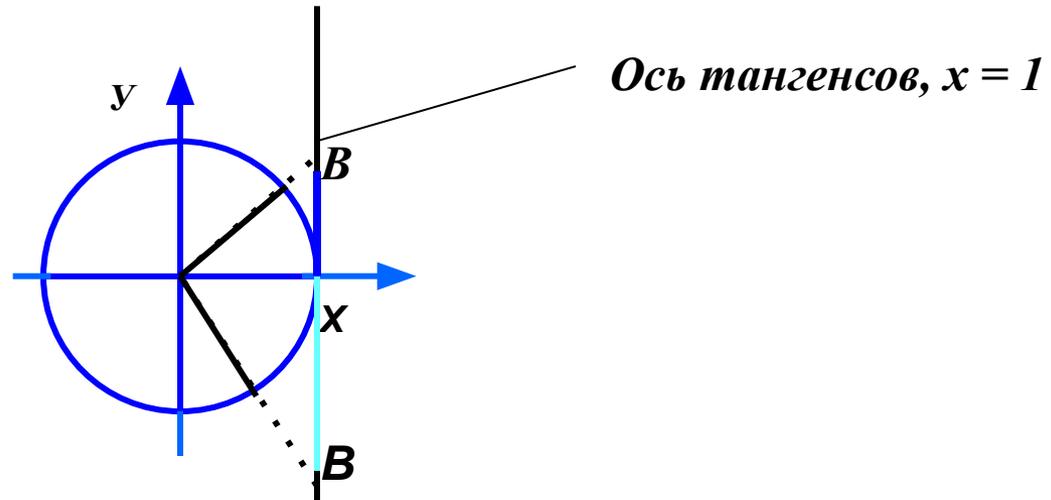


*2) Косинусом угла  $\alpha$  является абсцисса точки  $M$  на тригонометрическом круге, получающаяся при повороте радиуса на угол  $\alpha$ .*



***Запомни! косинус – это абсцисса (x)***

$tga$

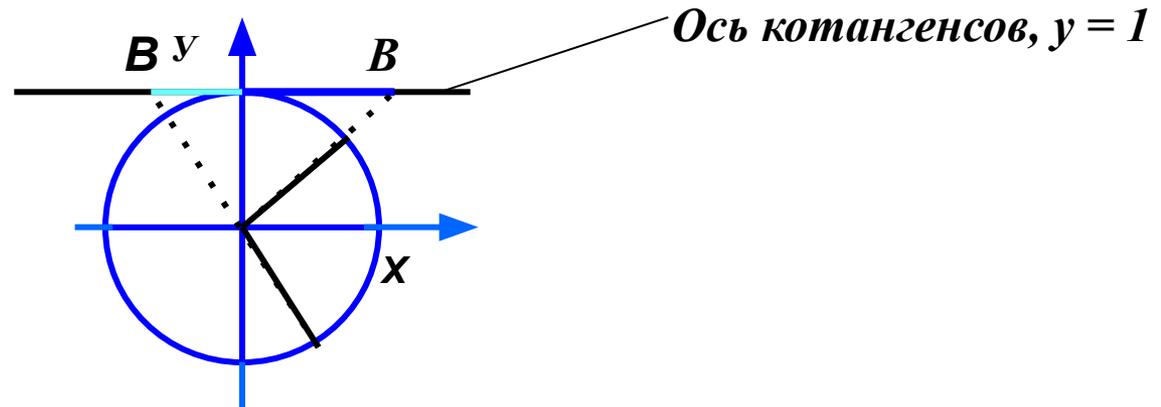


3) Тангенсом угла  $\alpha$  является ордината точки  $B$  на оси тангенсов ( $x = 1$ ), получающаяся при пересечении продолжения радиуса с осью тангенсов при повороте радиуса на угол  $\alpha$ .

