

Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: *эллипс*, частным случаем которого является *окружность*, *гипербола* и *парабола*.

Они задаются уравнением второй степени относительно x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

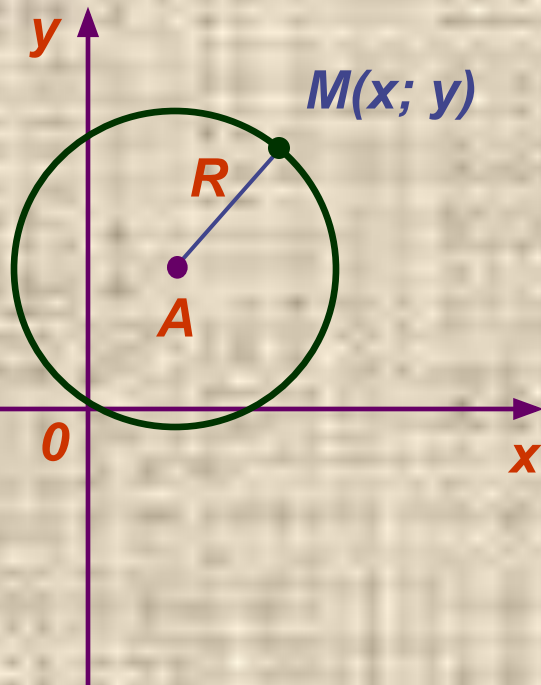
Общее уравнение кривой
второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от точки $A(a; b)$ на расстояние R .

Для любой точки M справедливо:



$$|AM| = R \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R \quad \Rightarrow$$

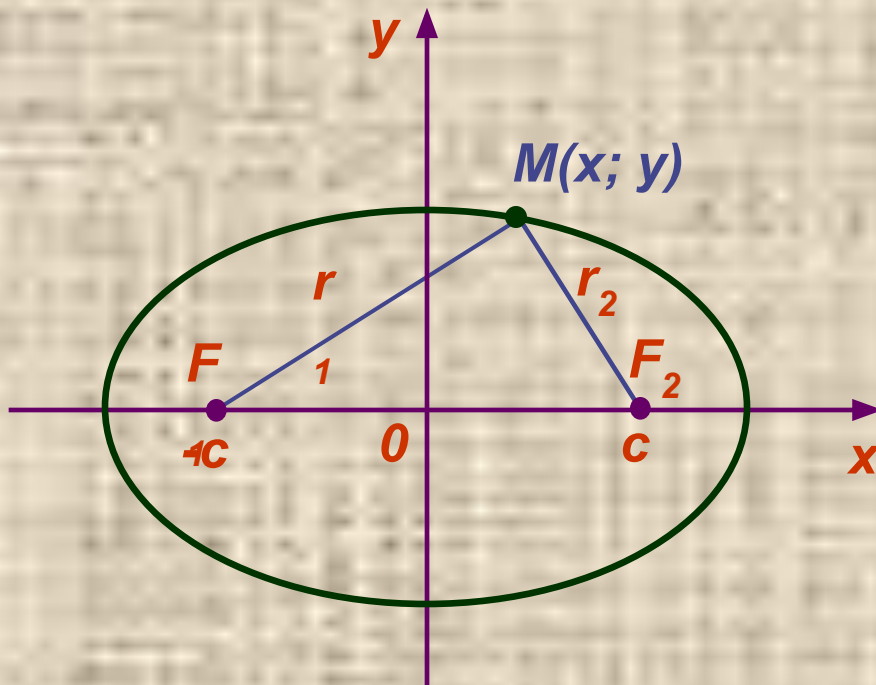
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Каноническое уравнение
окружности

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1, F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2 \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 : 4 \Rightarrow$$

