Лекция №2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

- Основные этапы построения математической модели:
- составляется описание функционирования системы в целом;
- составляется перечень подсистем и элементов с описанием их функционирования, характеристик и начальных условий, а также взаимодействия между собой;
- определяется перечень воздействующих на систему внешних факторов и их характеристик;
- выбираются показатели эффективности системы, т.е. такие числовые характеристики системы, которые определяют степень соответствия системы ее назначению;
- составляется формальная математическая модель системы;
- составляется машинная математическая модель, пригодная для исследования системы на ЭВМ.

- <u>Требования к математической модели:</u>
- Требования определяются прежде всего ее назначением, т.е. характером поставленной задачи:
- "Хорошая" модель должна быть:
- целенаправленной;
- простой и понятной пользователю;
- достаточной с точки зрения возможностей решения поставленной задачи;
- удобной в обращении и управлении;
- надежной в смысле защиты от абсурдных ответов;
- допускающей постепенные изменения в том смысле, что, будучи вначале простой, она при взаимодействии с пользователями может становиться более сложной.

- ***Математическая модель***, в широком смысле, это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Применительно к задачам исследования качества системы математическая модель должна обеспечивать адекватное описание влияния параметров и условий функционирования на показатели ее качества. Что касается точности модели, то ее уровень должен обеспечивать достоверное сравнительное оценивание и ранжирование по уровню качества альтернативных вариантов
- В основе изучения и моделирования процессов функционирования технических систем всегда лежит эксперимент - реальный или логический. Суть реального эксперимента состоит в непосредственном изучении конкретного физического объекта. В ходе логического эксперимента свойства объекта исследуются не на самом объекте, а с помощью его математической или содержательной (словесной) модели, изоморфной объекту с точки зрения изучаемых эксперименте свойств.

- Подавая на вход системы различные входные процессы и измеряя процесс на ее выходе, исследователь получает возможность установить и записать математически существующую между ними связь в виде уравнения, связывающего для каждого интервала времени значения входных и выходных воздействий и потому называемого уравнением «вход-выход». Кроме того, для адекватного отражения связи между входом и выходом системы в системотехнике вводится понятие «состояние». По своему смыслу состояние *z(τ)* представляет собой совокупность существенных свойств (характеристик) системы, знание которых в настоящем (в момент времени *τ*) позволяет определить ее поведение в будущем (в моменты времени *t* > *τ*). Благодаря этому понятию, уравнение “вход-выход”-состояние принимает вид:
- ***YT = A(T, z(τ), XT)****,* (2.1)
- где *XT, YT -* входной и выходной процесс на интервале времени *T;*
- *A(*)-* оператор выходов.

- Согласно (2.1), выходной процесс полностью определяется входным процессом и начальным состоянием и не зависит от того, каким образом система была переведена в это состояние. Отсюда ясно, что уравнение (2.1) ограничивает класс рассматриваемых систем только такими системами, функционирование которых в настоящем не зависит от того, как они функционировали в прошлом.
- Для полного описания процесса функционирования системы необходимо задать условия определения состояния системы. Для этого вводится понятие уравнения состояния:
- ***z(t) = B(τt, z(τ), Xτt)***, (2.2)
- где
- *B(*)* - оператор, устанавливающий однозначную зависимость *z(t)* от пары *(z(τ), Xτt)*, которая задана на интервале *t*, и называемый оператором перехода.
- Уравнения (2.1) и (2.2) имеют достаточно логичное обобщение и на многомерный случай, когда каждая из компонент уравнений имеет векторный вид:

$$X \to \overrightarrow{X}, Y \to \overrightarrow{Y}, Z \to \overrightarrow{Z}$$

- Таким образом, модель функционирования системы должна обеспечивать прогнозирование процесса функционирования на всем интервале функционирования ***T*** (множество времени) по заданному вектору начального состояния записанном в векторном виде входному процессу *(T).* Согласно изложенному выше, для решения этой задачи достаточно задать множества допустимых значений входных ***X*** и выходных ***Y*** процессов, а также множество возможных состояний системы ***Z*** и операторы выхода ***A*** и перехода ***B***. Модель функционирования системы без предыстории представляет собой кортеж
- ***MF = <T, X, Y, Z, A, B>***. (2.3)
- Если все компоненты в (2.3) известны, модель функционирования полностью определена и может быть использована для описания и изучения свойственных системе процессов функционирования. Множества и операторы, составляющие *общесистемную модель* (2.3), могут обладать различными свойствами, совокупность которых позволяет конкретизировать характер функционирования системы:
- *N* – непрерывность;
- *L* – линейность;
- *C* – стационарность;
- *P* – стохастичность (вероятность).
- Наделяя систему теми или иными свойствами общесистемная модель конкретизируется до *системной модели.*

