Тема 4. Скінченні автомати

1. Основні означення і п1. Основні означення і поняття

2. Приклад детермінованого 2. Приклад детермінованого ск2. Приклад детермінованого скі2. Приклад детермінованого скінченного 2. Приклад детермінованого скінченного автомату

33. Приклад 3. Приклад недетермінованого ск3. Приклад недетермінованого скі3. Приклад недетермінованого скінченного 3. Приклад недетермінованого скінченного автомату

44. Перетворення недетермінованого скінчен4.

1. Основні означення і поняття

Означення 1. Скінченним автоматом M називається п'ятірка позначень

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$, де

Q - скінченна множина станів автомату $Q=\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$;

Σ - скінченна множина вхідних символів $\Sigma=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$;

δ - відображення множини $Q \times \Sigma$ в $P(Q)$ (множину всіх підмножин Q), що визначає поведінку керуючого пристрою (функцію $\delta(q, a)$, де $q \in Q$, $a \in \Sigma$, називають функцією переходів);

$q_0 \in Q$ - початковий стан керуючого пристрою;

$F \subseteq Q$ - множина заключних станів.

Означення 2. Пара $\{q,\omega) \in Q \times \Sigma^*$ називається *конфігурацією* автомата M. Конфігурація (q_0,ω) називається *початковою конфігурацією*, а (q,e), $q \in F$ - *заключною*.

Кажуть, що автомат переходить з конфігурації $(q, a\omega)$ $a \in \Sigma$ в конфігурацію (q',ω), якщо $q' \in \delta(q,a)$ і позначають це так:

$$(q,\ a\omega) \vdash (q',\omega).$$

Робота скінченого автомата – це послідовність конфігурацій. Нехай $K_0, K_1,..., K_p$ - деякі конфігурації автомата. Якщо можна перейти $K_0 \vdash K_1 \vdash ... \vdash K_p$, то це можна позначити так: $K_0 \overset{*}{\vdash} K_p$ або $K_0 \overset{p}{\vdash} K_p$.

Означення 3. Кажуть, що автомат M допускає ланцюжок ω, якщо $(q_0,\omega) \overset{p}{\vdash} (q,e)$, де $q \in F$.

Означення 4. Мовою, що визначається (допускається) автоматом M, називається множина вхідних ланцюжків, що допускається цим автоматом.

$$L(M) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^*, (q_0,\omega) \overset{*}{\vdash} (q,e) \ \textit{для деякого} \ q \in F\}$$

<u>Означення 5</u>. Скінченний автомат M називається ***недетермінованим***, якщо існують такі $a \in \Sigma, q \in Q$, що функція переходів δ є множиною, що складається більш, ніж з одного стану: $\delta(q,a) = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, $n > 1$.

<u>Означення 6</u>. Скінченний автомат M називається ***детермінованим***, якщо для кожних $a \in \Sigma, q \in Q$ $\delta(q,a) = \{q'\}$ (множина з одного стану) або $\delta(q,a)$ – порожня множина.

<u>Означення 7</u>. Скінчений детермінований автомат називається ***повністю визначеним***, якщо $\delta(q,a)$ для кожних $a \in \Sigma, q \in Q$ містить рівно один стан.

<u>Означення 8.</u> ***Діаграмою переходів (графом переходів)*** автомата M називається навантажений граф, вершини якого навантажені іменами станів автомату і в діаграмі присутнє ребро $(p,q), p,q \in Q$, якщо справджується таке співвідношення: $q \in \delta(p,a), a \in \Sigma$.

Ребра навантажені всіма символами a, по яких є перехід з p в q.

2. Приклад детермінованого скінченного автомату

<u>Задача 1.</u> Побудувати автомат в алфавіті $\Sigma=\{0,1\}$, який буде розпізнавати слова, в яких є два нулі підряд.

$$\omega_1 = 10011 \in \mathrm{L(M)}, \quad \omega_2 = 10101101 \notin \mathrm{L(M)}$$

