

**Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА**

С.Н. Охулков

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА


**Кафедра “Теоретическая и общая
электротехника”
Для студентов электротехнических
специальностей всех форм обучения**



Автозаводская высшая школа управления и технологий

Очная и заочная форма обучения

- Автомобили и автомобильное хозяйство
- Автомобиле- и тракторостроение
- Технология машиностроения



г. Нижний Новгород, ул. Лескова, 68, т. (831) 256-02-10

Тема 13

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания

Колебания (колебательные движения)- изменения состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания могут иметь различную физическую природу.

Колебания различают:

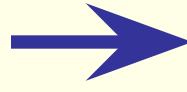
- по характеру физических процессов
- по характеру зависимости от времени.

По характеру физических процессов:

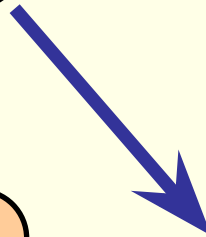


Механические

колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, волнение жидкостей



Электромагнитные
колебания переменного электрического поля в цепи, колебания векторов E и B



Электромеханические
колебания мембраны телефона, диффузора электродинамика

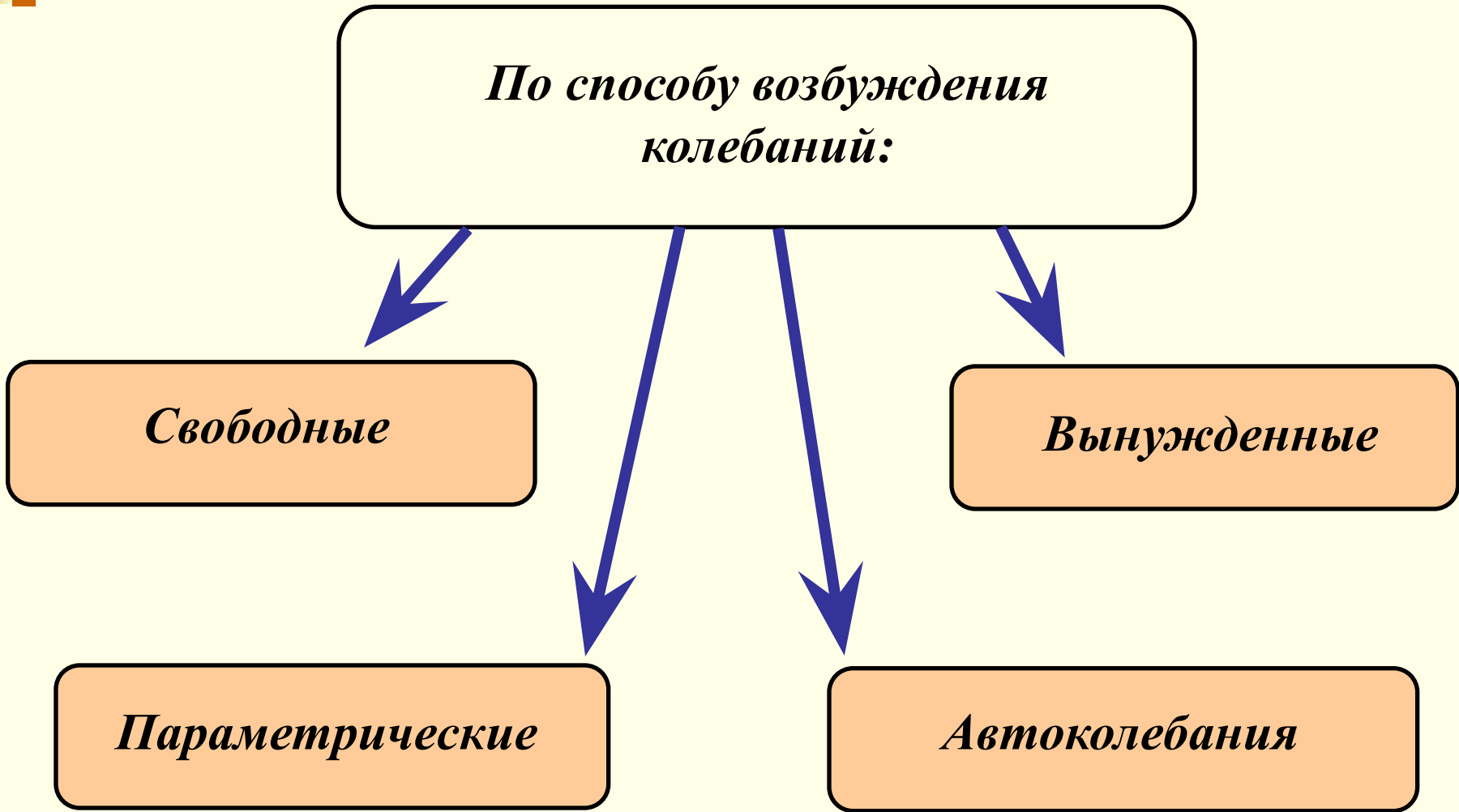
По характеру зависимости от времени:



