

## *Теорема Ербрана*

Ця теорема є основою більшості сучасних алгоритмів доведення теорем. Вона тісно зв'язана з теоремою про те, що множина диз'юнктивів  $S$  суперечлива тоді і тільки тоді коли  $S$  фальшива при всіх  $N$ -інтерпретаціях.

**Теорема (Ербрана).** Для того, щоб множина диз'юнктивів була суперечливою достатньо, щоб існувала скінченна суперечлива множина основних прикладів диз'юнктивів.

**Доведення.** Нехай існує скінченна суперечлива множина  $S'$  основних прикладів диз'юнктивів  $S$ . Так як кожна інтерпретація  $I$  для  $S$  містить інтерпретацію  $I'$  множини  $S'$  і  $I'$  заперечує  $S'$ , то  $I$  також повинна заперечувати  $S'$ . Але  $S'$  заперечується в кожній інтерпретації  $I'$ . Отже,  $S'$  заперечується в кожній інтерпретації  $I$  множини  $S$ . Тому  $S$  заперечується в кожній інтерпретації множини  $S'$ . Отже,  $S$  суперечлива.

**Приклад (а).** Нехай  $S = \{P(x), \neg P(f(x))\}$ .

Існує суперечлива множина основних прикладів диз'юнктив

$$S' = \{P(f(a)), \neg P(f(a))\}.$$

Отже,  $S$  – суперечлива.

**(b).** Нехай  $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$ . Існує суперечлива множина основних прикладів диз'юнктив

$$S' = \{\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), P(g(b)), \neg Q(f(g(b)), g(b))\}.$$

Отже,  $S$  – суперечлива.


**Приклад.** Нехай  $S = \{ \neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(x,v,w) \vee P(u,z,w), \neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(u,z,w) \vee P(x,v,w), P(g(x,y), x, y), P(x, h(x,y), y), P(x,y,f(x,y)), \neg P(k(x),x, k(x)) \}$ . В цьому випадку нелегко знайти скінченну суперечливу множину основних прикладів множини  $S$ .

Одна з них:

$S' = \{ P(a, h(a,a), a), \neg P(k(h(a,a)), h(a,a), k(h(a,a))), P(g(a, k(h(a,a))), a, k(h(a,a))), \neg P(g(a, k(h(a,a))), a, k(h(a,a))) \vee \neg P(a, h(a,a), a) \vee \neg P(k(h(a,a)), h(a,a), k(h(a,a))) \vee \neg P(g(a, k(h(a,a))), a, k(h(a,a))) \vee \neg P(g(a, k(h(a,a))), a, k(h(a,a))) \}$

## *Застосування теореми Ербрана*

Теорема Ербрана для доведення суперечливості множини диз'юнктив припускає процедуру спростування. Це означає, що для доведення суперечливості множини диз'юнктив  $S$  повинна існувати машинна процедура, яка породжує множини  $S_1, \dots, S_n, \dots$  основних прикладів диз'юнктив із  $S$  і встановлює їх суперечливість.



Одним із перших використав цю ідею Гілмор. Але метод Гілмора виявився неефективним. Більш ефективний метод, що ґрунтується на цій ідеї був запропонований Девісом і Патнемом. Але в більшості випадків послідовність основних прикладів росте експоненціально. Щоб це побачити, розглянемо **приклад**.

Нехай  $S = \{P(x, g(x), y, h(x, y), z, k(x, y, z)), \neg P(u, v, e(v), w, f(v, w), x)\}$ .

Так як


$$H_0 = \{a\},$$

$$H_1 = \{a, g(a), h(a,a), k(a,a,a), e(a), f(a,a)\},$$

.....

число елементів в  $S_0, S_1, \dots$  є 2, 1512, ...

відповідно. Перша суперечлива множина – це  $S_5$ , яка має  $10^{256}$  елементів. Таким чином, перевірити цю множину на суперечливість неможливо.



Тому виникла потреба в створенні іншого методу, в якому не потрібно було б породжувати множини основних прикладів диз'юнктивів. Такий метод був створений і називається він *методом резолюцій*.

Основна ідея методу полягає в перевірці, чи містить  $S$  пустий диз'юнкт  $\perp$ . Якщо  $S$  містить пустий диз'юнкт  $\perp$ , то  $S$  суперечлива. Далі розглянемо метод резолюцій для логіки висловлювань.



