Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Числовые и функциональные ряды (пр.2)

2016

ТИПЫ РЯДОВ

Числовые ряды

1. Знакоположительные числовые ряды
2. Знакопеременные числовые ряды

Функциональные ряды

1. Функциональные ряды
2. Степенные ряды
3. Ряды Фурье

Числовые ряды

Пусть $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$ члены числовой последовательности

О п р е д е л е н и е. *Числовым рядом называется выражение*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Числа $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n; \ldots$ называются *членами* числового ряда,

а $u_n = f(n)$ - *общим членом* ряда. Для того, чтобы задать числовой ряд, достаточно задать выражение его общего члена как функцию его номера. Например

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} = \frac{3}{1!} - \frac{4}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{6}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} + \ldots .$$

О п р е д е л е н и е. *Сумма первых* n *членов ряда называется* $n-$ *ой частичной суммой ряда и обозначается* S_n, *т.е.*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

В частности: $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ S_3 = u_1 + u_2 + u_3$

Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$.

О п р е д е л е н и е. *Суммой* S *числового ряда называют предел последовательности его частичных сумм* $\{S_n\}$ *при неограниченном увеличении номера частичных сумм*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Числовой ряд называют *сходящимся*, если он имеет сумму (в этом случае существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда) и *расходящимся*, если таковая не существует ($\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует).

Если числовой ряд сходится, то, естественно, он имеет сумму.

Необходимый признак сходимости

Если числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$

сходится, то предел его общего члена обязательно равен нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Если необходимый признак сходимости не выполняется, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$$

то ряд расходится.

Сходимость ряда исследуется по следующей схеме:

1. Проверяется необходимый признак сходимости.
2. Если необходимый признак выполняется, то окончательный вывод о сходимости ряда решается с помощью достаточных признаков сходимости.

Необходимый признак следует понимать так:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд может сходиться,

но может и расходиться.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ ряд точно расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{5}{10} + \ldots$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \ldots.$ расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 0.$

В дальнейшем, если предел общего члена ряда окажется равным нулю, то будем говорить, что ряд может сходится, и продолжать исследование на сходимость с помощью достаточных признаков

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n^3+2n-1} = \frac{5}{4} + \frac{10}{27} + \frac{15}{86} + \ldots.$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{3n^3+2n-1} = 0$

ряд может сходится

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Числовой ряд является знакоположительным, если все его члены положительны

Признак сравнения 1

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (2)$$

причем, начиная с некоторого номера $n = N,$ выполняется условие

$$u_n \leq v_n$$

Тогда из сходимости ряда (2) всегда следует сходимость и ряда (1),
из расходимости ряда (1) следует и расходимость ряда (2).

Признак сравнения 2 (предельный)

Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \neq 0,$$

то оба ряда (1) и (2) одновременно либо сходятся, либо расходятся.

При применении признака сравнения данный ряд сопоставляется с одним из, так называемых, эталонных рядов, сходимость или расходимость которых установлена.

Эталонные ряды

1.Геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n :$$

Если $|q| < 1 -$ ряд сходится

Если $|q| \geq 1 -$ ряд расходится

2. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} :$$

Если $k > 1,$ то ряд сходится

Если $k \leq 1,$ то ряд расходится

3. Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad -$$ ряд расходится

Например, сходящимися рядами будут являться следующие ряды

$$k > 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}},$$

$$|q| < 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

Например, расходящимися рядами будут являться следующие ряды

$$k < 1:$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2} \cdot n^{3/5}},$$

$$|q| \geq 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

Признак сравнения применяется для решения вопроса о сходимости, к примеру, рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+1},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+4n^5+2}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right),\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right),\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^4}.$$

При использовании этого признака нужно привести данный ряд к эквивалентному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^k}\quad \sum_{n=1}^{\infty}A\,q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^k}\quad \sum_{n=1}^{\infty}A\,q^n$$

При этом очень часто используется прием выделения главных членов выражения, а также таблица эквивалентных бесконечно малых величин

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин

$$\alpha(x) \to 0$$

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\mathrm{t}g\,\alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \mathrm{a}rctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}, \qquad e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x),$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}. \qquad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),$$

- 1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ -- ряд расходится, так как $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

  а гармонический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2\sqrt{n}}$ -- ряд сходится, так как

  $\frac{\sin^2 n}{n^2\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{5/2}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$

  сходится как обобщенный гармонический с показателем $k = 5/2 > 1.$

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n}{1+n^2}$ -- ряд расходится, так как члены его для достаточно больших n эквивалентны членам гармонического ряда

$$\frac{1+2n}{1+n^2}\sim\frac{2n}{n^2}\sim\frac{2}{n},$$ а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ расходится.