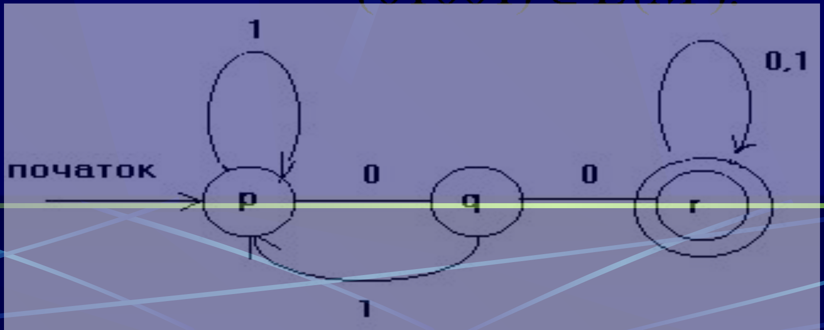
$$M = (\{p,q,r\},\{0,1\},\delta,p,\{r\})$$

$$\delta : \delta(p,0) = q, \delta(p,1) = p, \delta(q,0) = r, \delta(q,1) = p, \delta(r,0) = r, \delta(r,1) = r.$$

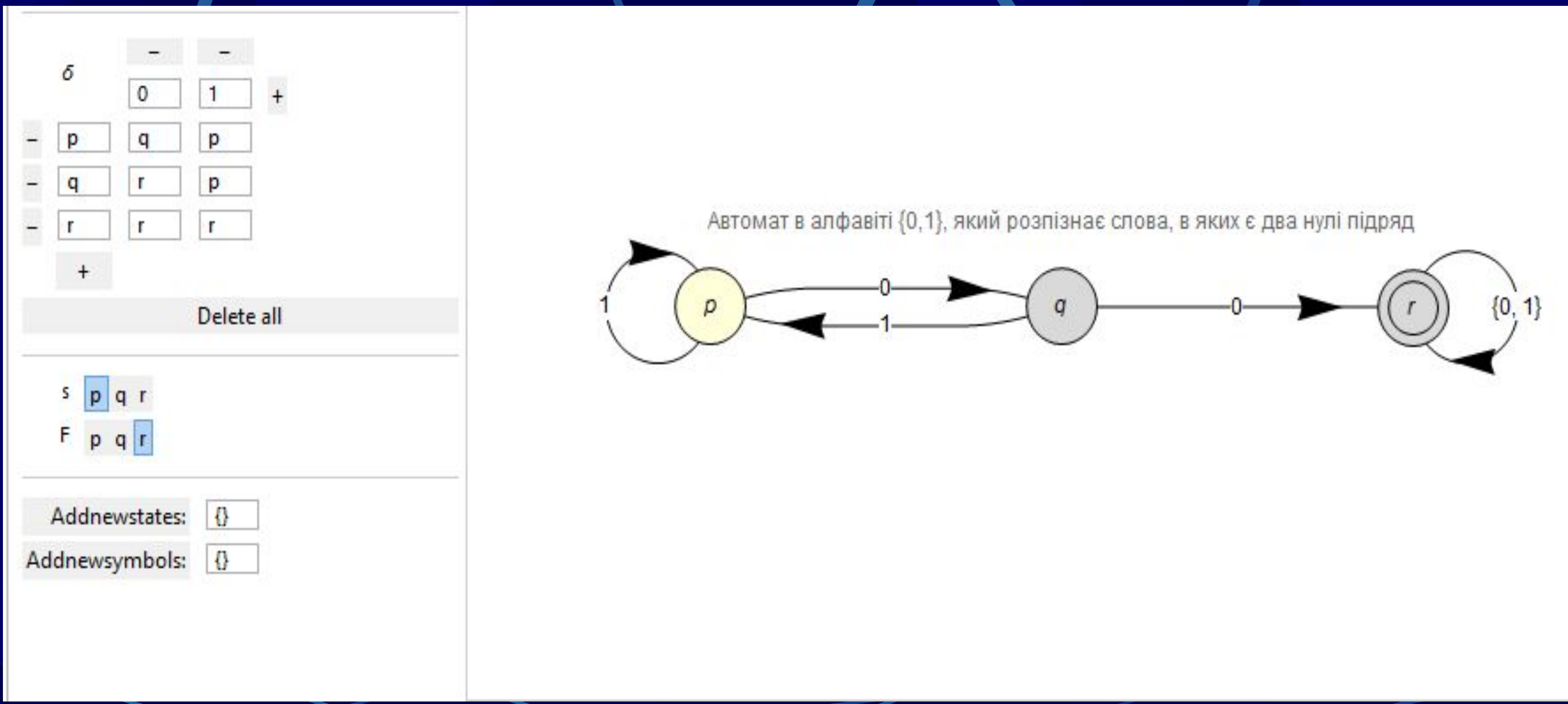
Стани	Вхідні символи	
	0	1
p	$\{q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{p\}$
r	$\{r\}$	$\{r\}$

$$(p,01001) \vdash (q,1001) \vdash (p,001) \vdash (q,01) \vdash (r,1) \vdash (r,e).$$