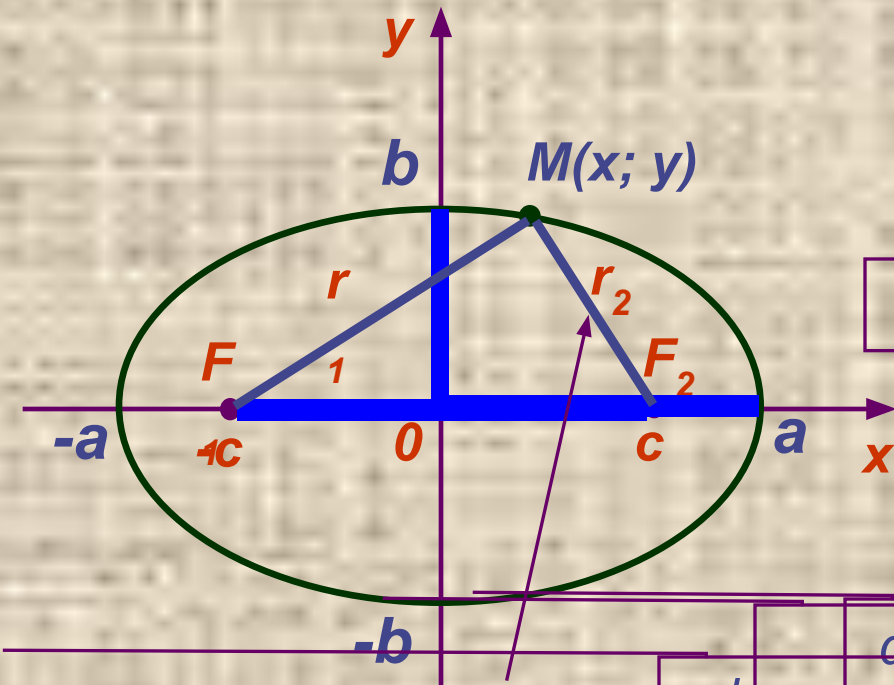
$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{b}{2}x^2 + a^2y^2 = a^2\frac{b}{2} : (a^2b^2) \quad \boxed{b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Каноническое уравнение
эллипса

Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|F_1 F_2| = 2c$$

малая полуось

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

фокальное расстояние $2c$
 большая полуось a
 фокальные радиусы точки M

$$r_1 = a + \varepsilon x; \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

эксцентриситет эллипса

Эксцентриситет характеризует форму эллипса ($\varepsilon = 0$ – окружность)

Для эллипса справедливы следующие неравенства:

$$a > c; \quad a > b; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Пример

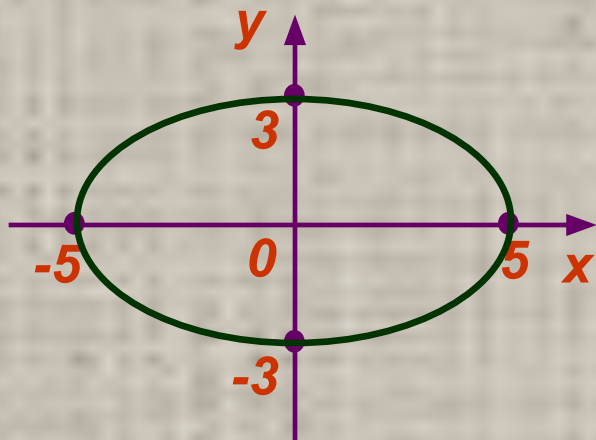
Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4; 0)$ $F_2(4; 0)$, а эксцентриситет равен $0,8$.

