Построение расписания минимальной длины для одностадийной системы с приборами различной производительности

Исполнитель	Рожик Е.А.
Руководитель	Аснина А.Я.

Цели и задачи выпускной работы

Цель: разработка алгоритма построения расписания минимальной длины для системы с приборами различной производительности.

Задачи:

-рассмотреть математическую модель распределения времени обслуживания требований по приборам;
-изучить метод декомпозиции для задачи более общего вида;
-переформулировать метод для задачи распределения времени;
-применить метод для решения поставленной задачи;
-вывести формулу числа переходов с одного прибора на другой для задачи распределения времени, решаемой методом декомпозиции;

Цели и задачи выпускной работы

-показать, что с помощью метода декомпозиции получается распределение времени с минимально возможным переходов;
-разработать конструктивный алгоритм построения расписания;
-разработать программу реализации метода декомпозиции и алгоритма построения расписания с минимальным числом прерываний;
-разработать метод построения расписания для системы с различными моментами поступления требований.

Системы с идентичными приборами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T \quad i = 1,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le T \quad j = 1,..,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = t_j \quad j = 1,..,n$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,..,n \quad j = 1,..,n$$

$$T \to \min$$

x_{ij} – время, в течение которого j - е требование будет обслуживаться i-м прибором;

t_j - длительность обслуживания j-го требования.

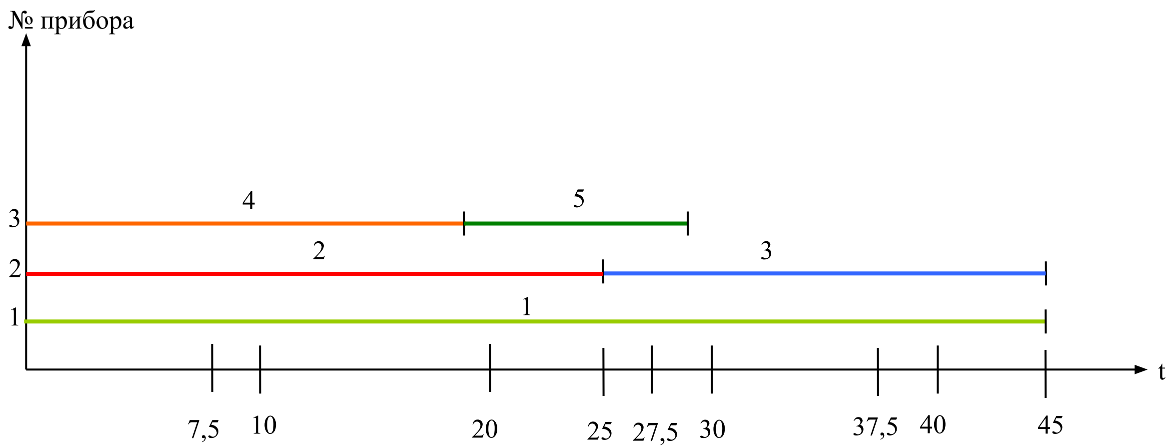
$$\text{Tmin} = \text{T*} = \max\left(t_1, \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{m}\right)$$ при условии, что

$$t_1 \ge t_2 \ge ... \ge t_n$$

Пример:

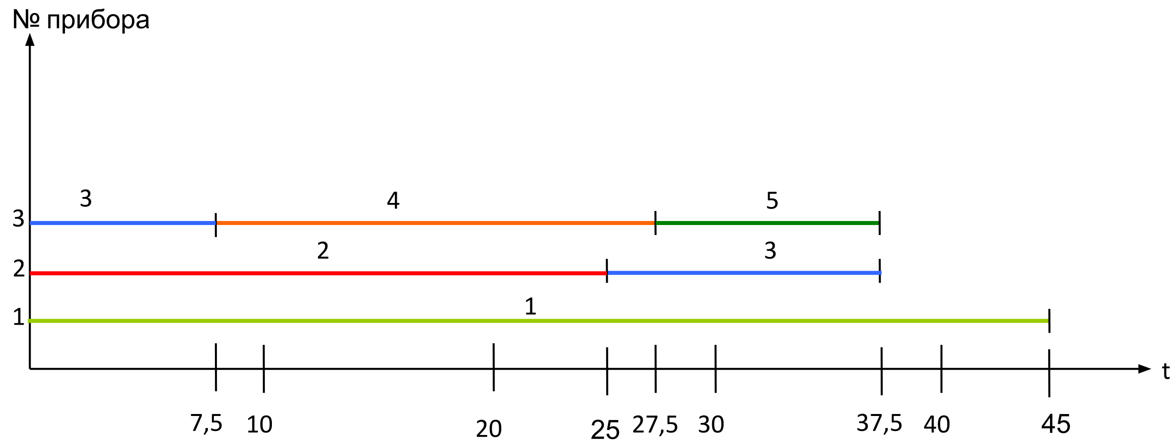
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
45	25	20	20	10

$$T_1^{\min} = T_1^* = \max\left(t_1, \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{m}\right) = \max(45,40) = 45$$



t_2	t_3	t_4	t_5
25	20	20	10

$$T_2^{\min} = T_2^* = \max(t_2, \frac{\sum_{j=2}^{n} t_j}{m-1}) = \max(25, \frac{75}{2}) = \frac{75}{2}$$



Системы с различными приборами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T \qquad i = 1,\ldots,m; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le T \qquad j = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{t_{ij}} = 1 \qquad j = 1,..,n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,\ldots,m, \ j = 1,..,n$$

$$T \to \min$$

x_{ij} – время, в течение которого j - е требование будет обслуживаться i-м прибором;
t_{ij} - длительность обслуживания j-го требования на i-м приборе.