# *Метод резолюцій для логіки висловлювань*

Розглянемо наступні диз'юнкції:

$$C_1: P$$

$$C_2: \neg P \vee Q.$$

**Df.** Якщо  $A$  – атом, то говорять, що дві літери  $A$  і  $\neg A$  контрарні одна одній і множина  $\{A, \neg A\}$  називається контрарною парою.

Відзначимо, що диз'юнкт є тавтологією, якщо він містить контрарну пару.

Викреслюючи контрарну пару із  $C_1$  і  $C_2$   
одержимо диз'юнкт:

$C_3: Q$ .

Узагальнюючи це правило, одержимо  
наступне правило – *правило резолюції*.

Для будь-яких двох диз'юнктів  $C_1$  і  $C_2$ ,  
якщо існує літера  $L_1$  в  $C_1$ , яка контрарна  
літері  $L_2$  в  $C_2$ , то викреслюючи  $L_1$  і  $L_2$  з  $C_1$  і  
 $C_2$  відповідно, утворимо диз'юнкцію диз'  
юнктів, що залишились. Одержаний диз'  
юнкт є резольвентою  $C_1$  і  $C_2$ .

**Приклад.** Розглянемо наступні диз'юнкції:

$$C_1: P \vee Q,$$

$$C_2: \neg P \vee Q.$$

Диз'юнкція  $C_1$  містить літеру  $P$ , контрарну літері  $\neg P$  в  $C_2$ . Отже, викреслюючи  $P$  і  $\neg P$  із  $C_1$  і  $C_2$  відповідно і утворюючи диз'юнкцію решти диз'юнкцій  $R$  і  $Q$ , одержимо резольвенту  $R \vee Q$ .

**Приклад.** Розглянемо диз'юнкти

$$C_1: \neg P \vee Q \vee R,$$

$$C_2: \neg Q \vee S.$$

Резольвента  $C_1$  і  $C_2$  є  $\neg P \vee R \vee S$ .

**Приклад.** Розглянемо диз'юнкти

$$C_1: \neg P \vee Q,$$

$$C_2: \neg P \vee R.$$

Так як не існує контрарної пари для цих диз'юнктив, то не існує резольвенти  $C_1$  і  $C_2$ .

Важливою властивістю резольвенти є те, що

**Теорема.** Резольвента  $S$  диз'юнктивів  $S_1$  і  $S_2$  є логічним наслідком  $S_1$  і  $S_2$ .

**Доведення.** Нехай  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S$  є наступними формулами:  $S_1 = L \vee C'_1$ ,  $S_2 = \neg L \vee C'_2$  і  $S = C'_1 \vee C'_2$ , де  $C'_1$  і  $C'_2$  диз'юнкції літер.

Припустимо, що  $S_1$  і  $S_2$  істинні в інтерпретації  $I$ . Покажемо, що тоді резольвента  $S$  також істинна в  $I$ .

Припустимо спочатку, що  $L$  – фальшива в  $I$ . Тоді  $C'_1$  повинен бути істинним в  $I$ . Отже, резольвента  $C$ , тобто  $C'_1 \vee C'_2$  є істинним в  $I$ . Аналогічно можна показати, що якщо  $\neg L$  фальшиве в  $I$ , то  $C'_2$  повинен бути істинним в  $I$ . Отже, резольвента  $C$  є істинною в  $I$ .

*Зауваження.* Якщо ми маємо два одиничних диз'юнкта, то їх резольвента, якщо вона існує є пустим диз'юнктом  $\perp$ . Більш суттєво те, що для суперечливої множини диз'юнктів можна породити пустий диз'юнкт.

**Df.** Нехай  $S$  – множина диз'юнктив.

*Резолютивне виведення*  $C$  із  $S$  є така скінченна послідовність  $C_1, \dots, C_k$  диз'юнктив, що кожний  $C_i$  або належить  $S$  або є резольвентою диз'юнктив, попередніх  $C_i$  і  $C_k = C$ . Виведення  $\hat{I}$  із  $S$  називається спростуванням  $S$ .

**Приклад.** Нехай  $S = \{(1) \neg P \vee Q, (2) \neg Q, (3) P\}$ . Із (1) і (2) одержимо резольвенту (4)  $\neg P$ . Із (4) і (3) одержимо резольвенту  $\hat{I}$ . Отже,  $\hat{I}$  – логічний наслідок  $S$ .

Далі множини диз'юнктивів будемо записувати в стовпчик.

