



Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

**Элементы теории функций комплексного
переменного (Пр.2)**

2016



Комплексные числа

Понятие комплексного числа.

В множестве действительных чисел действие извлечения корня четной степени из отрицательного числа невыполнимо.

Выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-7}$ не имеют смысла и, поэтому, уравнения

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^4 + 16 = 0, \quad x^2 + 6x + 25 = 0$$

на этом множестве решений не имеют.

Для того, чтобы сделать возможным извлечение корня четной степени из отрицательного числа множество действительных чисел было расширено добавлением к нему множества мнимых чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Число, квадрат которого равен -1 , называется мнимой единицей и обозначается буквой i .

$$i^2 = -1 .$$

Итак, используя мнимую единицу, можно записать корни квадратных уравнений:

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 = -1, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 = -4, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 25 = 0, \quad x_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16} = \\ &= -3 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)} = -3 \pm 4\sqrt{-1} = -3 \pm 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2 = 0, \quad x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{7 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot i \end{aligned}$$

Определение 2. Число вида $z = x + iy$, где

x, y — действительные числа, i мнимая единица,

называется **комплексным**

числом. x называется **действительной частью** комплексного числа

и обозначается $x = \operatorname{Re}z = \operatorname{Re}(x + iy)$

Число y называется **мнимой частью** числа и обозначается

$$y = \operatorname{Im}z = \operatorname{Im}(x + iy)$$

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$,

называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Число $z = iy$, не содержащее действительной части,

называется **чисто мнимым** числом.

Определение 3. Комплексное число, имеющее ту же действительную и противоположную по знаку мнимую часть, называется

комплексно-сопряженным с числом $z = x + iy$ и обозначается

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Определение 4. Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, или r :

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Очевидно, что $|z| \geq 0$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. *Условие равенства комплексных чисел:* два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части

$$z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

2. Сложение и вычитание комплексных чисел:

при сложении и вычитании комплексных чисел складываются и вычитаются их действительные и мнимые части

- $(2 - 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + i(-3 + 4) = 3 + i,$
- $(3 - 5i) - (2 + 4i) = (3 - 2) + i(-5 - 4) = 1 - 9i,$
- $(1 + 4i) - (\sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot i) = (1 - \sqrt{3}) + i \cdot (4 + \sqrt{2}).$

3. Умножение комплексных чисел на постоянное число:

при умножении комплексных чисел на постоянное число нужно умножить на это число его действительную и мнимую части

- $2(3 - i) = 6 - 2i,$
- $5(4 + 2i) = 20 + 10i,$
- $i(1 - 2i) = i - 2i^2 = i + 2,$ так как $i^2 = -1$.

Можно совместить два

действия.

- $2(3 - i) + 5(4 + 2i) = 6 - 2i + 20 + 10i = 26 + 8i,$
- $4(2 + i) + i(1 - 2i) = 8 + 4i + i - 2i^2 = 8 + 5i + 2 = 10 + 5i.$

4. Умножение комплексных чисел :

при умножении двух комплексных чисел нужно умножить их как обычные многочлены, учесть, что $i^2 = -1$ и привести подобные

- $(2 - 3i)(1 + 4i) = 2 + 8i - 3i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i,$
- $(3 - 5i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 10i - 20i^2 = 6 + 2i + 20 = 26 + 2i,$
- $(4 - 3i)^2 = 16 - 24i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

Найдем произведение двух комплексно-сопряженных чисел

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Итак, произведение $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

есть действительное число, равное сумме квадратов действительной и мнимой части комплексного числа. Или: произведение двух комплексно-сопряженных чисел равно квадрату модуля комплексного числа

- $(3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13.$
- $(1 - i) \cdot (1 + i) = 1^2 + 1^2 = 2.$
- $(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}i) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2 = 5.$

З а м е ч а н и е. Используя результат произведения комплексно- сопряженных чисел, можно проводить разложение на множители суммы квадратов действительных чисел

- $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$
- $x^2 + 25 = (x + 5i) \cdot (x - 5i).$
- $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1 = (x + 2 + i)(x + 2 - i).$

5. Деление комплексных чисел :

при делении двух комплексных чисел нужно умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное знаменателю выражение, провести умножение в числителе и упростить с учетом, что в знаменателе будет произведение сопряженных чисел, т.е. действительное число

$$\begin{aligned} \bullet (2 - 3i) : (1 + 4i) &= \frac{2 - 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{2 - 3i - 8i + 12i^2}{1 + 16} = \\ &= \frac{-10 - 11i}{1 + 16} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i. \end{aligned}$$

$$\bullet (4 + 5i) : i = \frac{4 + 5i}{i} = \frac{(4 + 5i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-4i - 5i^2}{-i^2 = 1} = -4i - 5i^2 = 5 - 4i.$$