T- длина расписания.

(1) – общее время занятости i-го прибора не превосходит T;

(2) – общее время обслуживания j-го требования не превосходит T.

Системы с приборами различной производительности

t_j - длительность обслуживания j - го требования на приборе с самой низкой производительностью.

α_i - показывает, во сколько раз быстрее обслуживается требование на i-м приборе по сравнению с наименее производительным.

Тогда $t_{ij} = \dfrac{t_j}{\alpha_i}$ - длительность обслуживания j-го требования на i-м приборе.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T \qquad i = 1,..,m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le T \qquad j = 1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij} = t_j \qquad j = 1,..,n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..,n \qquad (4)$$

$$T \to \min \qquad (5)$$

Утверждение. Если $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_m; \ t_1 \ge t_2 \ge \ldots \ge t_n$,то

$$\min F_1^{\max} = T = \max\left(\frac{t_1}{\alpha_1}, \frac{t_1 + t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^{m-1} t_i}{\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i}, \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}\right) = T^*$$

Заметим, что $\forall\ \alpha_i = 1$, получаем формулу для идентичных приборов:

$$F_1^{\max} = T = \max\left(t_j, \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j}{m}\right)$$

Дубльтранспортная задача общего вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_{j1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij} = B_{j2}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_{j1} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i = \sum_{j=1}^{n} B_{j2}$$

n **m**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i	A_i
1						1	200
2						2	150
3						3	200
4						4	150
5						5	100
B_{j1}	100	200	100	200	200		
B_{j2}	400	400	400	500	500		

Метод декомпозиции

Для всех j = 1…n-1

Шаг 1. Определяется $s_j = \max_i \{a_i \le \frac{B_{j2}}{B_{j1}}\}$ $k_j = \min_i \{a_i \ge \frac{B_{j2}}{B_{j1}}\}$

Шаг 2. Вычисляются $x_{kj} = \frac{B_{j2} - a_s B_{j1}}{a_k - a_s}$ $x_{sj} = B_{j1} - x_{kj}$

Шаг 3. Если $x_{sj} \le A_s$ $x_{kj} < A_k$

$$A_s^H = A_s - x_{js} \quad A_k^H = A_k - x_{ks}$$

и переход j = j + 1.

Шаг 4. Если $x_{sj} > A_s$

$$x_{sj} = A_s$$

$$A_s^H = 0$$

$$B_{j1}^H = B_{j1} - x_{sj}$$

$$B_{j2}^H = B_{j2} - a_s x_{sj}$$

$$s_j^H = s_j - 1$$

Переход к шагу 2.

Шаг 5. Если $x_{kj} > A_k$ $x_{kj} = A_k$

$$A_k^H = 0$$

$$B_{j1}^H = B_{j1} - x_{kj}$$

$$B_{j2}^H = B_{j2} - a_k x_{kj}$$

$$k_j^H = k_j + 1$$

Переход к шагу 2.

Шаг 6. Если j = n, то полагаем $x_{in} = A_i$

Пример:

n **m**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i	**A_i**
1		25		50	125	1	200
2		150				2	150
3		25	25	150		3	200
4	100		50			4	150
5			25		75	5	100
	100	200	100	200	200		
	400	400	400	500	500		

B_{j1}

B_{j2}

Задача распределения времени

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1\,j} = T_{m+1} = (n-m)T^*$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} \le T^*$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_{ij} = t_j \quad \text{j = 1,..,n}$$

Где:

$$A_i = T^*$$

$$A_{m+1} = T_{m+1}$$

$$B_{j1} = T^*$$

$$B_{j2} = t_j$$

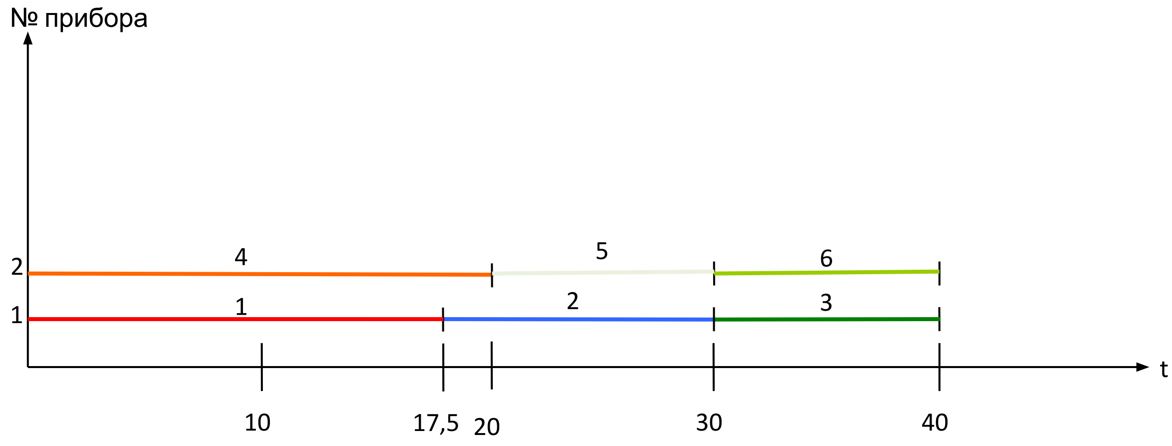
Пример 1:

Т достигается на последней формуле

	α_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	T_i
3	0	22,5	27,5	30	20	30	30	160
2	1				20	10	10	40
1	2	17,5	12,5	10				40
	T_j	40	40	40	40	40	40	
	t_j	35	25	20	20	10	10	

$$T^* = \max\left\{\frac{35}{2}, \frac{60}{3}, \frac{80}{3}, \frac{100}{3}, \frac{120}{3}\right\} = 40$$

Для данного примера оказалось возможным построить расписание, не прибегая ко второму этапу.

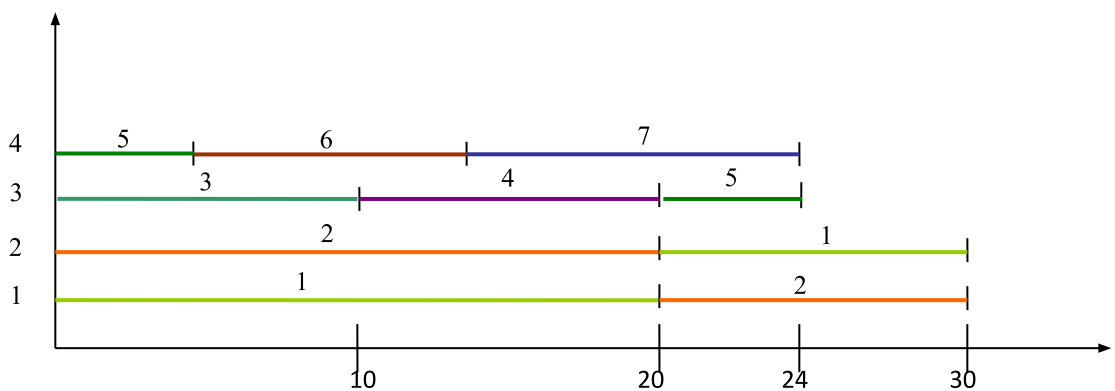


Пример 2: Т достигается не на последней формуле

	α_i	1	2	3	4	5	6	7	T_i
5	0			14	14	16	14	14	72
4	1					4	10	10	24
3	2			10	10	4			24
2	3	10	20						30
1	4	20	10						30
T_j		30	30	24	24	24	24	24	
t_j		110	100	20	20	12	10	10	

$$T^* = \max\left\{\frac{110}{4}, \frac{210}{7}, \frac{230}{9}, \frac{282}{10}\right\} = 30$$

$$T^*_н = \max\left\{\frac{20}{2}, \frac{72}{3}\right\} = 24$$



Алгоритм построения расписания

0. Полагаем t=0

1.

$$T_i = \sum_j x_{ij}$$

$$T_j = \sum_i x_{ij}$$

2. $T = \max\{T_i, T_j\}$

3. $\Delta_i = T - T_i, \Delta_j = T - T_j$

Строка, у которой $\Delta_i = 0,$ называется плотной строкой

Столбец, у которого $\Delta_j = 0,$ называется плотным столбцом

4. В каждой плотной строке и в каждом плотном столбце выделяется ровно один элемент. И в каждой строке и в каждом столбце, не являющихся плотными, выделяется не более одного элемента. Выделение нелднозначно, обозначим

(x_{ij})

5. Определяем интервал, на котором будем строить расписание

$\Delta = \min\{(x_{ij}) + \Delta_i; (x_{ij}) + \Delta_j; \Delta_i; \Delta_j\}, \Delta_i$ - если нет выделения в строке;

Δ_j - если нет выделения в столбце;

6. На интервале $(t, t+\Delta)$ требования распределяются на обслуживание в соответствии с таблицей, полученной на первом этапе.