Периодические



Непериодические



Система, совершающая колебания, называется ***колебательной системой.***

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний.

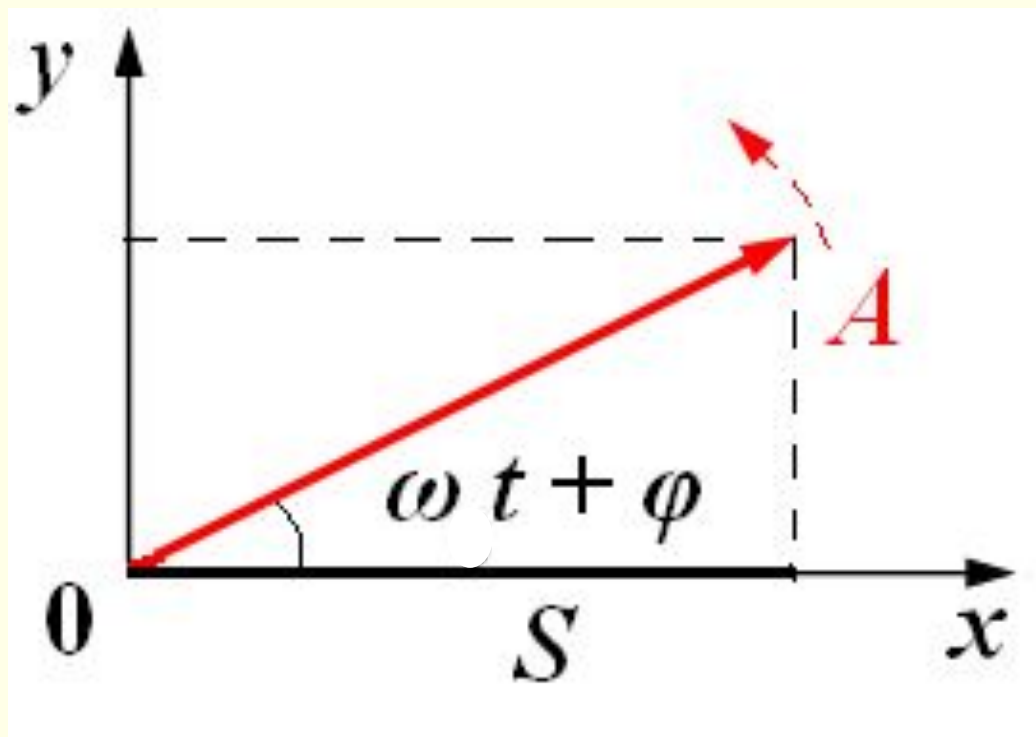
Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