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(1+n)(n+2)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ –

ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем

$$k=2>1$$

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+4n}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ – ряд расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k=2/3<1$

- 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4} \sin\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^{3/2}} -$

ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем

$k = 3/2 > 1$

Здесь использовано то, что $\sin\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$

- 7. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot arctg\frac{1}{n^4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} -$

ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем

$k = 3 > 1$

Здесь использована эквивалентность

$arctg\frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$

- 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+4}\cos\frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ – ряд расходится

В данном случае использовано то обстоятельство, что

$$\cos\frac{1}{2\sqrt{n}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

- 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^4}$ – ряд сходится

как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 4 > 1$

Здесь мы воспользовались тем, что при $n \to \infty$

$$1-\cos\frac{1}{n^2} \sim \frac{(1/n^2)^2}{2} = \frac{1}{2n^4}.$$

• 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ – ряд расходится

как обобщенный гармонический с показателем $k = 1/2 < 1.$

Здесь использовано $\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$

• 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ –

ряд сходится как геометрический со знаменателем $q = 1/2 < 1$

• 12. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{3n} \cdot e^{-2n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{e^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^3}{e^2}\right)^n$ –

ряд расходится как геометрический со знаменателем $q = \frac{125}{e^2} > 1.$

Признак Даламбера

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует предел отношения последующего члена ряда u_{n+1}
к предыдущему u_n при $n \to \infty$ равный числу p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p, \quad \text{то} \begin{cases} \text{при } p < 1 - & \text{ряд сходится} \\ \text{при } p > 1 - & \text{ряд расходится} \\ \text{при } p = 1 - & \text{вопрос о сходимости не решен} \end{cases}$$

Признак Даламбера применяется для решения вопроса о сходимости таких рядов, общие члены которых содержат степенные, показательные выражения и факториалы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3\ n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^2}{7^{2n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}.$$

При применении признака Даламбера может встретиться необходимость использования второго замечательного предела.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Применяя признак Даламбера, необходимо:

1) записать $(n+1)-$ ый член ряда $\boldsymbol{u_{n+1}}$,

2) найти предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = p,$$

3) сравнить полученное значение p с единицей и сделать вывод о сходимости ряда.

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)^2}$.

$$u_n = \frac{5^n}{(2n+1)^2}, \quad u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(2n+3)^2} \cdot \frac{(2n+1)^2}{5^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = 5 > 1$$ -- ряд расходится

Здесь учтено, что $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2} = 1.$

• 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^3\cdot 7^n}}$.

$$u_n=\frac{2n-1}{\sqrt{n^3\cdot 7^n}},\quad u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}}=\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt{n^3\cdot 7^n}}{(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}}\cdot\frac{\sqrt{7^n}}{\sqrt{7^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{7}}<1$$

-- ряд сходится.

Здесь учтено, что при $n\to\infty \quad \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}}\to 1,\ \frac{2n+1}{2n-1}\to 1.$

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$

$$u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \,(n+1)\, n!}{n!\,(n+1)\, n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718... > 1$$

-- ряд расходится

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\, n!(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1) \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

-- ряд сходится

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}$.

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{n!}, \ u_{n+1} = \frac{\sqrt{3(n+1)+2}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+5}\, n!}{n!(n+1)\sqrt{3n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$ -- ряд сходится

Здесь учтено, что при $n \to \infty \quad \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}} \to 1, \ \frac{1}{n+1} \to 0.$

Радикальный признак Коши

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует предел корня $n -$ ой степени из общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q, mo \begin{cases} npu \;\; p<1 - \text{ ряд сходится} \\ npu \;\; p>1 - \text{ ряд расходится} \\ npu \;\; p=1 - \text{ вопрос о сходимости не решен} \end{cases}$$

Радикальный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{n}, \;\; \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{n/2}\frac{1}{2n+9}, \;\; \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{3n} n}, \;\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n+4}\right)^{n}.$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+4}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n+4}=\frac{3}{5}<1$$

-- ряд сходится

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{8n+1}\right)^{n^2}.$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{8n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{8n+1}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^{n}=0<1$$ -- ряд сходится

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3+2/n}=\left(\frac{7}{4}\right)^3>1$$

ряд расходится.