**Приклад.** Для множини

$$(1) P \vee Q,$$

$$(2) \neg P \vee Q,$$

$$(3) P \vee \neg Q,$$

$$(4) \neg P \vee \neg Q$$

можна побудувати наступні резольвенти:

$$(5) Q \text{ із } (1), (2),$$

$$(6) \neg Q \text{ із } (3), (4),$$

$$(7) \uparrow \text{ із } (5), (6).$$



Отже,  $\hat{I}$  – логічний наслідок  $S$ .

Далі ми сформулюємо правило резолюцій для логіки першого порядку. Також доведемо повноту методу резолюцій з тим, щоб показати, що множина  $S$  диз'юнктив суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує виведення пус- того диз'юнкта із  $S$ .

## *Підстановка і уніфікація*

Для застосування правила резолюції суттєвим є наявність контрарних літер в різних диз'юнктах. Для диз'юнктів, що не містять змінних (логіка висловлювань), це дуже просто. Однак, для диз'юнктів із змінними, це ускладнюється. Наприклад, розглянемо диз'юнкти

$$C_1: P(x) \vee Q(x),$$

$$C_2: \neg P(f(x)) \vee R(x).$$

Не існує ніякої літери в  $C_1$ , контрарної літері в  $C_2$ . Однак, якщо ми підставимо  $f(a)$  замість  $x$  в  $C_1$  і  $a$  замість  $x$  в  $C_2$ , то одержимо

$$C_1': P(f(a)) \vee Q(f(a)),$$

$$C_2': \neg P(f(a)) \vee R(a).$$

Тут  $C_1'$  і  $C_2'$  є основними прикладами  $C_1$  і  $C_2$  відповідно, а  $P(f(a))$  і  $\neg P(f(a))$  утворюють контрарну пару. Отже, з  $C_1'$  і  $C_2'$  можемо одержати резольвенту

$$C_3': Q(f(a)) \vee R(a).$$

В загальному випадку, якщо підставити  $f(x)$  замість  $x$  в  $C_1$ , то одержимо

$$C_1^* : P(f(x)) \vee Q(f(x)).$$

Цей диз'юнкт є прикладом  $C_1$ . В той же час літера  $P(f(x))$  в  $C_1^*$  контрарна літері  $\neg P(f(x))$  в  $C_2$ . Отже, ми можемо одержати резольвенту із  $C_1^*$  і  $C_2$ :

$$C_3 : Q(f(x)) \vee R(x).$$

Цей диз'юнкт є найбільш загальним диз'юнктом в тому розумінні, що всі резольвенти  $C_1$  і  $C_2$  – це основні приклади  $C_3$ .

Диз'юнкт  $C_3$  теж будемо називати резольвентою  $C_1$  і  $C_2$ .

Одержання резольвенти потребує підстановки замість змінних. Тому

**Df.** *Підстановка* – це скінченна множина виду  $\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$ , де кожна  $v_i$  – змінна,  $t_i$  – терм, відмінний від  $v_i$ , всі  $v_i$  – різні. Якщо  $t_1, \dots, t_n$  – основні приклади, то підстановка називається *основною*. Підстановка, яка не містить елементів, називається *пустою* і позначається  $\varepsilon$ .

**Приклад.** Наступні дві множини є підстановками:

$$\{f(z)/x, y/z\}, \{a/x, g(y)/y, f(g(b))/z\}.$$

**Df.** Нехай  $\theta = \{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$  – підстановка і  $E$  – вираз. Тоді  $E\theta$  – вираз, одержаний з  $E$  заміною одночасно всіх входжень змінної  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) в  $E$  на терм  $t_i$ .  $E\theta$  називається *прикладом*  $E$ .

**Приклад.** Нехай  $\theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$  і  $E = P(x, y, z)$ . Тоді  $E\theta = P(a, f(b), c)$ .

**Df.** Нехай  $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$  і  $\lambda = \{u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$  – дві підстановки. Тоді *композиція*  $\theta$  і  $\lambda$  є підстановка (позначається  $\theta \circ \lambda$ ), яка одержується із множини

$$\{t_1 \lambda / x_1, \dots, t_n \lambda / x_n, u_1 / y_1, \dots, u_m / y_m\}$$

викреслюванням всіх елементів  $t_j \lambda / x_j$ , для яких  $t_j \lambda = x_j$ , і всіх елементів  $u_i / y_i$  таких, що  $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Приклад.** Нехай  $\theta = \{t_1/x_1, t_2/x_2\} = \{f(y)/x, z/y\}$ ,  $\lambda = \{u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\} = \{a/x, b/y, y/z\}$ .