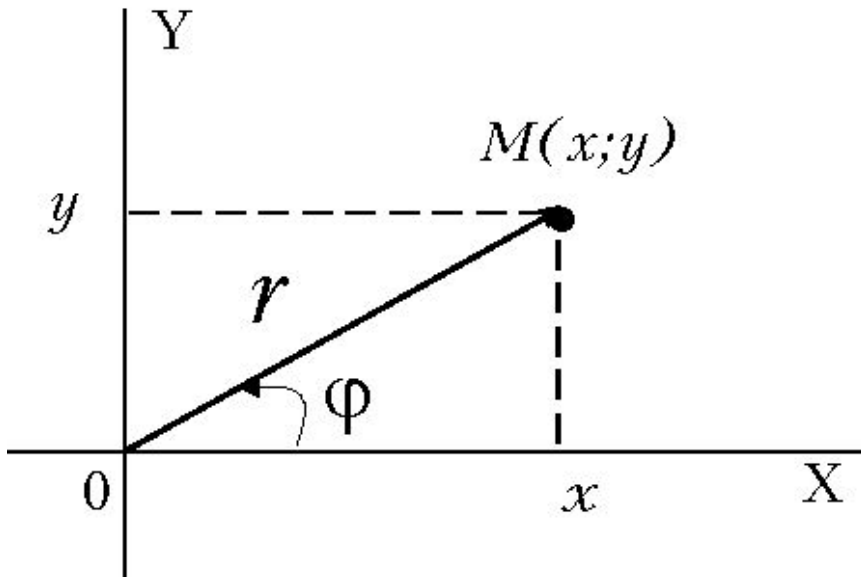
$$\bullet \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{+1} = -i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i} = -i.$$

Построение комплексных чисел на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости на оси OX откладывается действительная часть комплексного числа, и ось OX называется действительной осью, а на оси OY откладывается мнимая часть комплексного числа, и ось OY называется мнимой осью комплексной плоскости XOY .

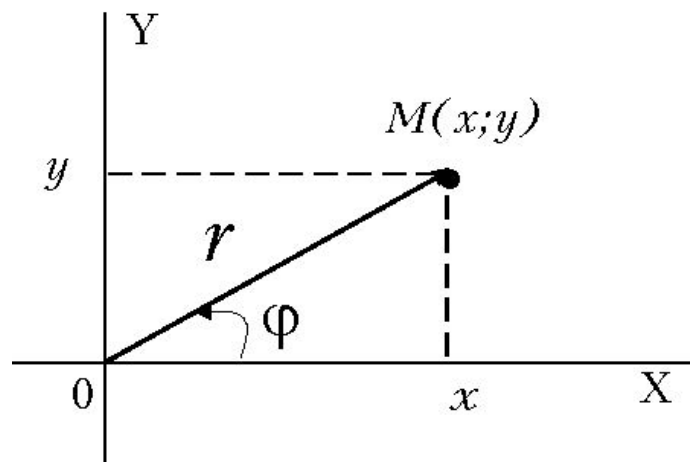
Тогда комплексное число изображается точкой на плоскости с координатами x и y , а также радиус-вектором этой точки $\vec{OM} = \{x, y\}$.

Длина радиуса-вектора точки есть модуль комплексного числа



$$|z| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



Положение точки $z = x + iy$
комплексной плоскости определяется
не только декартовыми (x, y) ,
но и полярными координатами (r, φ)
где r — расстояние от точки до
начала координат, т.е. длина
или **модуль** радиус-вектора,

φ — угол между положительным направлением действительной оси
и радиусом-вектором. Этот угол называется

аргументом комплексного числа и определяется с точностью до
 $2\pi k, k = 1, 2, 3, \dots$

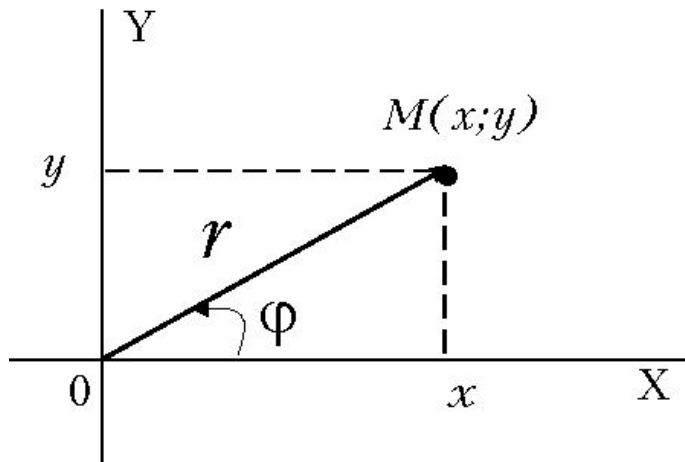
Множество всех значений угла обозначается $Arg z$

При работе с комплексными числами обычно используется так
называемое **главное значение** аргумента $\varphi = arg z$

которое удовлетворяет условию $-\pi \leq arg z \leq \pi$,

Таким образом, $Arg z = arg z + 2\pi k$.

Из рисунка видно, что



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$
$$z = x + iy = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi$$

и любое комплексное число
можно представить в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Подобная запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Число, комплексно-сопряженное к данному, запишется в виде

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Любое число можно перевести из тригонометрической формы записи в алгебраическую и обратно. Кроме того, из тригонометрической формы записи можно получить еще показательную форму записи комплексного числа.