7. Преобразуем матрицу

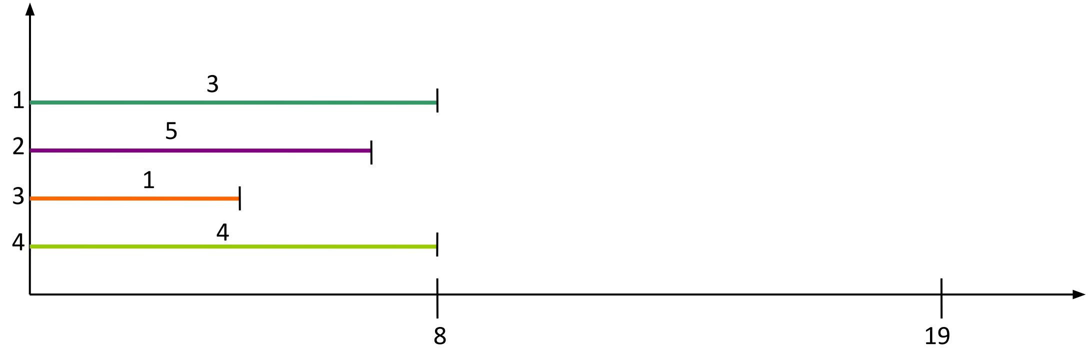
$(x_{ij}) = [x_{ij} - \Delta]^{+}, x_{ij}$ не изменится. Если какое-то $\Delta > x_{ij}$, будет «дырка»

8. Полагаем $t = t + \Delta$ и переходим к шагу **1.**

Пример 3. 1) t=0, T = 19

	1	2	3	4	5	T_i	Δ_i
1	6		**8**	5		19	0
2			6	4	**6**	16	3
3	**4**				7	11	8
4		9		**10**		19	0
T_j	10	9	14	19	13		
Δ_j	9	10	5	0	6		

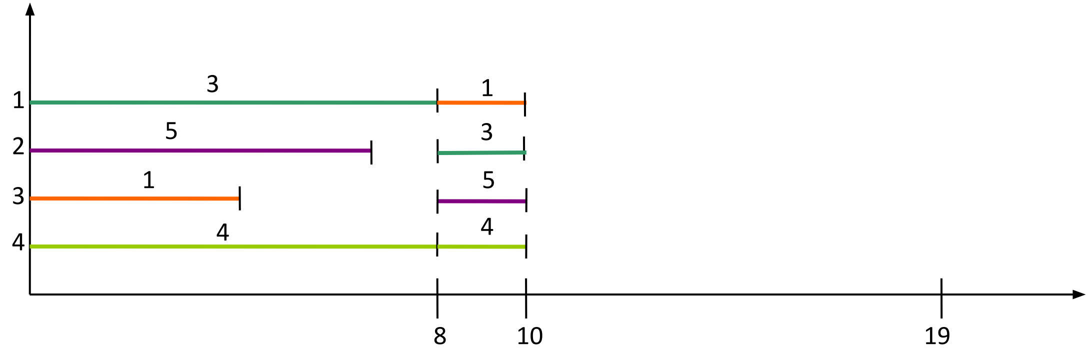
$\Delta = \min\{8,9,12,10\} = 8$



2) t=8, T = 11

	1	2	3	4	5	T_i	Δ_i
1	**6**			5		11	0
2			**6**	4		10	1
3					**7**	7	4
4		9		**2**		11	0
T_j	6	9	6	11	7		
Δ_j	5	2	5	0	4		

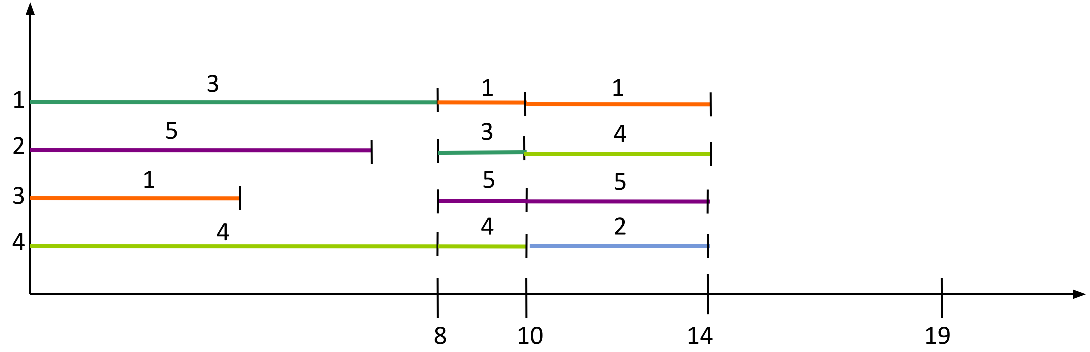
$$\Delta = \min\{6,7,11,2\} = 2$$



2) t=10, T = 9

	1	2	3	4	5	T_i	Δ_i
1	**4**			5		9	0
2			4	**4**		8	1
3					**5**	5	4
4		**9**				9	0
T_j	4	9	4	9	5		
Δ_j	5	0	5	0	4		