Тоді

$$\{t_1\lambda/x_1, t_2\lambda/x_2, u_1/y_1, u_2/y_2, u_3/y_3\} = \{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}.$$

Але  $t_2\lambda/x_2 = x_2$ , тому  $t_2\lambda/x_2 = y/y$  повинно бути викреслене з множини. Крім того, викреслюємо  $a/x$  і  $b/y$  так як  $y_1$  і  $y_2$  належать множині  $\{x_1, x_2\}$ . В результаті одержимо

$$\theta \circ \lambda = \{f(b)/x, y/z\}.$$



Зазначимо, що композиція підстановок асоціативна, тобто  $(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu)$  і  $\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon$  для всіх  $\theta, \lambda, \mu$ .

В процедурі доведення за методом резолюцій для знаходження контрарних пар літер, ми повинні будемо вміти уніфікувати два або більше виразів, тобто знаходити підстановку уніфікації.

**Df.** Підстановка  $\theta$  називається *уніфікатором* для множини  $\{E_1, \dots, E_k\} \Leftrightarrow E_1\theta = \dots = E_k\theta$ .

**Df.** Множина  $\{E_1, \dots, E_k\}$  уніфікується, якщо для неї існує уніфікатор.


**Df.** Уніфікатор  $\sigma$  для множини  $\{E_1, \dots, E_k\}$  називається *найбільш загальним* уніфікатором  $\Leftrightarrow$  для кожного уніфікатора  $\theta$  цієї множини існує підстановка  $\lambda$  така, що  $\theta = \sigma \circ \lambda$ .

**Приклад.** Множина  $\{P(a, y), P(x, f(b))\}$  уніфікується, так як підстановка  $\theta = \{a/x, f(b)/y\}$  є уніфікатором цієї множини.

## *Алгоритм уніфікації*


Далі буде приведений алгоритм для знаходження найбільш загального уніфікатора для скінченної множини виразів, що уніфікується. Якщо множина не уніфікується, алгоритм буде видавати цей факт.

Розглянемо два не тотожні вирази  $P(a)$  і  $P(x)$ . Щоб їх ототожнити, необхідно спочатку знайти неузгодженість, а потім спробувати її вилучити.



Для  $P(a)$  і  $P(x)$  неузгодженість – це множина  $\{a, x\}$ . Замінивши  $x$  на  $a$  ми позбудемося неузгодженості. В цьому полягає ідея алгоритму уніфікації.

**Df.** *Множина неузгодженостей* непустої множини виразів  $W$  одержується знаходженням першої (зліва) позиції, на якій не для всіх виразів з  $W$  стоїть один і той же символ з наступним виписуванням із кожного виразу в  $W$  підвиразу, який починається символом, що займає цю позицію.



**Приклад.** Якщо  $W = \{P(x, f(y,z)), P(x,a), P(x, g(h(k(x))))\}$ , то перша позиція, в якій не всі вирази мають однаковий символ – п'ята. (Всі вирази мають однакові перші чотири символи  $P(x,)$ ).

Таким чином, множина неузгодженостей складається з відповідних підвиразів, які починаються з п'ятої позиції і це є множина  $\{f(y,z), a, g(h(k(x)))\}$ .

## *Алгоритм уніфікації*

*Крок 1.*  $k = 0$ ,  $W_k = W$ ,  $\sigma_k = \varepsilon$ .

*Крок 2.* Якщо  $W_k$  – одиничний диз'юнкт, то зупинка:  $\sigma_k$  - найбільш загальний уніфікатор для  $W$ . В іншому випадку знаходимо множину  $D_k$  неузгодженостей для  $W_k$ .

*Крок 3.* Якщо існують такі елементи  $v_k$  і  $t_k$  в  $D_k$ , що  $v_k$  змінна, яка не входить в  $t_k$ , то перейти на крок 4. В іншому випадку зупинка:  $W$  не уніфікується.

*Крок 4.* Нехай  $\sigma_{k+1} = \sigma_k \{t_k/v_k\}$  і  $W_{k+1} = W_k \{t_k/v_k\}$ . (Зазначимо, що  $W_{k+1} = W\sigma_{k+1}$ ).