Принято определять аргумент числа в зависимости от знаков действительной и мнимой частей числа следующим образом:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0, \text{ (I, IV)}, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0, \text{ (II)}, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y \leq 0, \text{ (III)} \end{cases}$$

Приведем значения арктангенсов некоторых углов

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} \infty = \pi/2, \quad \operatorname{arctg} (-\infty) = -\pi/2.$$

$$\operatorname{arctg} (1/\sqrt{3}) = \pi/6, \quad \operatorname{arctg} (-1/\sqrt{3}) = -\pi/6,$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \pi/4, \quad \operatorname{arctg} (-1) = -\pi/4,$$

$$\operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = \pi/3, \quad \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\pi/3.$$

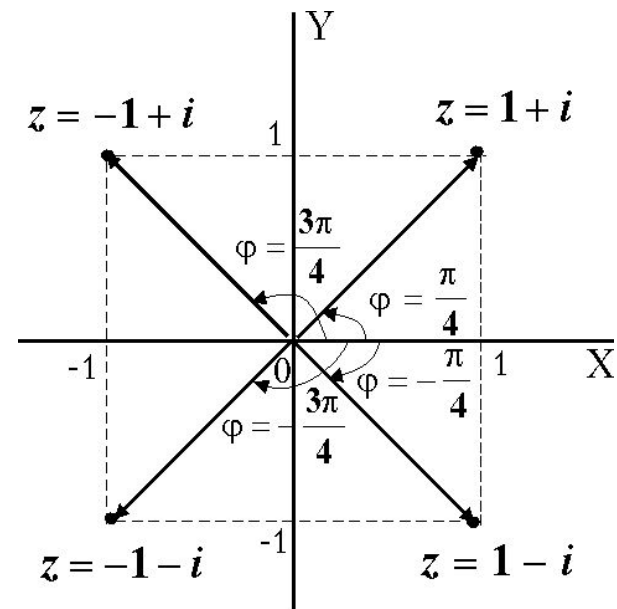
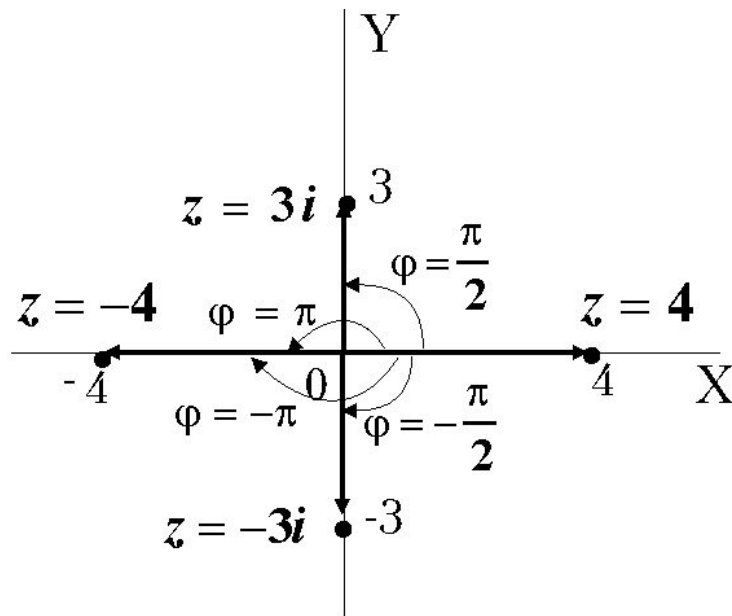
Зачастую в расчетах далеко не всегда участвуют основные острые углы, тангенсы которых известны. В случае произвольного угла используем калькулятор, который с некоторой степенью точности даст значение угла в радианах или в градусах:

- $\operatorname{arctg}(2,835) \approx 1.23 \approx 70,6^\circ$,
- $\operatorname{arctg}(67,83) \approx 1.56 \approx 89,2^\circ$,
- $\operatorname{arctg}(-0,324) \approx -0,31 \approx -18^\circ$.

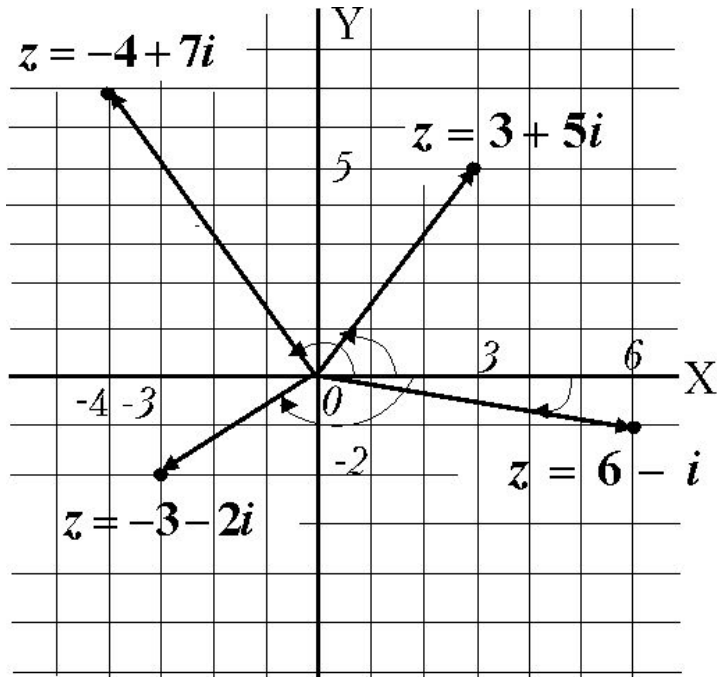
Для правильного определения аргумента следует всегда изобразить число на комплексной плоскости для того, чтобы определить, в какой четверти находится данное число. .

Рассмотрим примеры нахождения аргумента комплексных чисел.