$$3) tga = \frac{x}{y}$$

$$tga = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

# $ctg\alpha$



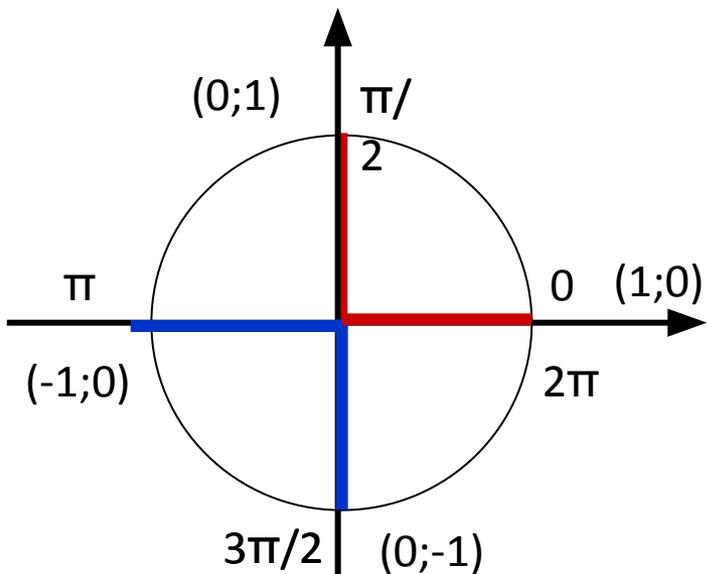
4) Котангенсом угла  $\alpha$  является абсцисса точки  $B$  на оси котангенсов ( $y = 1$ ), получающаяся при пересечении продолжения радиуса с осью котангенсов при повороте радиуса на угол  $\alpha$ .

$$4) ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

# Значения тригонометрических функций

## Диаметральные углы



Красная линия - ЭТО ПЛЮС

Синяя - ЭТО МИНУС

	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$y$	0	1	0	-1	0
$x$	1	0	-1	0	1
$y$	0	1	0	-1	0
$x$	1	0	-1	0	1
$tg$	0	-	0	-	0
$ctg$	-	0	-	0	-

$$tga = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$ctga = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

# Значения тригонометрических функций

## Табличные значения Ряд синуса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Для косинуса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
<i>sin</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>cos</i>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>tg</i>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
<i>ctg</i>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

## Ряд тангенса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Для котангенса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

# Свойства триг. функций

Знать

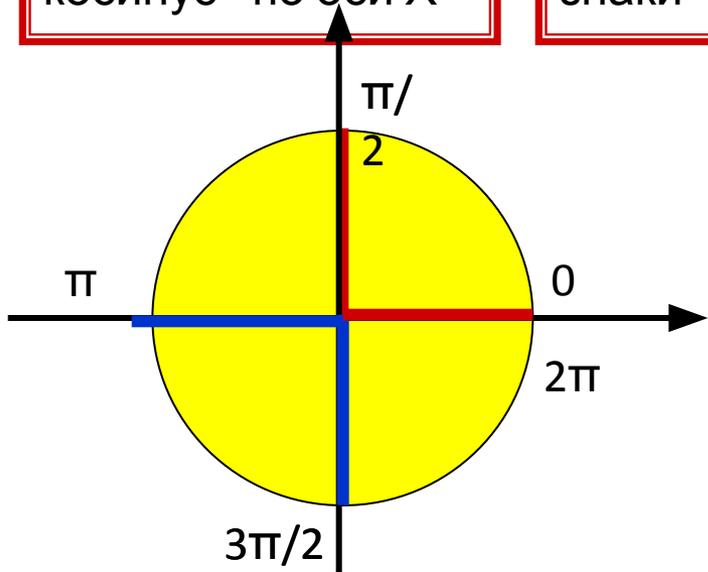
Уметь

## 1. Знаки по четвертям

1. Определять четверть нахождения угла; 2. Определить знак функции.

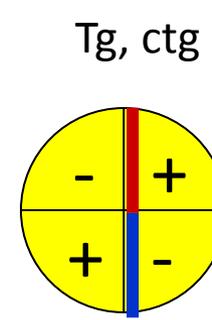
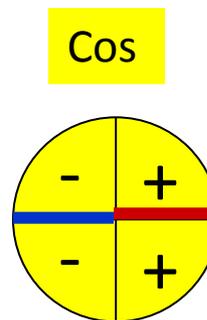
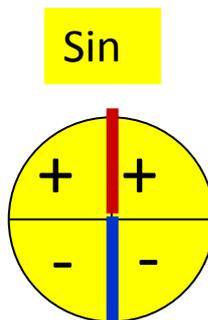
Синус: знаки соответствуют знакам по оси Y, косинус – по оси X

Тангенс и котангенс в 1 четв.- плюс, далее знаки чередуются



Красная линия - это плюс

Синяя – это минус



$\sin 315^\circ < 0$ , т.к. угол 3 четв.  
 $\operatorname{tg} 5\pi/6 < 0$ , угол 2 четв.  
 $\cos^2 11\pi/4 > 0$ , т.к.  $\cos^2$