$$(01001) \in L(M).$$

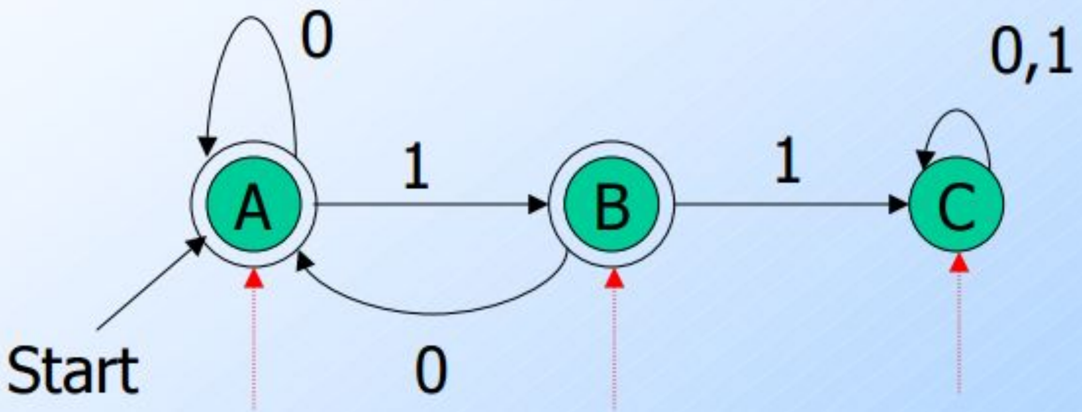


Wolfram Matematica 10.0
(Дубінін Д.)



Слайд з лекції Ульмана **(Coursera)**

Example: Strings With No 11



String so far has no 11, does not end in 1.

String so far has no 11, but ends in a single 1.

Consecutive 1's have been seen.

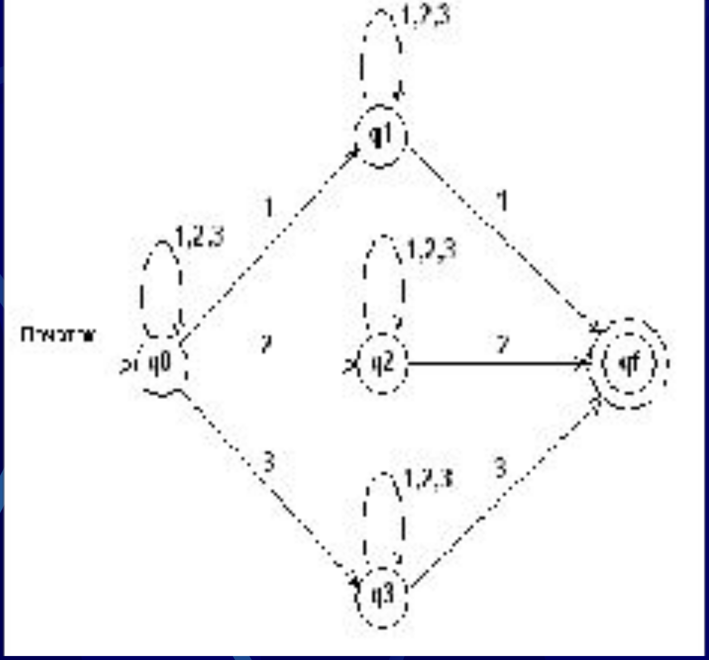
3. Приклад недетермінованого скінченного автомату

Задача 2. Побудувати недетермінований скінченний автомат, який дозволяє такі ланцюжки в алфавіті {1,2,3}, в яких останній символ ланцюжка зустрічався раніше.

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{1,2,3\}, \delta, q_0, \{q_f\}).$$

стан	1	2	3
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_f\}$	q_1	q_1
q_2	q_2	$\{q_2, q_f\}$	q_2
q_3	q_3	q_3	$\{q_3, q_f\}$
q_f	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