- $z = 4, \quad \arg(4) = \arg(4 + 0 \cdot i) = \arctg(0/4) = \arctg 0 = 0,$
- $z = -4, \quad \arg(-4) = \arg(-4 + 0 \cdot i) = \arctg(0/(-4)) = \arctg 0 + \pi = \pi,$
- $z = 3i, \quad \arg(3i) = \arg(0 + 3i) = \arctg(3/0) = \arctg \infty = \pi/2,$
- $z = -3i, \quad \arg(-3i) = \arg(0 - 3i) = \arctg(-3/0) = \arctg(-\infty) = -\pi/2,$
- $z = 1 + i, \quad \arg(1 + i) = \arctg(1/1) = \arctg 1 = \pi/4$
- $z = 1 - i, \quad \arg(1 - i) = \arctg(-1/1) = \arctg(-1) = -\pi/4,$
- $z = -1 + i, \quad \arg(-1 + i) = \arctg(1/(-1)) = \arctg(-1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4,$
- $z = -1 - i, \quad \arg(-1 - i) = \arctg(-1/(-1)) = \arctg 1 - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4.$



Если значения аргумента не являются табличными, то вычисления арктангенсов выполняются с помощью калькулятора и аргумент записывается с учетом четверти, в которой находится комплексное число.



- $arg(3 + 5i) = arctg(5/3) =$
 $= arctg 1,667 \approx 1,030 \approx 59^\circ$

- $arg(-4 + 7i) = arctg(-7/4) + \pi =$
 $= arctg(-1,75) + \pi \approx -1,05 + 3,14 \approx 2,09$

$$\approx -60,3^\circ + 180^\circ \approx 119,7^\circ$$

- $arg(-3 - 2i) = arctg(2/3) - \pi =$
 $= arctg 0,667 - \pi \approx 0,588 - 3,14 \approx -2,55$

$$\approx 33,7^\circ - 180^\circ \approx -146,3^\circ$$

- $arg(6 - i) = arctg(-1/6) =$
 $= arctg(-0,167) \approx -0,165 \approx -9,5^\circ.$

Комплексное число в показательной форме

Пусть комплексное число записано в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Тогда получим $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$

Выражение $z = re^{i\varphi}$ - *показательная форма* записи числа .

Отметим, что комплексно-сопряженное число в показательной форме будет иметь вид

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}.$$

Показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа применяется для выполнения операций умножения, деления комплексных чисел, а также для возведения в целую положительную степень и извлечения корня.

Действия над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$z_1 : z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} : r_2 e^{i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

а) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

б) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

- $3e^{3\pi i/4} \cdot 2e^{2\pi i/3} = 6e^{i(3\pi/4 + 2\pi/3)} = 6e^{(17\pi/12)i}$,

- $4e^{\pi i/4} \cdot 5e^{-\pi i/3} = 20e^{i(\pi/4 - \pi/3)} = 20e^{-\pi i/12}$,

- $\frac{3e^{3\pi i/4}}{2e^{2\pi i/3}} = \frac{3}{2}e^{i(3\pi/4 - 2\pi/3)} = \frac{3}{2}e^{\pi i/12}$,

Отметим ряд интересных результатов

Число i имеет модуль равный единице, и аргумент $\frac{\pi}{2}$, т.е. $i = e^{i\pi/2}$.

Поэтому, при умножении на число i некоторого числа $z = r e^{i\varphi}$

к аргументу прибавится $\frac{\pi}{2}$, что приведет к повороту вектора,

изображающего число z , на 90° в положительном направлении без изменения длины.

Перевод числа из одной формы записи в другую

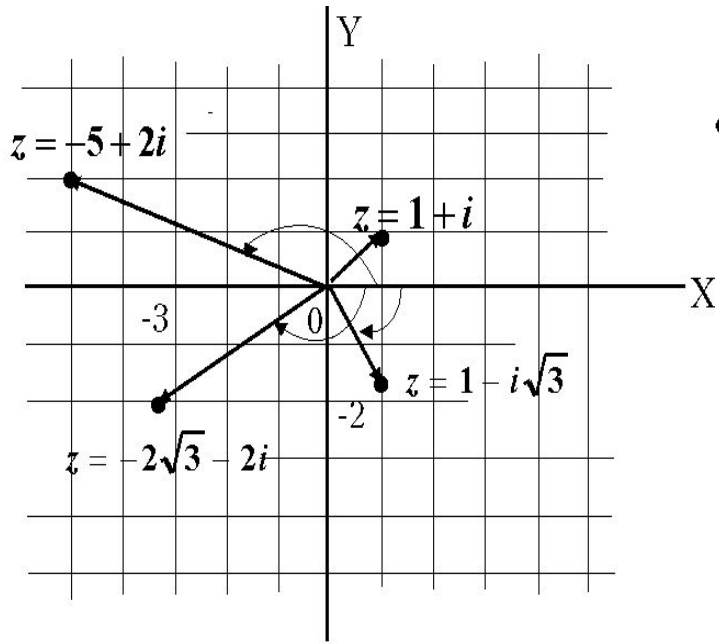
1. От алгебраической к тригонометрической и показательной

Для перехода к тригонометрической и показательной форме представления комплексного числа находим:

1) модуль числа по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$

2) аргумент числа $\varphi = \arg z$

$$z = x + iy \Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = r \cdot e^{i\varphi}$$



$$\bullet 1. z = 1 + i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \end{array} \right|$$