## 5. Множество значений функций

Уметь находить множество значений функции, выражения

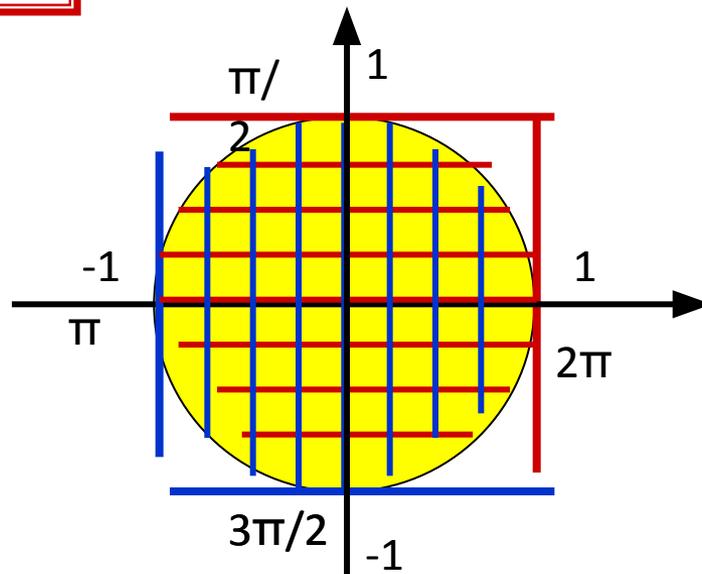
$-1 \leq \sin x \leq 1$ , или  $|\sin x| \leq 1$ ,  
 $-1 \leq \cos x \leq 1$ , или  $|\cos x| \leq 1$ ,

$\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}$ ,

$y = 3 - 2\sin x$ .  $E(y) = (1; 5)$   
 $\sin x = -1$ ,  $y = 3 + 2 = 5$   
 $\sin x = 1$ ,  $y = 3 - 2 = 1$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x| \leq 1$$



# Период

**Период** – это число, при прибавлении которого к аргументу значение функции не изменяется.

$$f(x + T) = f(x)$$

Если  $T$  – период, то  $Tn$  для  $n \in \mathbb{Z}$  тоже период. Считается  $T$  – наименьший период

Так как  $f(x + Tn) = f(x)$ , то  $Tn$  **МОЖНО ОПУСТИТЬ**

$$\sin, \cos \quad T = 2\pi$$

$$\operatorname{tg}, \operatorname{ctg} \quad T = \pi$$

## Примеры

- $\sin 390^\circ = \sin (360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
- $\sin 790^\circ = \sin (2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\cos 7\pi/3 = \cos (2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$
- $\cos (2\pi - \beta) = \cos (-\beta) = \cos \beta$
- $\sin (6\pi - 2\alpha) = \sin (-2\alpha) = -\sin 2\alpha$



# Четность, нечетность

Синус, тангенс, котангенс – функции

**нечетные.**

Минус у угла можно вынести за знак функции

Косинус – функция

**четная.**

Минус у угла можно опустить

## Примеры

$$1. \sin(-x) = -\sin x$$

$$2. \sin(\pi/4 - x) = -\sin(x - \pi/4)$$

$$3. \operatorname{tg}(-\pi/6) = -\operatorname{tg} \pi/6 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4. \cos(-7\pi/3) = \cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$5. \cos(-\beta) = \cos \beta$$

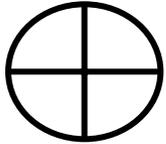
$$6. \operatorname{ctg}(2\alpha - \pi/2) = -\operatorname{ctg}(\pi/2 - 2\alpha)$$



# Область определения

Синус, косинус

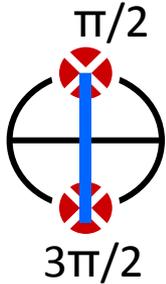
$$D(y) = \mathbb{R}$$



Функции непрерывны на  $\mathbb{R}$

Тангенс

$$D(y) = \mathbb{R}, x \neq \pi/2 + \pi n$$



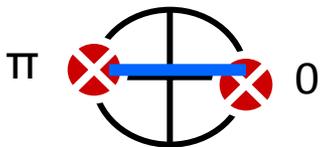
$x = \pi/2 + \pi n$  – вертикальная асимптота

$\operatorname{tg} x$  – определен при  $\cos x \neq 0$

Котангенс

$$D(y) = \mathbb{R}, x \neq \pi n$$

$x = \pi n$  – горизонтальная асимптота



$\operatorname{ctg} x$  – определен при  $\sin x \neq 0$