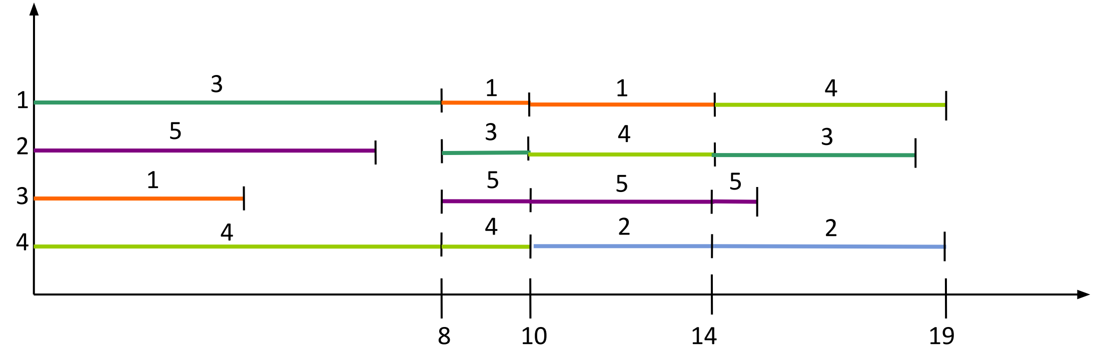
$\Delta = \min\{4,9,4,9\} = 4$



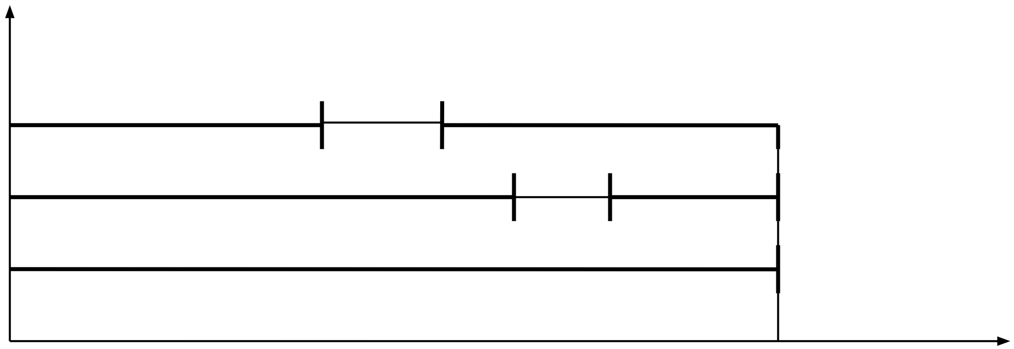
2) t=14, T = 5

	1	2	3	4	5	T_i	Δ_i
1				**5**		5	0
2			**4**			4	1
3					**1**	1	4
4		**5**				5	0
T_j	0	5	4	5	1		
Δ_j	5	0	1	0	4		

$\Delta = \min\{5,5,5,5\} = 5$



Заметим, если достигает своего максимума не на последней формуле, то при использовании вышеприведенного алгоритма построения расписания и алгоритма декомпозиции №1, приборы будут загружены неплотно:



Если же использовать алгоритм декомпозиции №2, приборы будут загружены плотно:

Построение расписания для задачи с различными моментами поступления требований

d_j - время поступления j-го требования в систему

$I_0,\dots,I_r$ - множества требований, поступивших в моменты времени $d_0,\dots d_r$

Алгоритм распределения времени и построения расписания

0. Пусть k = 0. Введем множество $\bar{I}$. $\bar{I}=\varnothing$. $I_k=\{1,2,\dots m\}$

1. Вычисляем оптимальное время обслуживания T для множества требований I_k.

2. По алгоритму декомпозиции распределяем время для множества $I_k=I_k\cup\bar{I}$ на интервале $[d_k,d_k+T]$. Строим расписание.

3. Если $T\le d_{k+1}-d_k$, то расписание на интервале $[d_k,d_k+T]$ оставляем неизменным, переход к шагу 5. Иначе переход к шагу 4.

4. Изменяем полученное расписание. На интервале $[d_k,d_{k+1}]$ расписание оставляем неизменным. А из требований, обслуживающихся на интервале $[d_{k+1},d_k+T]$ составляем множество $\bar{I}$. Полагаем $t_j=\sum_{i=1}^{m}\tau_{ij}^k\cdot\alpha_i$, где τ_{ij}^k – время обслуживания j-го требования на i-м приборе на интервале $[d_{k+1},d_k+T]$ для j из $\bar{I}$.

5. Если k<r, то k=k+1 и переход к шагу 1, иначе останов.

Пример 4.

1 этап. T=16, достигается на первой формуле.

	α_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	T_i
4	0									16
3	1									16
2	2									16
1	3	16								16
		0	0	0	0	8	8	8	8	
		16	16	16	16					
		48	12	8	4	16				

d_j

T_j

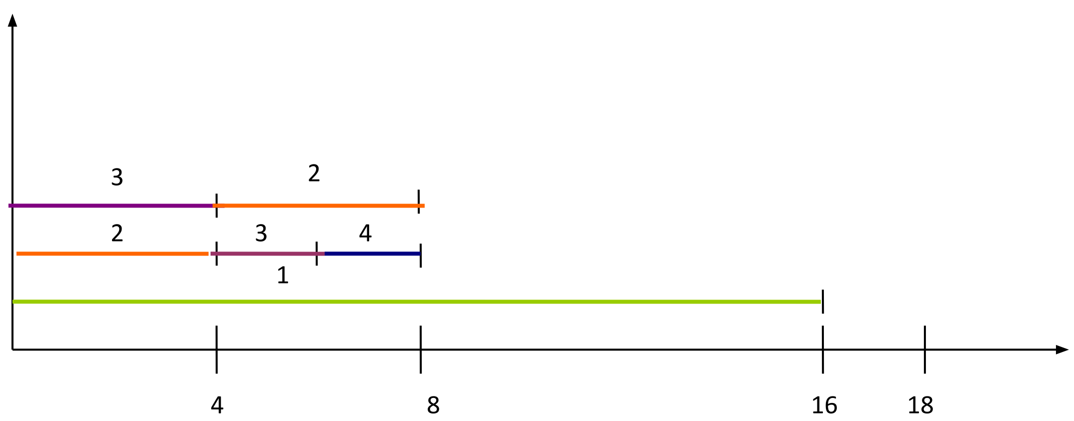
t_j

Пересчитываем T для оставшихся требований, поступивших в момент 0.