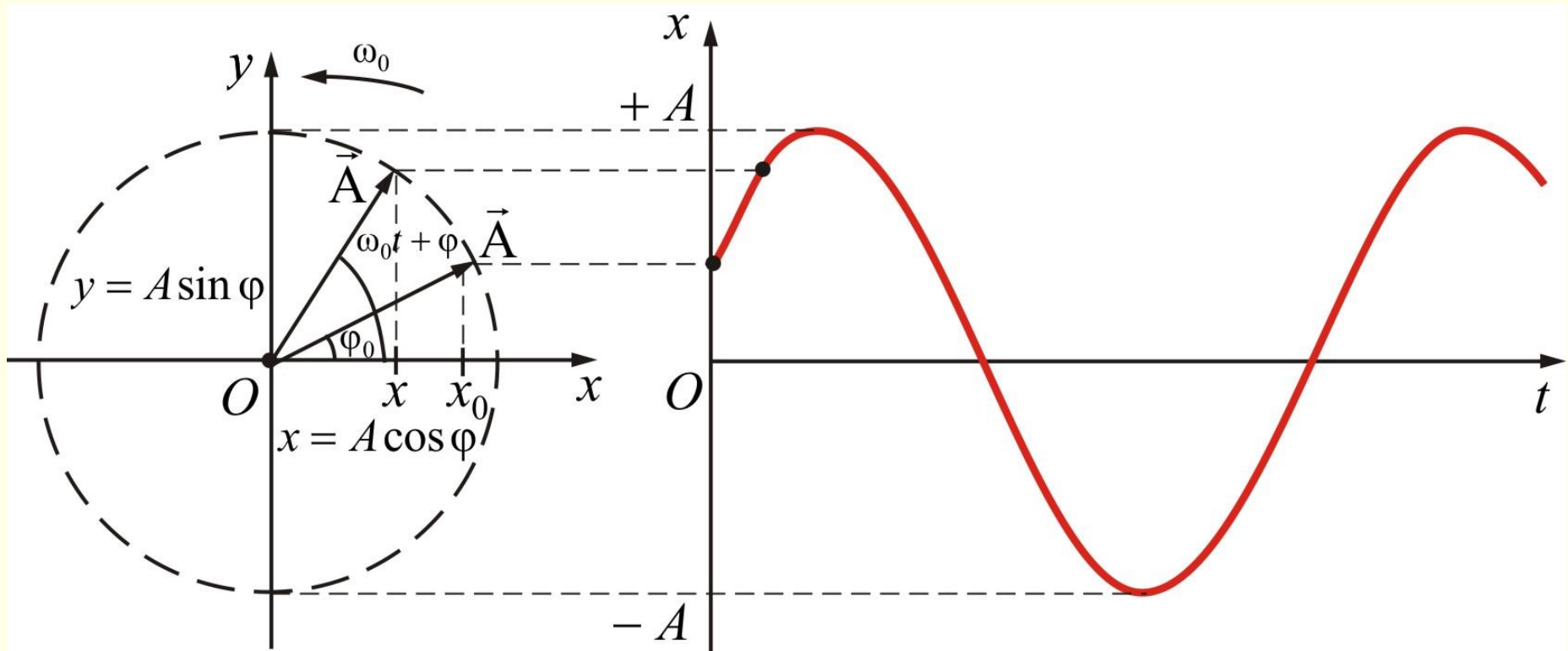
Периодом колебаний (T) называется наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение.