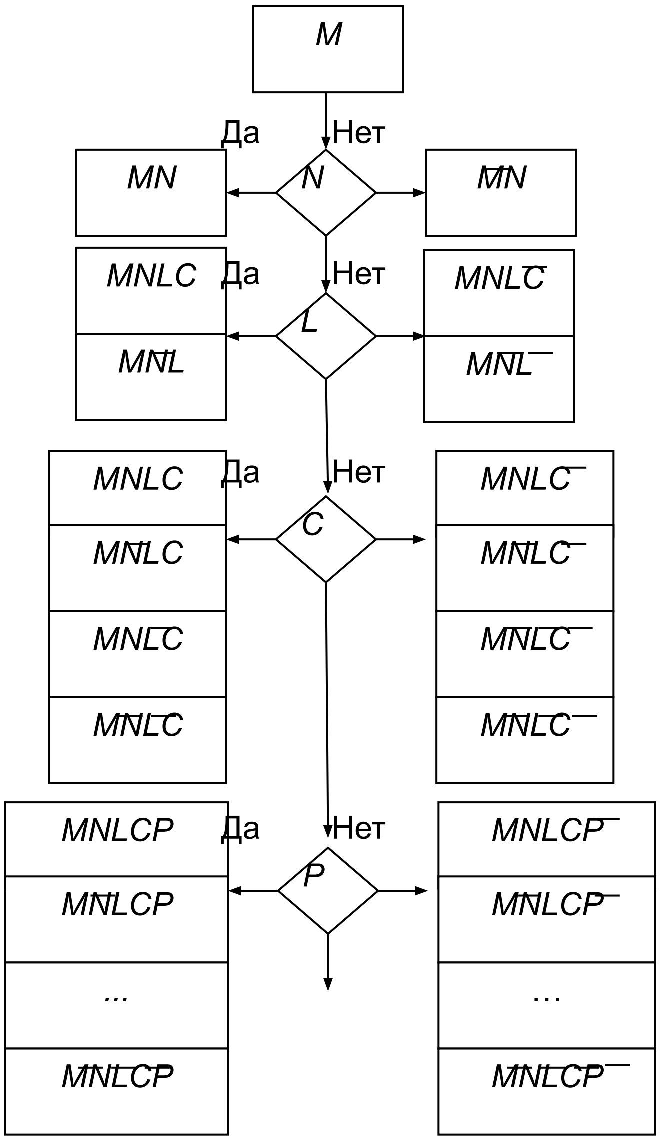
- *<u>Системные свойства:</u>*
- 1). Если интервал функционирования системы ***T = []*** представляет отрезок оси действительных чисел, заданный началом и концом , то система функционирует в непрерывном времени. Если, кроме того непрерывны операторы ***A*** и ***B***, то система наз. <u>непрерывной.</u>
- 2). С т.зр. реакции на внешнее воздействие объекты подразделяют на <u>линейные</u> и <u>нелинейные</u>. <u>Линейными</u> наз. такой объект, реакция которого на совместное воздействие 2-х любых внешних возмущений равно сумме реакций на каждое из этих воздействий, приложенных к системе порознь.
- - принцип суперпозиции,
- (0)=0 (начальное состояние системы),
- где - оператор объекта, устанавливает связь входа и выхода.
- Для линейных систем выполняется принцип суперпозиции.
- 3). Поскольку стационарная система при фиксированном начальном состоянии *Z(t0)* одинаково реагирует на эквивалентные, отличающиеся только сдвигом по времени, входные воздействия, то наложение интервала *t0, t* на оси времени не оказывает влияния на процесс функционирования системы. Модель *M* для стационарных систем не содержит в явном виде интервал функционирования *T*.
- 4) Если в модели *M* операторы *A* и *B* каждой паре *(X, V, Z(t0)*) (вход, состояние) ставят в соответствие *единственные* значения *Y* и *Z,* описываемая этой моделью система называется *<u>детерминированной</u>*. Для стохастической (вероятностной) системы *Y* и *Z*, *случайные* величины, заданные законами распределения.