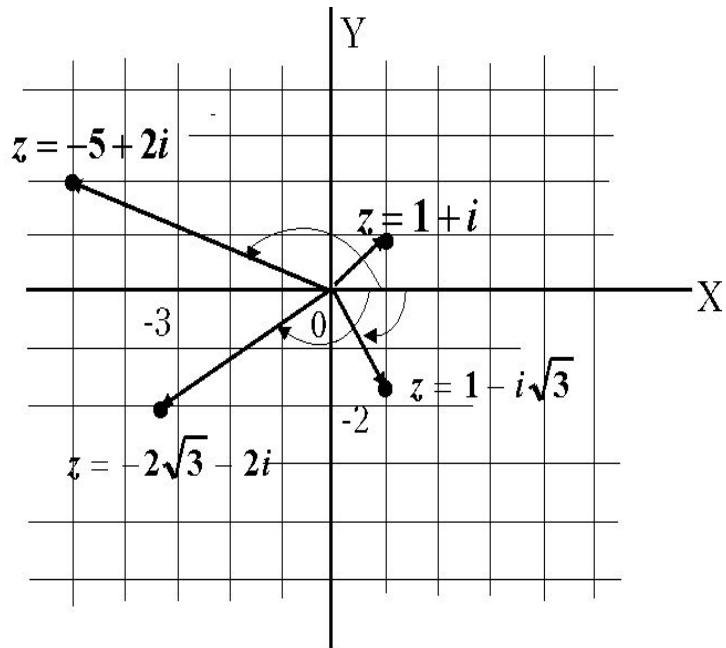
$$z = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet 2. z = 1 - i\sqrt{3} = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3 \end{array} \right|$$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$



• 3. $z = -5 + 2i =$

$$\left| \begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}, \quad \varphi = \arg z = \\ &= \operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -0,38 + 3,14 = 2,76 \\ &\operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -21,8^\circ + 180^\circ = 158,2^\circ \end{aligned} \right|$$

$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}e^{2,76i}.$$

$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}(\cos 2,76 + i \sin 2,76).$$

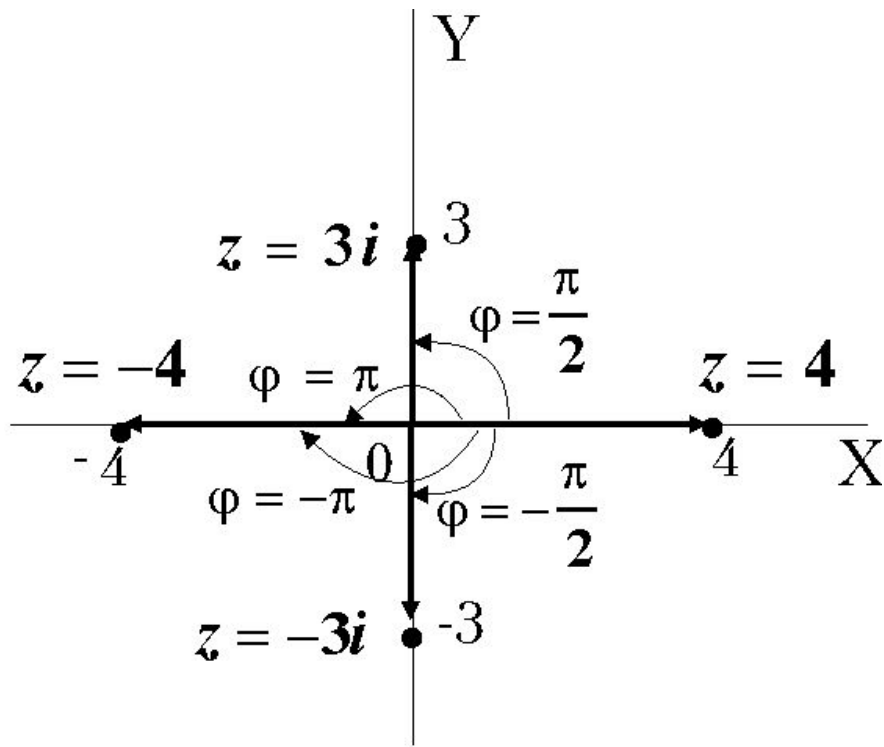
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}(\cos 158,2^\circ + i \sin 158,2^\circ)$$

• 4. $z = -2\sqrt{3} - 2i =$

$$\left| \begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4, \quad \varphi = \arg z = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \\ &= \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \end{aligned} \right|$$

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-\frac{5\pi}{6}i}.$$

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$



- $z = 4, |z| = 4, \arg(4) = 0 \Rightarrow z = 4e^{0i} = 4(\cos 0 + i \sin 0).$
- $z = -4, |z| = 4, \arg(-4) = \pi \Rightarrow z = 4e^{\pi i} = 4(\cos \pi + i \sin \pi).$
- $z = 3i, |z| = 3, \arg(3i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 3e^{\pi/2 i} = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$
- $z = -3i, |z| = 3, \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 3e^{-\pi/2 i} = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right).$

2. От показательной к алгебраической

Пусть комплексное число задано в показательной форме $z = r e^{i\varphi}$

Для перехода к алгебраической форме:

1) сначала переходим к тригонометрическому представлению числа

$$z = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cos \varphi + i r \sin \varphi.$$

2) Вычисляем $\cos \varphi$, $\sin \varphi$.