Частота периодических колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

*Способ представления колебаний с помощью
вращающегося вектора амплитуды*



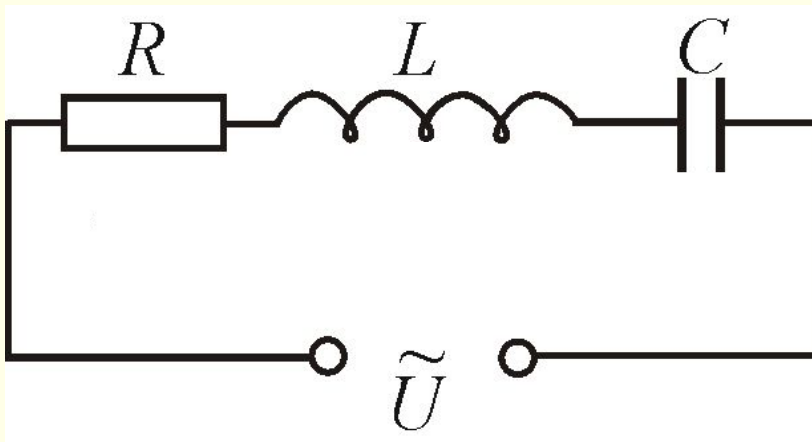


$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_0 = A \cos \varphi_0$$

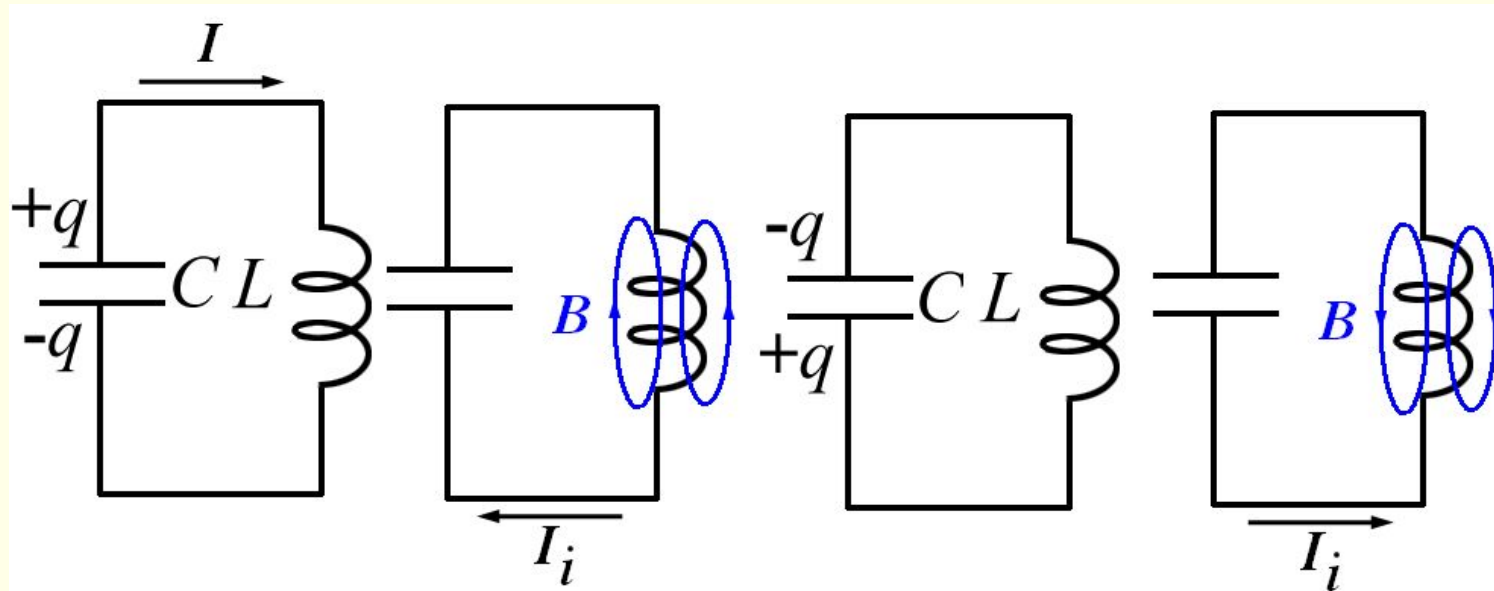
Квазистационарные токи. Процессы в колебательном контуре

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший *колебательный контур*.



Для простейшего колебательного контура $R = 0$.

При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора C в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке. ($R = 0$)



$$W_{\text{эл.п.}} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_{\text{м.п.}} = \frac{LQ^2}{2}$$

$$W_{\text{эл.п.}} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_{\text{м.п.}} = \frac{LQ^2}{2}$$

Энергия электрического поля запасается между обкладками конденсатора C :

$$W_{\text{эл.п.}} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия магнитного поля сосредоточена в катушке L :

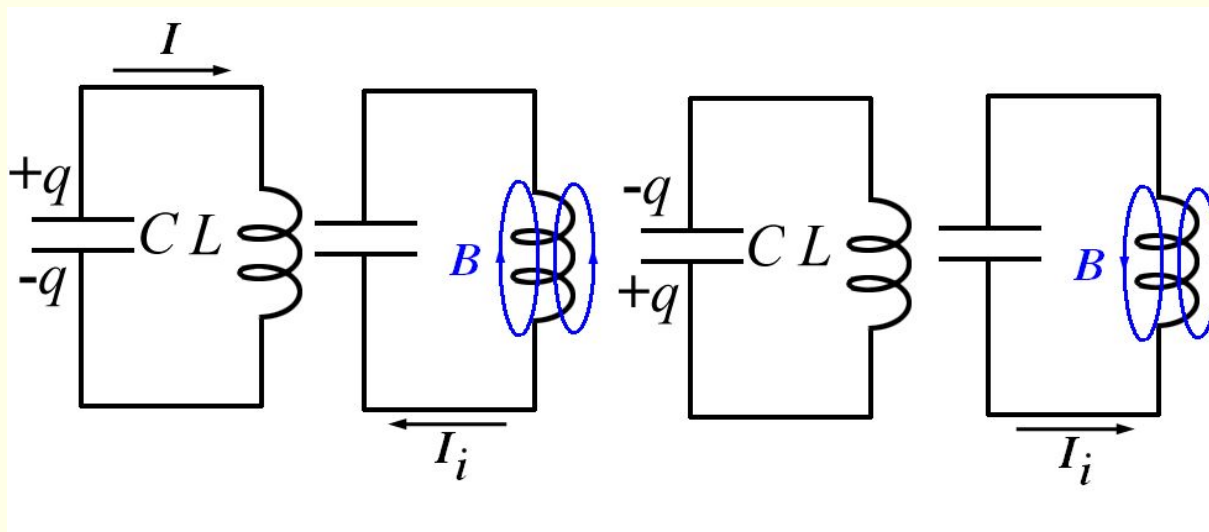
$$W_{\text{м.п.}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{LQ^2}{2}.$$