*Крок 5.* Присвоїти значення  $k=k+1$  і перейти на крок 2.

**Приклад.** Знайти найбільш загальний уніфікатор для

$$W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}.$$

1.  $\sigma_0 = \varepsilon$  і  $W_0 = W$ . Так як  $W_0$  – не одиничний диз'юнкт, то  $\sigma_0$  не є найбільш загальним уніфікатором для  $W$ .

2. Множина неузгодженостей  $D_0 = \{a, z\}$ .  
В  $D_0$  існує змінна  $v_0 = z$ , яка не зустрічається  
в  $t_0 = a$ .

3. Нехай  $\sigma_1 = \sigma_{0 \circ \{t_0/v_0\}} = \varepsilon_{\circ \{a/z\}} = \{a/z\}$ ,  
 $W_1 = W_0 \{t_0/v_0\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z),$   
 $f(u))\} \{a/z\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$ .

4.  $W_1$  – не одиничний диз'юнкт. Множина  
неузгодженостей  $D_1$  для  $W_1$ :  $D_1 = \{x, f(a)\}$ .

5. Із  $D_1$  знаходимо, що  $v_1 = x$ ,  $t_1 = f(a)$ .



6. Нехай  $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{t_1/v_1\} = \{a/z\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/z, f(a)/x\}$ ,

$W_2 = W_1 \{t_1/v_1\} = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\} \{f(a)/x\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$ .

7.  $W_2$  – не одиничний диз'юнкт. Множина неузгодженостей  $D_2$  для  $W_2$ :  $D_2 = \{g(y), u\}$ . Із  $D_2$  знаходимо, що  $v_2 = u$ ,  $t_2 = g(y)$ .

8. Нехай  $\sigma_3 = \sigma_{2 \circ} \{t_2/v_2\} = \{a/z, f(a)/x\}$ .  
 $\{g(y)/u\} = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$ ,

$W_3 = W_2 \{t_2/v_2\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$   
 $\{g(y)/u\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(g(y)))\} = \{P(a, f(a), f(g(y)))\}$ .

9. Так як  $W_3$  – одиничний диз'юнкт, то  $\sigma_3 = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$  є найбільш загальним уніфікатором для  $W$ .

**Приклад.** Знайти найбільш загальний уніфікатор для

$$W = \{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}.$$

1.  $\sigma_0 = \varepsilon$  і  $W_0 = W$ .

2.  $W_0$  – не одиничний диз'юнкт. Множина неузгодженостей  $D_0 = \{f(a), y\}$ . В  $D_0$  існує змінна  $v_0 = y$ , яка не зустрічається в  $t_0 = f(a)$ .

3. Нехай  $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{t_0/v_0\} = \varepsilon \circ \{f(a)/y\} = \{f(a)/y\}$ ,

$$W_1 = W_0 \{t_0/v_0\} = \{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\} \{f(a)/y\} \\ = \{Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a))\}.$$

4.  $W_1$  – не одиничний диз'юнкт. Множина неузгодженостей  $D_1$  для  $W_1: D_1 = \{g(x), f(a)\}$ .

5. Нема елемента, який був-би змінною.

Отже, множина не уніфікується і алгоритм закінчує роботу.

Зазначимо, що алгоритм уніфікації завжди завершує роботу для будь-якої непустої множини виразів. Інакше утворилася б нескінченна послідовність  $W\sigma_0, W\sigma_1, W\sigma_2, \dots$  непустих множин, в якій кожна наступна множина містить на одну змінну менше поперед-



ньої.

**Теорема (уніфікації).** Якщо  $W$  – скінченна непуста множина виразів, яка уніфікується, то алгоритм уніфікації завжди буде закінчувати роботу на кроці 2 і остання  $\sigma_k$  буде найбільш загальним уніфікатором для  $W$ .

## *Метод резолюцій для логіки першого порядку*

Ввівши алгоритм уніфікації, можна розглянути метод резолюцій для логіки предикатів.

**Df.** Якщо дві або більше літер (з однаковим знаком) диз'юнкту  $C$  мають найбільш загальний уніфікатор  $\sigma$ , то  $C\sigma$  називається *склейкою*  $C$ . Якщо  $C\sigma$  - одиничний диз'юнкт, то *склейка* називається *одиничною*.