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^{2n}\frac{1}{\sqrt{6n+5}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n+5}}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n+5}\right)^{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{6n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n+5}=0<1$$

ряд сходится.

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{5} < 1$$ -- ряд сходится.

- 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 6}=e^6>1$$

ряд расходится.

Интегральный признак Коши

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая

непрерывная, положительная и монотонно убывающая

функция такая, что при натуральных значениях аргумента значения функции совпадают со значениями членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ т.е. } u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx,$$

и расходится, если этот интеграл расходится.

Чтобы составить подынтегральную функцию достаточно заменить в выражении общего члена ряда n на x

Несобственный интеграл сходится, если он равен конечному числу и расходится, если равен бесконечности или не существует.

Интегральный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^k n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{n^2}.$$

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2}.$

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln^2(3x+2)\,dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int_1^{\infty}\ln^2(3x+2)\,d(\ln(3x+2))=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\ln^3(3x+2)}{3}\Big|_1^{\infty}=\infty$$

интеграл и вместе с ним исходный ряд расходятся.

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^5(n+2)}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^5(x+2)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+2))}{\ln^5(x+2)} = -\frac{1}{4\ln^4(x+2)}\Big|_1^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{4\ln^4 3} = const$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln^3(2n+1)}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{\ln^3(2x+1)}} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{d(\ln(2x+1))}{\sqrt{\ln^3(2x+1)}} = \frac{1}{2}\frac{-2}{\sqrt{\ln(2x+1)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\ln(2x+1)}}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} = const$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, d(-\sqrt{x}) = -\frac{2}{e^{\sqrt{x}}}\Big|_1^{\infty} = -\frac{2}{\infty} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

-- ряд сходится, так как сходится несобственный интеграл

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Условная и абсолютная сходимости

Знакочередующимся называется числовой ряд, в котором знаки членов ряда чередуются

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot u_n + \ldots$$

Достаточным признаком сходимости таких рядов является **Признак Лейбница**

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$ сходится, если абсолютная величина его членов $|(-1)^{n+1}\cdot u_n| = u_n$ монотонно убывает, а предел общего члена равен нулю, т.е.

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Абсолютная и условная сходимости

О п р е д е л е н и е. *Знакочередующийся ряд называют* а б с о л ю т н о сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Если же данный ряд по признаку Лейбница сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то исходный ряд называют у с л о в н о сходящимся.

Схема исследования на сходимость знакочередующихся рядов

1. Проверяем выполнение признака Лейбница, находим $\lim_{n\to\infty} u_n$.

   Если предел общего члена ряда не равен нулю, $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$

   то утверждаем, что ряд расходится.

   Если же признак Лейбница выполняется, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$

   то исследуем ряд на абсолютную сходимость.

2. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда и исследуем сходимость полученного знакоположительного ряда с помощью одного
из достаточных признаков сходимости, рассмотренных выше.

Делаем вывод:

а) если ряд из абсолютных величин сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно,

б если ряд из абсолютных величин расходится,
то исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

- 1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+5}{3n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \frac{4n+5}{3n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{3n+1} = 4/3 \neq 0$$

-- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{\pi}{n^2}.$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \cos\frac{\pi}{2n}\right| = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2n} = \cos 0 = 1 \neq 0 -$$

-- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\, n^3\cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}}.$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\, n^3\cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot 5^n}{\sqrt{2n+1}} = \infty \neq 0$$

-- ряд расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

• 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}$.

$$1.\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}} = 0$$

-- ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Проверим сходимость соответствующего знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$$

-- ряд расходится.

Вывод: исходный ряд сходится условно.

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^5}{6^n \sqrt{3n+7}}$.

$$1.\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n^5}{6^n \sqrt{3n+7}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{6^n \sqrt{3n+7}} = 0$$

-- ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем его сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{6^n \sqrt{3n+7}}.$$

Используем признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{6^{n+1}\sqrt{3n+10}} \cdot \frac{6^n \sqrt{3n+7}}{n^5} = 1/6 < 1$$

ряд сходится.

Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

- 6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$.

$$1.\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}=0,$$

ряд сходится по признаку Лейбница

2. Сходимость соответствующего знакоположительного ряда проверяем с помощью интегрального признака

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty}=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}=const$$

-- интеграл и ряд сходятся.

Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

- 7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$

Этот ряд расходится, так как предел общего члена ряда по абсолютной величине равен 1

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|=1\neq 0.$$

Спасибо за внимание