$$c = 4 \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \quad b = 3$$

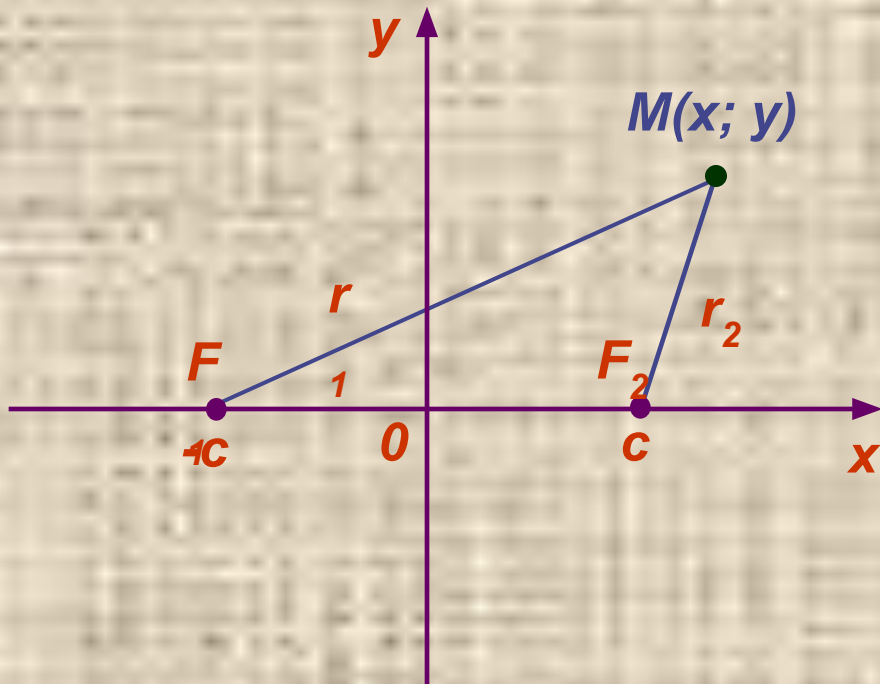
Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

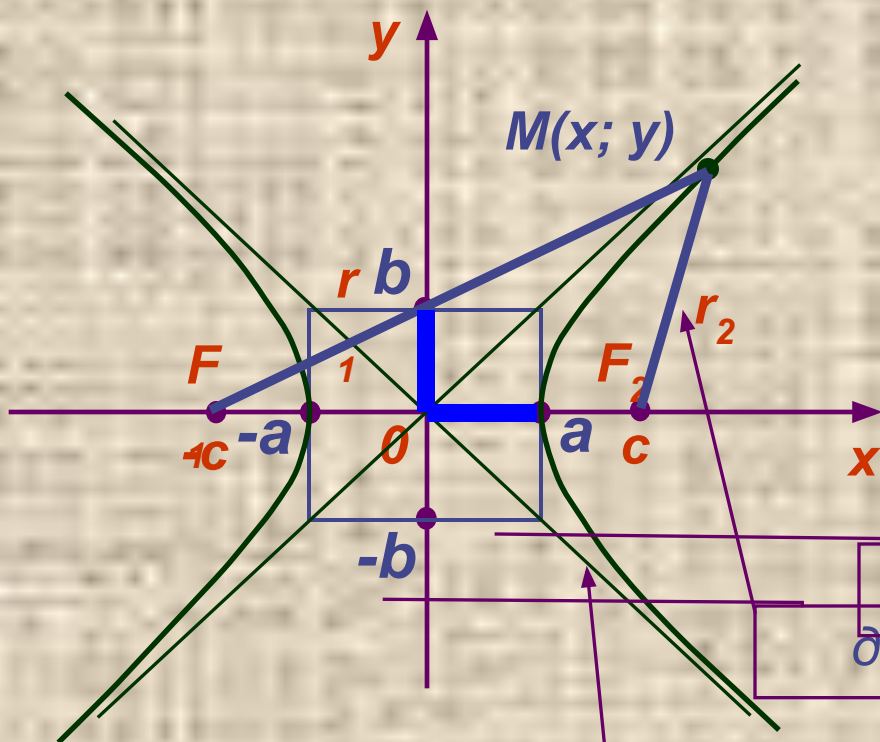
После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$\frac{b}{2} x^2 - a^2 y^2 = a^2 \frac{b}{2} : (a^2 b^2) \quad \boxed{b^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Каноническое уравнение
гиперболы

Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

мнимая полуось
 действительная полуось
 радиусы
 точки M

Для гиперболы справедливо: $\epsilon > 1$
 эксцентриситет гиперболы

асимптоты
 гиперболы

Пример

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(6; -4)$, если ее асимптоты заданы уравнениями:

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 3b = \sqrt{6}a$$

Точка A лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2$$

Решим систему: $\begin{cases} 3b = \sqrt{6}a \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 24a^2 - 16a^2 = \frac{2}{3}a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Пример

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$$