3) Находим действительную $x = r \cos \varphi$ и мнимую $y = r \sin \varphi$

части числа и записываем окончательно число в алгебраической форме

$$z = x + iy$$

- $z = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1.$

- $z = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$

- $z = 2e^{\pi i} = 2[\cos \pi + i \sin \pi] = 2(-1 + i \cdot 0) = -2.$

- $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = (0 + i) = i.$

- $z = e^{\frac{-\pi i}{2}} = \left[\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right] = (0 - 1 \cdot i) = -i.$

- $z = 3e^{\frac{-2\pi i}{3}} = 3 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right] = 3 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

- $z = 7e^{-2,015i} = 7[\cos(-2,015) + i \sin(-2,015)] \approx$
 $\approx 7(-0,43 - 0,90 i) = -3,01 - 6,32i.$

Возведение в степень и извлечение корня

Показательная и тригонометрическая форма записи комплексных чисел
Удобна для выполнения действий возведения в большую степень
и извлечения корня

$$z^n = \left(r e^{i(\varphi+2\pi k)} \right)^n = r^n e^{i(n\varphi+2\pi nk)} = r^n e^{in\varphi}.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Соответствующие формулы в тригонометрической форме называются
формулами Муавра

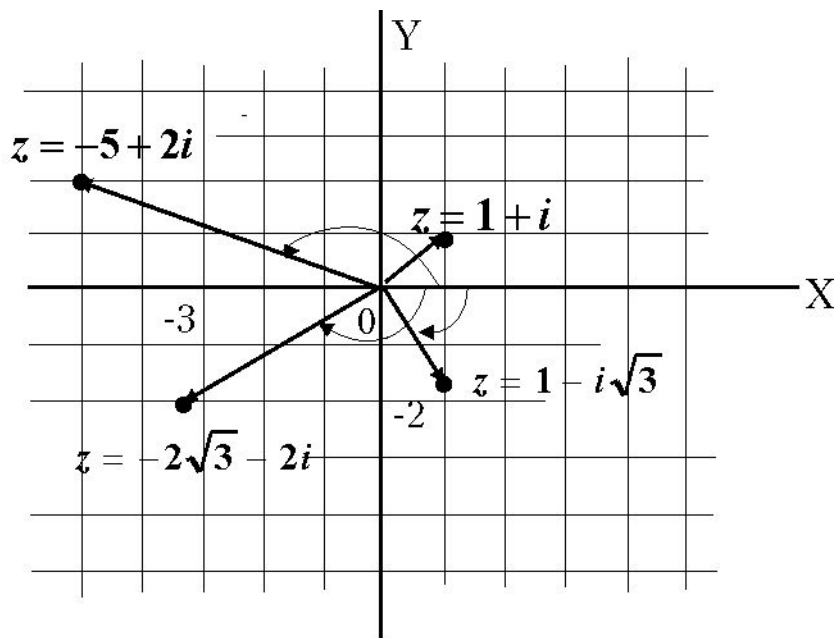
$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Задача. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

• 1. $(-2\sqrt{3} - 2 \cdot i)^6$.

Перейдем к показательной форме записи. Изобразим число на комплексной плоскости. Оно находится в 3-ей четверти.



1) Находим модуль числа

$$|-2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

2) Находим аргумент

$$\begin{aligned} \arg(-2\sqrt{3} - 2i) &= \operatorname{arctg} \frac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

3) Записываем число $z = 4e^{-5\pi i/6}$.

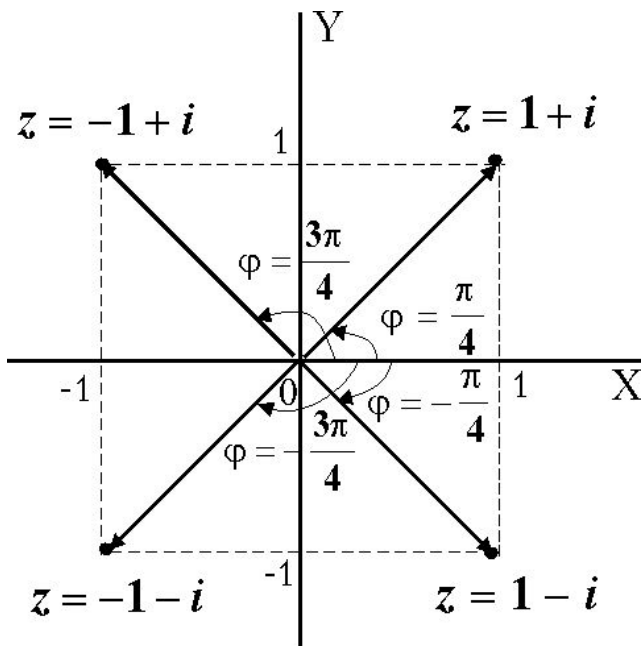
4) Возводим в степень

$$\begin{aligned} z^6 &= \left(4e^{-5\pi i/6}\right)^6 = 4^6 e^{(-5\pi i/6) \cdot 6} = 2^{12} e^{-5i\pi} = \\ &= 4^{12} (\cos(-5\pi) + i \sin(-5\pi)) = 4^{12} \cos(-5\pi) = -4^{12}. \end{aligned}$$

- 2. $\sqrt[3]{-2 + 2i}$.