стан	1	2	3
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_f\}$	q_1	q_1
q_2	q_2	$\{q_2, q_f\}$	q_2
q_3	q_3	q_3	$\{q_3, q_f\}$
q_f	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$



$$(q_0,12321) \vdash (q_0,2321) \vdash (q_0,321) \vdash (q_0,21) \vdash (q_0,1) \vdash (q_0,e)$$

$$\ldots\ldots\ldots \vdash (q_1,2321) \vdash (q_1,321) \vdash (q_1,21) \vdash (q_1,1) \vdash (q_1,e)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vdash \boxed{(q_f,e)}$$

$$(q_0,12321) \vdash (q_0,2321) \vdash (q_2,321) \vdash (q_2,21) \vdash (q_2,1) \vdash (q_2,e)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vdash (q_f,1)$$

$$(q_0,12321) \vdash (q_0,2321) \vdash (q_0,321) \vdash (q_3,21) \vdash (q_3,1) \vdash (q_3,e)$$

$$(q_0,12321) \vdash (q_0,2321) \vdash (q_0,321) \vdash (q_0,21) \vdash (q_2,1) \vdash (q_2,e)$$

$$(q_0,12321) \vdash (q_0,2321) \vdash (q_0,321) \vdash (q_0,21) \vdash (q_0,1) \vdash (q_1,e)$$

4. Перетворення недетермінованого скінченного автомата в детермінований скінченний автомат

Нехай $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ - недетермінований скінченний автомат.

$M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ - детермінований скінченний автомат.

1) Побудова множини станів.

Q'- множина станів M', яка будується так: беруться всі можливі комбінації з множини станів Q. Кожна така комбінація – стан M'.

Наприклад:

нехай $q_0, q_1, \ldots, q_8$ - стани M $(q_i \in Q)$. Тоді $[q_1, q_3, q_5]$ - один із станів M'.

Якщо Q має n станів, то $Q' = P(Q) - 2^n$ станів.

2) Початковий стан: q_0 '$=[q_0]$.

3) Побудова множини заключних станів.

F' складається з усіх таких підмножин S множини $P(Q)$, що $S \cap F \neq \varnothing$.

Наприклад:

якщо розглянути довільний стан з Q':$[\ldots f_i \ldots]$, то $[\ldots f_i \ldots] \in F'$, якщо $f_i \in F$.

4) Побудова функції переходів.

Припустимо, що в нас є деякий стан з множини Q'. Побудувати функцію переходу δ' для цього стану означає визначити тільки один стан детермінованого автомату M'.

$$\delta'([q_0, q_1, \ldots, q_m], a) = [r_0, r_1, \ldots, r_k]$$

$$\forall i \in [0, m] \quad \exists j \in [0, k] : \quad \delta(q_i, a) = r_j.$$

Приклад детермінізації автомата

Означення 9. Стан p називається досяжним, якщо існує ланцюжок ω такий, що

$$(q_0, \omega) \vdash^* (p, e).$$

Задача 2. $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{1,2,3\}, \delta, q_0, \{q_f\}).$

стан	1	2	3
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_f\}$	q_1	q_1
q_2	q_2	$\{q_2, q_f\}$	q_2
q_3	q_3	q_3	$\{q_3, q_f\}$
q_f	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

$q_0' = [q_0] = A$

$\delta'(A,1) = [q_0, q_1] = B$

$\delta'(A,2) = [q_0, q_2] = C$

$\delta'(A,3) = [q_0, q_3] = D$

$\delta'(B,1) = [q_0, q_1, q_f] = E$

$\delta'(B,2) = [q_0, q_1, q_2] = F$

$\delta'(B,3) = [q_0, q_1, q_3] = G$

$\delta'(C,1) = [q_0, q_1, q_2] = F$

...

Стани	Вхід		
	1	**2**	**3**
$A=[q_0]$	B	C	D
$B=[q_0,q_1]$	E	F	G
$C=[q_0,q_2]$	F	H	I
$D=[q_0,q_3]$	G	I	J
$E=[q_0,q_1,q_f]$	E	F	G
$F=[q_0,q_1,q_2]$	K	K	L
$G=[q_0,q_1,q_3]$	M	L	M
$H=[q_0,q_2,q_f]$	F	H	I
$I=[q_0,q_2,q_3]$	L	N	N
$J=[q_0,q_3,q_f]$	G	I	J
$K=[q_0,q_1,q_2,q_f]$	K	K	L
$L=[q_0,q_1,q_2,q_3]$	P	P	P
$M=[q_0,q_1,q_3,q_f]$	M	L	M
$N=[q_0,q_2,q_3,q_f]$	L	N	N
$P=[q_0,q_1,q_2,q_3,q_f]$	P	P	P

Стани	1	2	3
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_f\}$	q_1	q_1
q_2	q_2	$\{q_2, q_f\}$	q_2
q_3	q_3	q_3	$\{q_3, q_f\}$
q_f	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

$$M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

$$q_0' = A$$

$$Q' = \{A, B, C, \ldots, N, P\}$$

$$F' = \{E, H, J, K, M, N, P\}$$

Тема 6