T=8, достигается на последней формуле.

	α_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	T_i
4	0			2	6					8
3	1		4	4						8
2	2		4	2	2					8
1	3	16								16
	d_j	0	0	0	0	8	8	8	8	
	T_j	16	8	8	8					
	t_j	48	12	8	4	16	12	6	2	

2 этап. Построение расписания.



3 этап. Первое требование не уложилось полностью.

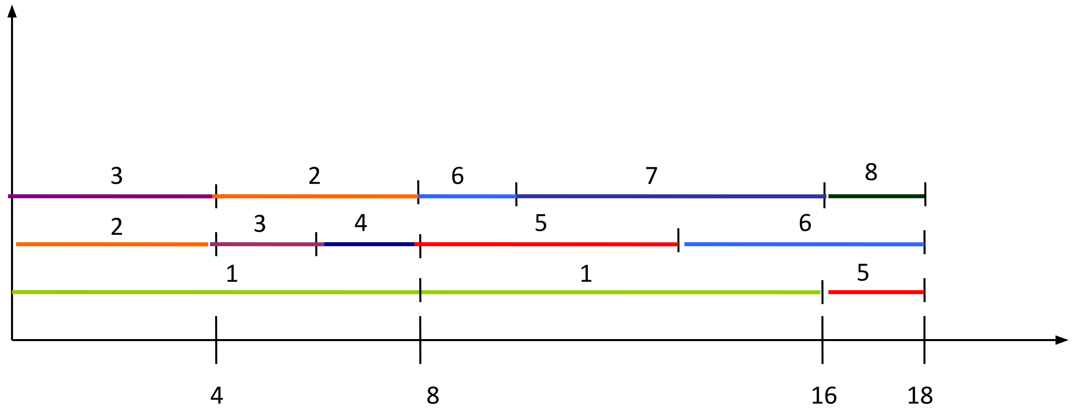
	α_i	**1**	**2**	**3**	**4**	T_i	**1**	**5**	**6**	**7**	**8**	T_i
4	0			2	6	**8**	2	3	3	4	8	**20**
3	1		4	4		**8**			2	6	2	**10**
2	2		4	2	2	**8**		5	5			**10**
1	3	16				**16**	8	2				**10**
		0	0	0	0		8	8	8	8	8	
		16	8	8	8		10	10	10	10	10	
		48	12	8	4		24	16	12	6	2	

d_j

T_j

t_j

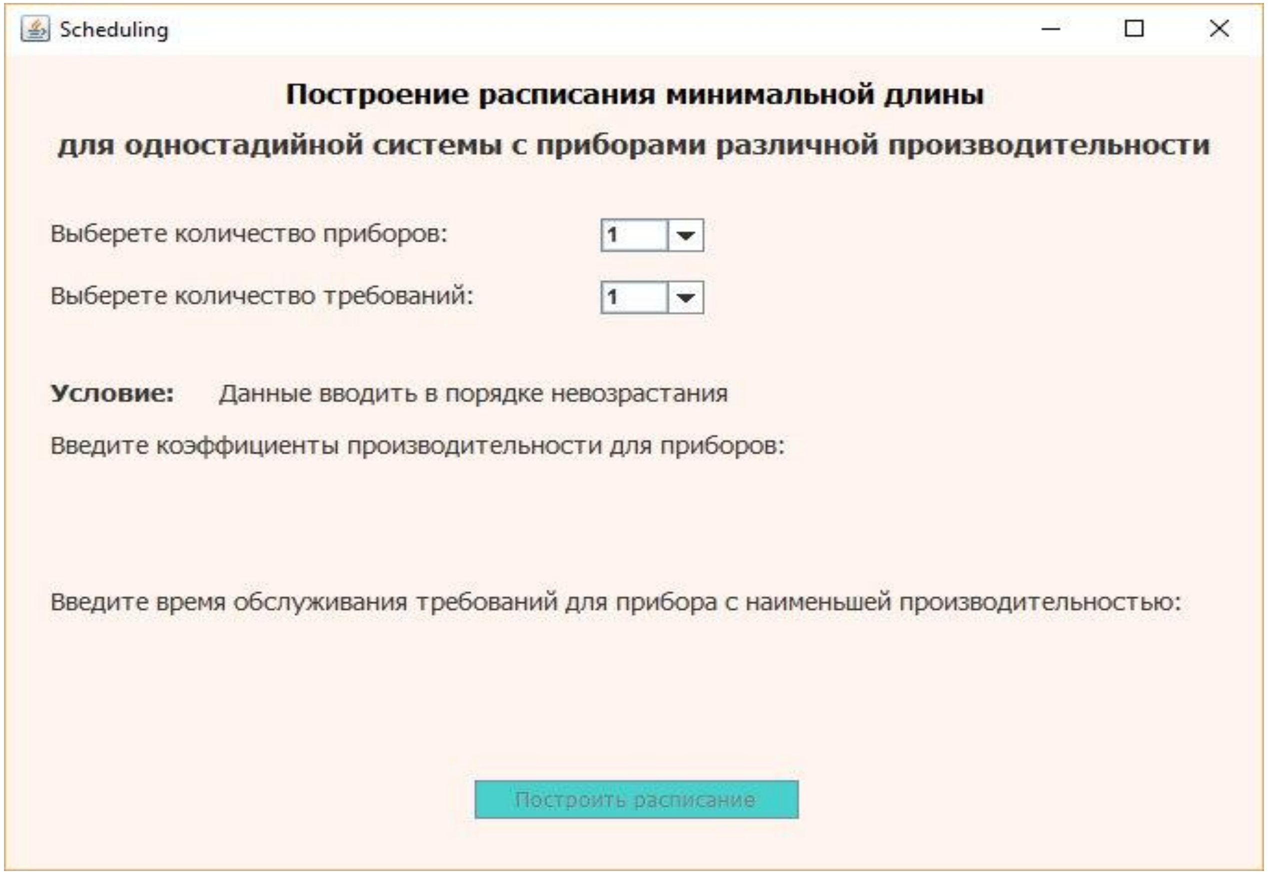
Вычисляем T для требований, поступивших в момент 8 и для первого требования, не уложившегося на предыдущем этапе. T=10. Распределяем время и продолжаем строить график.