**Приклад.** Нехай  $C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x)$ .  
Тоді перша і друга літери мають найбільш загальний уніфікатор  $\sigma = \{f(y)/x\}$ . Отже,  $C\sigma = P(f(y)) \vee \neg Q(x)$  є склейкою  $C$ .

Нехай  $C_1$  і  $C_2$  – два диз'юнкта, які не мають однакових змінних.

**Df.** Нехай  $L_1$  і  $L_2$  – дві літери в  $C_1$  і  $C_2$  відповідно. Якщо  $L_1$  і  $\neg L_2$  мають найбільш загальний уніфікатор  $\sigma$ , то диз'юнкт  $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup C_2\sigma - L_2\sigma$  називається *бінарною резольвентою*  $C_1$  і  $C_2$ .

**Приклад.** Нехай  $C_1 = P(x) \vee Q(x)$  і  $C_2 = \neg P(a) \vee R(x)$ . Так як  $x$  входить в  $C_1$  і  $C_2$ , то замінюємо змінну в  $C_2$ , тобто нехай  $C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$ . Вибираємо  $L_1 = P(x)$  і  $L_2 = \neg P(a)$ . Так як  $\neg L_2 = P(a)$ , то  $L_1$  і  $\neg L_2$  мають найбільш загальний уніфікатор  $\sigma = \{a/x\}$ .

Отже,  $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma) = (\{P(a), Q(a)\} - \{P(a)\}) \cup (\{\neg P(a), R(y)\} - \{\neg P(a)\}) = \{Q(a)\} \cup \{R(y)\} = \{Q(a), R(y)\} = Q(a) \vee R(y)$ .


Таким чином,  $Q(a) \vee R(y)$  – бінарна резольвента  $C_1$  і  $C_2$ .




**Df.** Резольвентою диз'юнктивів  $C_1$  і  $C_2$  є одна із наступних резольвент:

1. Бінарна резольвента  $C_1$  і  $C_2$ .
2. Бінарна резольвента  $C_1$  і склейки  $C_2$ .
3. Бінарна резольвента  $C_2$  і склейки  $C_1$ .
4. Бінарна резольвента склейки  $C_1$  і склейки  $C_2$ .

**Приклад.** Нехай  $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  і  $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ . Склейка  $C_1$  є  $C'_1 = P(f(y)) \vee R(g(y))$ . Бінарна резольвента  $C'_1$  і  $C_2$  є  $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ , отже резольвента  $C'_1$  і  $C_2$



Отже, правило резолюцій є правило виведення, яке породжує резольвенти для множини диз'юнктив. Воно більш ефективне, ніж попередні процедури доведення. Крім того, метод резолюцій *повний*, тобто при допомозі цього методу для будь-якої суперечливої множини диз'юнктив можна вивести пустий диз'юнктив.



**Приклад.** Показати, що внутрішні різносторонні кути, утворені діагоналлю трапеції, рівні.

Аксиоматизуємо це твердження. Нехай  $T(x, y, u, v)$  означає, що  $x, y, u, v$  – трапеція з верхньою лівою вершиною  $x$ , верхньою правою вершиною  $y$ , нижньою правою вершиною  $u$  і нижньою лівою вершиною  $v$ . Нехай  $P(x, y, u, v)$  означає, що відрізок  $xy$  паралельний відрізку  $uv$ , і нехай  $E(x, y, z, u, v, w)$  означає, що кут  $xuz$  дорівнює куту  $uvw$ .

Тоді будемо мати наступні аксіоми:

A1.  $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(T(x,y,u,v) \rightarrow P(x,y,u,v))$  (визначення трапеції),

A2.  $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(P(x,y,u,v) \rightarrow E(x,y,v,u,v,y))$  (внутрішні різносторонні кути для паралельних прямих рівні),

A3.  $T(a,b,c,d)$  (задана трапеція).

Із цих аксіом ми повинні вивести, що твердження  $E(a,b,d,c,d,b)$  істинне, тобто

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow E(a,b,d,c,d,b)$$

є істинною формулою.

Отже, треба показати, що

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow E(a,b,d,c,d,b))$$

є суперечливою.


Для цього перетворимо цю формулу до стандартного вигляду. Множина диз'юнктивів

$$S = \{ \neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v), \neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y), T(a,b,c,d), \neg E(a,b,d,c,d,b) \}.$$

Тепер методом резолюцій доведемо, що ця множина суперечлива.