- **Общесистемная** и **системные** модели функционирования (в дальнейшем термин «модель функционирования» для краткости может заменяться термином «модель» с сохранением исходного смысла) обладают исключительно высокой степенью общности.

- ***Конструктивные модели*** в сущности представляют собой алгоритмы, пользуясь которыми, можно определить значения одних переменных, характеризующих данную систему, по заданным или измеренным значениям других переменных.

- Таким образом, наиболее важные и принципиальные этапы построения модели функционирования системы определяются процессом реализации системотехнической цепочки преобразований **«общесистемная модель системная модель конструктивная модель машинная модель»**.
- Моделирование процессов функционирования конкретной системы должно начинаться с записи всех компонент общесистемной модели (2.3), определения их содержательного смысла и областей изменения. Согласно модели (2.3), необходимо определить: интервал времени, на котором нас интересует функционирование системы; множество входных и выходных воздействий и области их возможных изменений; множество характеристик состояния системы и область их возможных изменений.

Классификация системных моделей



MNLCP - легко мат. описание

MNLCP - нет адекватного мат. описания (трудно)

Инверсия (*N*) – *данное свойство не выполняется, например нет свойства непрерывности*

- Общесистемная и системные модели обладая высшей степенью общности устанавливают закономерности, которые присущи всем или достаточно широкому классу систем. В инженерной практике используют так называемые <u>конструктивные модели,</u> пригодные для инженерных расчетов.
- <u>*КМ*</u> – алгоритмы, пользуясь которыми можно определить значения одних переменных, характеризующих систему по заданным или измеренным значениям других переменных.
- <u>*КМ*</u> – может и должна вырастать из большой общей системной модели путем конкретизации ее свойств.
- При построении моделей функционирования систем применяют следующие подходы:
- непрерывно-детерминированный подход (дифференцированные уравнения);
- дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
- дискретно-стохастический подход (вероятностные автоматы);
- непрерывно-стохастический подход (системы СМО)
- обобщенный / универсальный подход (агрегитивные системы)

- **Модели данных**
- **Сетевая модель**
- В сетевой модели основным внутренним ограничением является требование функциональности связей, т. е. непосредственно могут использоваться только связи 1:1, 1:M, M:1 (функциональной будет обратная связь). Это означает, что каждый экземпляр записи не может быть членом более чем одного экземпляра набора каждого типа. И у каждой записи члена в данном наборе только одна - запись-владелец набора.
- *Пример*: (очевидный, тривиальный) группа студент
- номер группы - владелец набора; запись студента - член набора.
- При этом непосредственное представление связей M:N (студент - преподаватель) невозможно: для представления этих связей вводятся вспомогательные типы записей и две функциональные связи типа 1:M.
- На связи между именами данных могут быть наложены явные ограничения, выражения, зависящие и не зависящие от времени свойства связей. Они задаются типом членства в наборе.
- Фиксированное членство. Запись нельзя разъединить с владельцем или перевести в единственный способ исключения из набора - удаление
- университет - дисплейные классы.
- Обязательное членство. Можно переводить из набора в набор. Персонал дисплейного класса (дежурные инженеры).
- Необязательное членство. Запись можно исключить из набора в произвольный момент времени и без включения в другой набор.
- **Варианты включения в набор:**
- - автоматический тип членства в наборе;
- - ручной тип членства в наборе (явное управление пользователем).

- **Сетевая модель:**
- отношения "один:много" иерархической модели иногда приводит к дублированию объектов, которые имеют связи типа "многие ко многим". Модель данных, реализующая такой тип связей - это ациклический граф.
- *Пример:* снабжение цехов некоторого производства исходными материалами, иерархическая модель - сетевая модель.
- **Организация данных определяется в терминах**:
- *элемент данных*
- агрегат данных - совокупность элементов или других агрегатов; пример: адрес = город, улица, дом, квартира.
- *Запись* - агрегат, не входящий в состав других агрегатов, основная единица обработки.
- *Ключ* - некоторая совокупность элементов, идентифицирующих запись.
- *Групповое отношение (набор)* - иерархическое отношение между записями двух типов, записи одного типа - владельцы отношения, записи второго - члены отношения или подчиненные.
- поликлиника
- диспансеризация основная
- житель работа организация