Если $R \rightarrow 0$, тогда полная энергия:

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LQ^2}{2} = \text{const.}$$

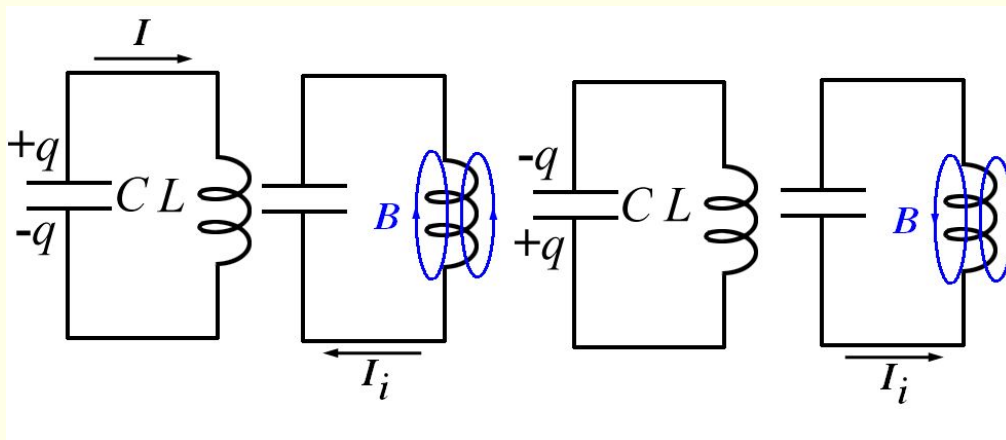
Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью равной скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Если l – линейные размеры контура не велики ($l \ll c / \nu$, ν – частота колебаний в контуре), то в каждый момент времени сила тока во всех частях контура одинакова. Такой переменный ток называется **квазистационарным.**

Правило Ленца: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им переменное магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток, т.е. когда конденсатор C разрядился (энергия магнитного поля и ток в цепи максимальные), то в этот момент ток I начинает убывать.



Следовательно, магнитное поле в катушке ослабевает, и в катушке возникает индукционный ток I_i , который препятствует уменьшению магнитного поля.

Направление I_i совпадает с направлением первоначального тока, и положительные заряды продолжают идти в том же направлении, заряжая положительно другую обкладку конденсатора C .



Закон Ома для контура:

$$U_R + U_C = \mathcal{E}_s - L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

U_R $\frac{Q}{C}$

U_C – разность потенциалов (напряжение) на обкладках конденсатора C , \mathcal{E}_s – э.д.с. самоиндукции.

Из закона сохранения заряда следует, что сила квазистационарного тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}.$$

Уравнение (1):

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

$$Q'' + \frac{R}{L} Q' + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (2) \quad -$$

дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре – дифференциальное *уравнение затухающих колебаний*.

• $R = 0 \rightarrow$

$$Q'' + \frac{1}{LC} Q = 0$$

дифференциальное *уравнение гармонических колебаний*.

Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются *гармоническими*.

Уравнение гармонических колебаний:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3)$$

Q_m – амплитуда заряда на конденсаторе C ,
 ω_0 – собственная частота гармонических колебаний.