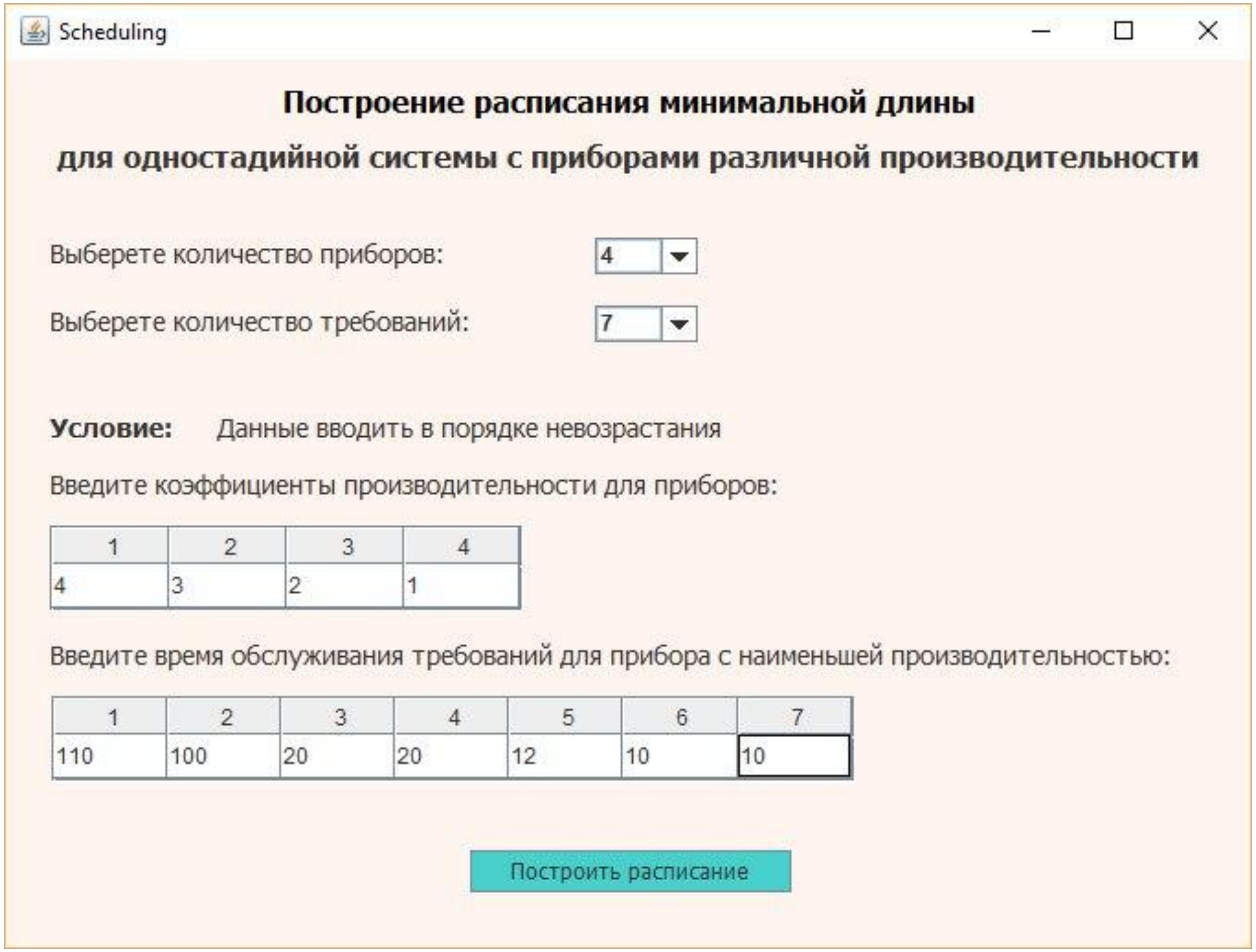


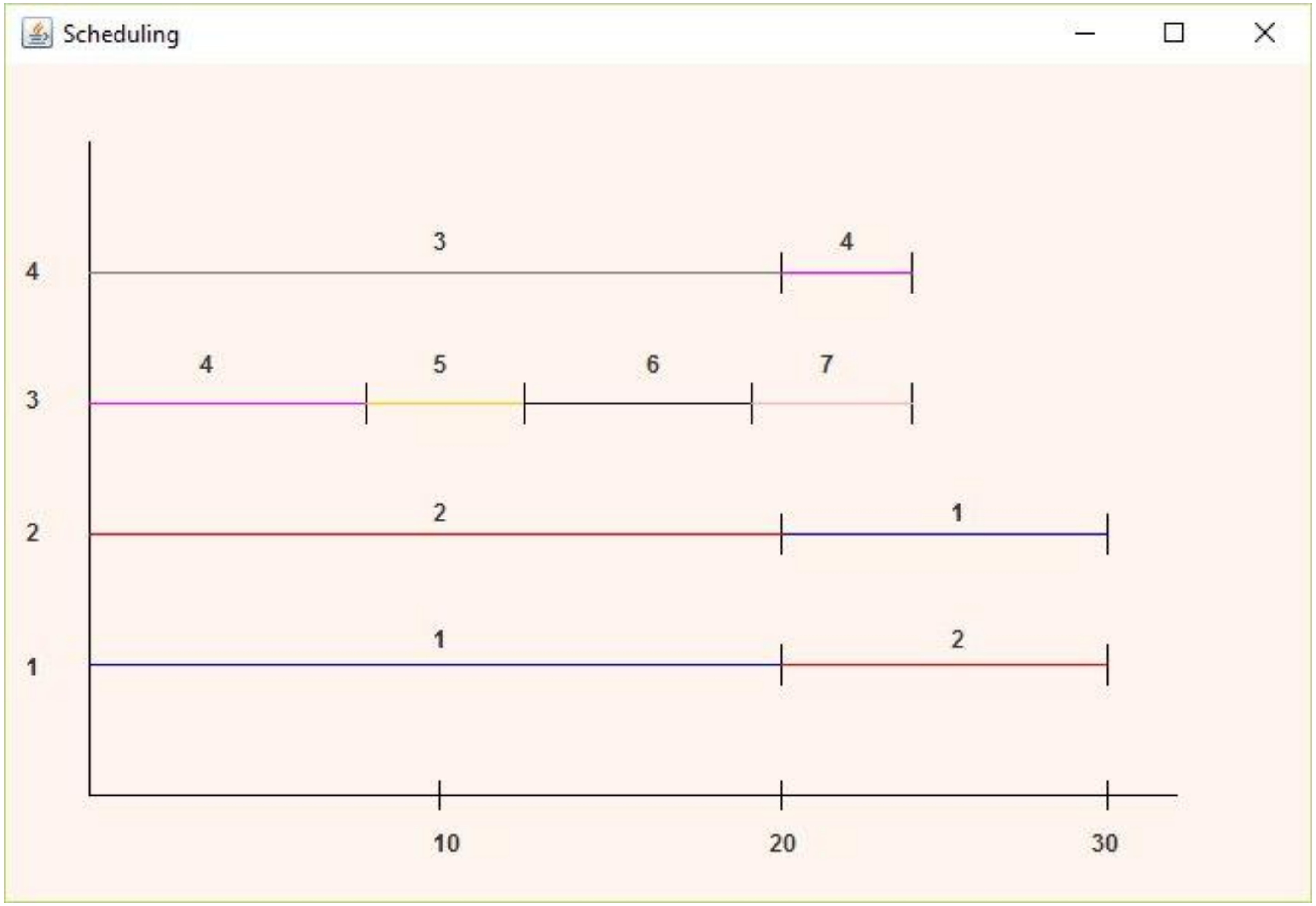
3
2
6
7
8
2
3
4
5
6
1
1
5
4
8
16
18

Программная реализация

Модель реализована в одном программном проекте с использованием интегрированной среды разработки программного обеспечения Eclipse Mars. В качестве языка реализации выбран объектно-ориентированный язык программирования Java.




Scheduling
Построение расписания минимальной длины
для одностадийной системы с приборами различной производительности
Выберете количество приборов:
4
Выберете количество требований:
7
Условие:
Данные вводить в порядке невозрастания
Введите коэффициенты производительности для приборов:
1 2 3 4
4 3 2 1
Введите время обслуживания требований для прибора с наименьшей производительностью:
1 2 3 4 5 6 7
110 100 20 20 12 10 10
Построить расписание



Scheduling
3
4
4
4
5
6
7
3
2
1
2
1
2
1
10
20
30