Записываем число в показательной форме $|-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$.

$$\sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt{8} e^{i(3\pi/4 + 2\pi k)}.$$



При извлечении корня 3-ей степени получим 3 значения корня.

Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} e^{\frac{i(3\pi/4 + 2\pi k)}{3}} = \sqrt{2} e^{i(\pi/4 + 2\pi k/3)}$$

и перебираем значения k от $k = 0$

до $k = (n - 1) = 3 - 1 = 2$.

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \left\{ \begin{array}{l} k=0: = \sqrt{2} e^{i(\pi/4)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i. \\ \\ k=1: \sqrt{2} e^{i(\pi/4+2\pi/3)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \approx \\ \approx 1,4(-0,97 + 0,26i) \approx -1,36 + 0,36i. \\ \\ k=2: \sqrt{2} e^{i(\pi/4+4\pi/3)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \\ \approx 1,4(0,26 - 0,97i) \approx 0,36 - 1,36i. \end{array} \right.$$

- 3. Вычислит $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$, если $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$.

Выполним сложение и умножение чисел в алгебраической форме

$$\begin{aligned} \frac{(1 - 2i) \cdot (-3 + 4i)}{(1 - 2i) + (-3 + 4i)} &= \frac{3 + 6i + 4i - 8i^2}{-2 + 2i} = \\ &= \frac{3 + 6i + 4i + 8}{-2 + 2i} = \frac{11 + 10i}{-2 + 2i}, \end{aligned}$$

а затем деление

$$\begin{aligned} \frac{(11 + 10i)(-2 + 2i)}{(-2 + 2i)(-2 + 2i)} &= \frac{(-22 - 20i + 22i + 20i^2)}{(-2)^2 + 2^2} = \frac{-22 + 2i - 20}{4 + 4} = \\ &= \frac{-42 + 2i}{8} = -\frac{42}{8} + i\frac{2}{8} = -\frac{21}{4} + i\frac{1}{4} = -5,25 + 0,25i, \end{aligned}$$

Функции комплексного переменного

О п р е д е л е н и е. Если каждому значению комплексной переменной $z = x + iy$ соответствует определенное значение комплексной

$w = u + iv$, то говорят, что w есть функция независимой переменной z и пишут $w = f(z)$

Аналогично тому, что задание комплексного числа равносильно заданию пары действительных чисел, задание функции комплексной переменной

Z равносильно заданию двух функций пары действительных переменных x и y

А именно: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} w(z),$$

Преобразования, целью которых служит нахождение функций

$u(x, y)$, $v(x, y)$, называется выделением действительной и мнимой

частей функции комплексного переменного.

$$\bullet 1. w = z^2 \Rightarrow u + iv = (x + iy)^2 \Rightarrow$$

$$u + iv = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

$$\bullet 2. w = \frac{z}{z - 3i}.$$

$$\frac{z}{z - 3i} = \frac{x + iy}{x + iy - 3i} = \frac{x + iy}{x + i(y - 3)} = \frac{(x + iy)(x - i(y - 3))}{x^2 + (y - 3)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + ixy - ix(y - 3) - i^2 y(y - 3)}{x^2 + (y - 3)^2} = \frac{x^2 + y(y - 3)}{x^2 + (y - 3)^2} + i \frac{3x}{x^2 + (y - 3)^2}.$$

$$u = \frac{x^2 + y(y - 3)}{x^2 + (y - 3)^2}, \quad v = \frac{3x}{x^2 + (y - 3)^2}.$$

Основные элементарные функции

1. Степенная функция $w = z^n$

$$\begin{aligned}w = z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = \\ &= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 + i^3y^3 =\end{aligned}$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i3x^2y - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3),$$

$$u(x; y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x; y) = 3x^2y - y^3.$$

Отметим, что при $n \leq 3$ можно пользоваться алгебраическим представлением комплексного числа, а при больших значениях показателя степени -- тригонометрическим или показательным.

2. Показательная функция $w = e^z$

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Выделяем действительную и мнимую части функции

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y,$$

а также находим модуль и аргумент

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{arg} e^z = y.$$

Основные
правила

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad (e^z)^n = e^{nz}.$$

Вычислим значения функции в некоторых точках

- 1. $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i.$
- 2. $e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1 = 0,54 - 0,84i.$
- 3. $e^{2+5i} = e^2 (\cos 5 + i \sin 5) \approx 7.39(0,28 - 0,96i) \approx 2,07 - 7,09i.$

3. Логарифмическая функции $w = \ln z$ и $w = \text{Ln} z$

Если комплексную переменную $z = x + iy$ представить в показательной форме

$$z = |z| e^{i \text{Arg} z} = |z| \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}, \text{ где } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ модуль}$$

$\varphi = \text{arg} z$ — аргумент числа

$$w = \text{Ln} z = \text{Ln} |z| e^{i \text{Arg} z} = \ln(|z| \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}) = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k).$$

$$w = \ln z = \ln(|z| \cdot e^{i \text{arg} z}) = \ln |z| + i \text{arg} z = \ln |z| + i\varphi.$$

$$\text{Ln} z = \ln |z| + i(\text{arg} z + 2\pi k), \quad \ln z = \ln |z| + i \text{arg} z$$

Действительная часть функции $u(x; y) = \ln |z|,$

мнимая -- $v(x; y) = \text{Arg} z.$

$w = \ln z$ -- главное значение логарифма при $k = 0$

Свойства логарифмов:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2, \quad \ln z^\alpha = \alpha \ln z.$$