- Жительство в групповом отношении может быть обязательным и необязательным, (т.е. запись может или не может существовать без владельца.) Обязательное членство может быть фиксированным (автор - книга), или возможен переход к другому владельцу (смена места работы).
- **Операции:**
- *Запомнить* - занести в БД и включить в групповые отношения; включить в групповое отношение - связать подчиненную запись с владельцем;
- *переключить;*
- *обновить* - изменить в извлеченной записи значения элементов;
- *извлечь* - или по ключу или используя групповые отношения (от владельца можно перейти к записям - членам, а от записи - члена к владельцу);
- *удалить* - если удаляемая запись - владелец в групповом отношении, то анализируется класс членства подчиненных записей. Обязательные должны быть откреплены от владельца, фиксированные удаляются вместе с владельцем, необязательные останутся в БД;
- *исключить из группового отношения* - разорвать связь между записью - владельцем и записью членом.

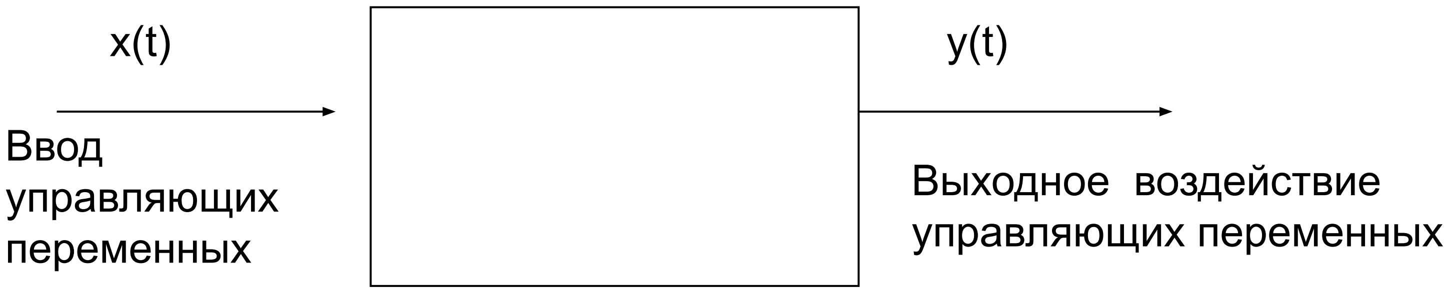
- **Непрерывно детерминированные модели (Д - схемы).**

- Рассмотрим особенности непрерывно детерминированного подхода на примере, используя в качестве ММ дифференциальные уравнения.
- Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной переменной или нескольких переменных, причём в уравнение входят не только их функции но их производные различных порядков.

Пусть имеем уравнение:

$$a_0 \frac{d^k y}{dt^k} + a \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + ... + a_k y = x$$

уравнение «вход-выход» (1)



- Решение уравнения (1) зависит от K(t), от начальных условий . Эти координаты определяют начальное состояние системы.
- Левую часть нужно привести к уравнению 1-го порядка.
- - переменные состояния
- (2)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots\dots \\ \dot{z}_k = -\dfrac{a_k}{a_0} z_1 - \dfrac{a_{k-1}}{a_0} z_2 - \dots\dots - \dfrac{a_1}{a_0} z \;\; + \dfrac{1}{a_0} x \end{cases}$$

- (2) – уравнение в нормальной форме Коши, которое можно записать в матричной форме

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bx \\ y = Cz + Dx \end{cases}$$

- (3) – уравнение в пространстве состояний
- z – в-р столбец переменного состояния

$$z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_k \end{Vmatrix}$$

, необходимое условие

- матрица коэффициентов координат состояния

- - матрица коэффициентов входных воздействий
- - некоторые числовые матрицы
- Сопоставляя (2) и (3) получим числовые матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_k}{a_0} & -\dfrac{a_{k-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{k-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{a_0} \end{Vmatrix}$$

- D = 0 (4)
- В общем случае, когда передаточная функция системы имеет полиноминальную функцию , где , то матрица А определяется выражением (4), а В имеет вид