1.  $\neg T(x, y, u, v) \vee P(x, y, u, v),$
2.  $\neg P(x, y, u, v) \vee E(x, y, v, u, v, y),$
3.  $T(a, b, c, d),$
4.  $\neg E(a, b, d, c, d, b),$
5.  $\neg P(a, b, c, d)$  (резольвента 2,4),
6.  $\neg T(a, b, c, d)$  (резольвента 1,5),
7.  $\square$

Так як виводиться пустий диз'юнкт, то  $S$  – суперечлива.



**Теорема** (повнота методу резолюцій).  
Множина  $S$  диз'юнктив суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує виведення пустого диз'юнкта.

Далі покажемо, як можна ефективно використовувати метод резолюцій для доведення теорем.

**Приклад.** Покажемо, що формула  $((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P) \rightarrow U$  істинна. Для цього треба показати, що заперечення цієї формули суперечливе.

Таким чином, маємо:

1.  $\neg P \vee S,$

2.  $\neg S \vee U,$

3.  $P,$

4.  $\neg U,$

5.  $S$  (резольвента 3,1),

6.  $U$  (резольвента 5,2),

7.  $\square$  (резольвента 6,4).



**Приклад.** Розглянемо формулу

$$((\forall x)(C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x))) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge O(x))) \rightarrow (\exists x)(O(x) \wedge R(x)).$$

Покажемо, що вона істинна. Для цього заперечення цієї формули перетворимо до стандартного вигляду. Одержимо наступні п'ять диз'юнктив:

1.  $\neg C(x) \vee W(x)$ ,
2.  $\neg C(x) \vee R(x)$ ,
3.  $C(a)$ ,
4.  $O(a)$ ,
5.  $\neg O(x) \vee \neg R(x)$

Ця множина диз'юнктив суперечлива.  
Дійсно, за методом резолюцій будемо мати:

6.  $R(a)$  (резольвента 3,2),

7.  $\neg R(a)$  (резольвента 5,4),

8.  $\square$  (резольвента 7,6).

Таким чином, заперечення формули суперечливе.

**Приклад.** Якщо студенти – громадяни, то голоси студентів це голоси громадян.

Якщо  $S(x)$ ,  $C(x)$ ,  $V(x,y)$  означають “ $x$ -студент”, “ $x$ -громадянин”, “ $x$  є голос  $y$ ”, то

Аксиоматизація має вигляд:

$$(\forall y)(S(y) \rightarrow C(y)) \rightarrow (\forall x)((\exists y)(S(y) \wedge V(x,y)) \rightarrow (\exists z)(C(z) \wedge V(x,z)))$$

Стандартна форма для заперечення  
твердження є

1.  $\neg S(y) \vee C(y)$ ,
2.  $S(b)$ ,
3.  $V(a,b)$ ,
4.  $\neg C(z) \vee \neg V(a,z)$ ,

Доведення завершується наступним

чином:

5.  $C(b)$  (резольвента 1,2),
6.  $\neg V(a,b)$  (резольвента 5,4),
7.  $\square$  (резольвента 6,3).


## *Стратегії методу резолюцій*

Необмежене застосування методу резолюцій може викликати генерацію великої кількості диз'юнктив.

Наприклад, припустимо, що ми хочемо показати методом резолюцій, що множина  $S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$  суперечлива.

Виконання методу резолюцій для цієї множини полягає в побудові всіх можливих резольвент множини  $S$  першого рівня, другого рівня і т. д. Таким чином можна породити диз'юнкти:

- |                          |       |                     |        |
|--------------------------|-------|---------------------|--------|
| 1. $P \vee Q,$           |       | 7. $Q \vee \neg Q$  | (1,4), |
| 2. $\neg P \vee Q,$      |       | 8. $P \vee \neg P$  | (1,4), |
| 3. $P \vee \neg Q,$      |       | 9. $Q \vee \neg Q$  | (2,3), |
| 4. $\neg P \vee \neg Q,$ |       | 10. $P \vee \neg P$ | (2,3). |
| 5. $Q$                   | (1,2) | .....               |        |
| 6. $P$                   | (1,3) |                     |        |



Таким чином генерується багато лишніх або однакових диз'юнктивів.

Насправді для доведення суперечливості достатньо породити лише 3 диз'юнкції:

$Q$ ,  $\neg Q$ ,  $\square$ .

Для розв'язання цієї проблеми надлишковості існують різні *стратегії* методу резолюцій.