Задача. Вычислить значения логарифмов

$$\bullet 1. \operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{3}i) = \begin{cases} |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2, \\ \arg(-1 + \sqrt{3}i) = 2\pi/3 \end{cases}$$

$$= \ln 2 + i(2\pi/3 + 2\pi k) \approx 0,69 + i(2,09 + 6,28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

$$\bullet 2. \ln(-6) = \begin{cases} |-6| = 6, \\ \arg(-6) = \pi \end{cases} = \ln 6 + i\pi \approx 1,79 + 3,14i.$$

4. Тригонометрические функции

$$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \operatorname{tg} z, \quad w = \operatorname{ctg} z.$$

Эти функции определяются через функцию $w = e^z$

по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ не являются ограниченными и в этом их самое существенное отличие от обычных тригонометрических функций.

Вычислим значения тригонометрических функций.

$$\bullet \sin(\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} \approx -\frac{i}{2}(0,04 - 23,10) \approx -11,58i.$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos(3 - 2i) &= \frac{e^{i(3-2i)} + e^{-i(3-2i)}}{2} = 0,5[e^2 e^{3i} + e^{-2} e^{-3i}] = \\ &= 0,5[e^2(\cos 3 + i \sin 3) + e^{-2}(\cos 3 - i \sin 3)] = \\ &= 0,5[\cos 3(e^2 + e^{-2}) + i \sin 3(e^2 - e^{-2})] = -3,72 + 0,51i. \end{aligned}$$

5. Гиперболические функции

$$w = shz, \quad w = chz, \quad w = thz, \quad w = cthz.$$

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= i\operatorname{sh}z, & \cos(iz) &= \operatorname{ch}z, \\ \operatorname{sh}(iz) &= i\sin z, & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z, \\ \operatorname{tg}(iz) &= i\operatorname{th}z, & \operatorname{ctg}(iz) &= -i\operatorname{cth}z, \\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, & \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z &= \operatorname{ch}2z.\end{aligned}$$

С помощью гиперболических функций можно записать формулы

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

Эти формулы применяются для вычислений тригонометрических и гиперболических функций

Вычислить значения:

- 1. $sh \frac{i\pi}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i,$

- 2. $ch i\pi = \cos \pi = -1.$

- 3. $sh(1-2i) = \frac{e^{(1-2i)} - e^{-(1-2i)}}{2} = \frac{e^1 e^{-2i} - e^{-1} e^{2i}}{2} =$
 $= \frac{e^1 (\cos 2 - i \sin 2) - e^{-1} (\cos 2 + i \sin 2)}{2} \approx$
 $\approx \frac{-0,98 - 2,81i}{2} \approx -0,49 - 1,4i.$

- 4. $\cos(3-2i) = \cos 3 \cdot ch 2 - i \sin 3 \cdot sh 2 \approx$
 $\approx -0,99 \cdot 3,76 - i \cdot 0,14 \cdot 3,63 \approx -3,72 + 0,51i.$

Линии и области на комплексной плоскости

Задача. Построить линии, заданные соотношениями

• 1. $\left| \frac{z-2}{z+i} \right| = 3.$

$$\left| \frac{z-2}{z+i} \right| = 3 \Rightarrow |z-2| = 3|z+i|$$

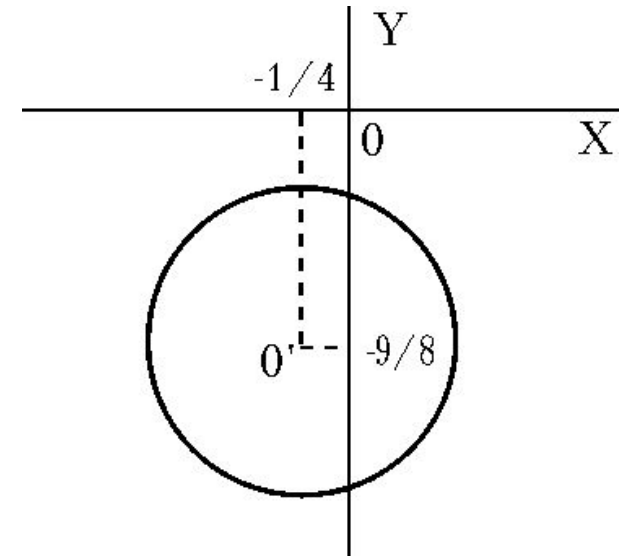
$$|z-2| = 3|z+i| \Rightarrow |x+iy-2| = 3|x+iy+i| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} =$$

$$= 3\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9(x^2 + y^2 + 2y + 1)$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x + 1/4)^2 + (y + 9/8)^2 = 45/64.$$

Центр окружности $O'(-1/4; -9/8)$

Радиус $\sqrt{45/64} \approx 0,84.$
с



- 2. $\text{Im}(z^2 - 3z) = -1$.

Проведем
преобразования

$$\begin{aligned} z^2 - 3z &= (x + iy)^2 - 3(x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy = \\ &= x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y). \end{aligned}$$

Выделим мнимую часть выражения и приравняем к единице

$$\text{Im}(z^2 - 3z) = -1 \Rightarrow 2xy - 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{-1/2}{x - 3/2}.$$

Линия представляет собой гиперболу