Из уравнения (2) следует

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

- формула Томсона.

$$I = \overset{\square}{Q} = -\underset{\substack{\square \\ \square \\ \square \\ I_m}}{\omega_0 Q_m} \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

$$I_m = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}} \quad - \quad \text{амплитуда тока.}$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{\underset{\substack{\square \\ C \\ U_m}}{C}} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5)$$

$$U_m = \frac{Q_m}{C} \quad - \quad \text{амплитуда напряжения}$$

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

• *энергия электрического поля аналогична*

потенциальной энергии упругой деформации

• *энергия магнитного поля аналогична*

кинетической энергии;

• Индуктивность L играет роль **массы m**

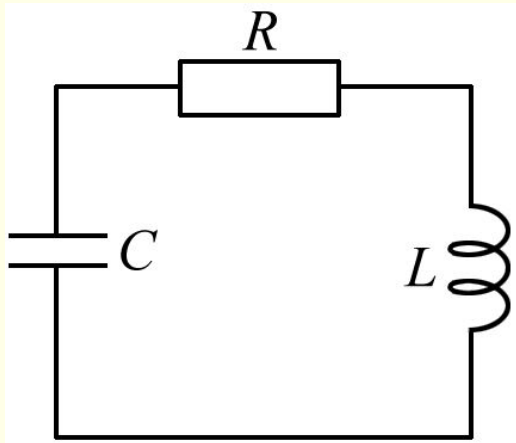
• $1/C$ – роль **коэффициента жесткости k**

• Заряду q соответствует **смещение маятника x**

• Силе тока $I \sim$ **скорость v**

• Напряжению $U \sim$ **ускорение a**

Затухающие электрические колебания



В реальном контуре $R \neq 0$, следовательно, есть потеря энергии и затухание колебаний, которое характеризуется коэффициентом затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

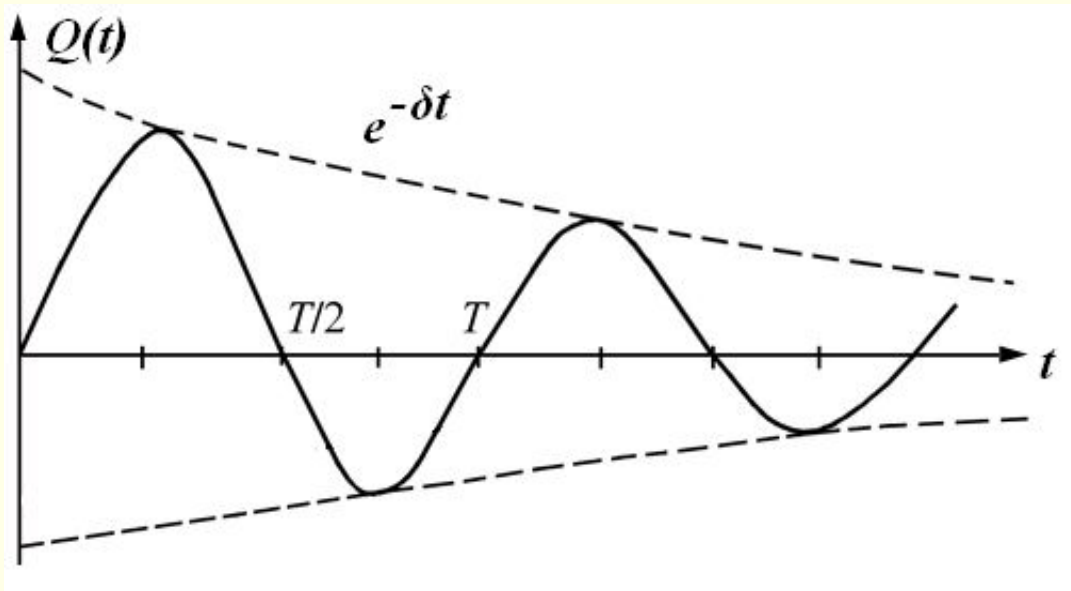
$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = 0$$

— дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний:

$$Q = Q_m e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi),$$



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

- частота затухающих колебаний.

При $R = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$ – собственной частоте контура.

Логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC} \frac{R}{L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$W(t)$ – энергия колебательной системы в момент времени t ,

$W(t) - W(t+T)$ – убыль энергии за промежуток времени от t до $T+t$.

Вынужденные электрические колебания

возникают в контуре при включении внешней э.д.с.

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (1)$$

Закон Ома:

$$IR + \underbrace{U_c}_{\frac{Q}{C}} = \underbrace{\mathcal{E}_s}_{-L \frac{dI}{dt}} + U. \quad (2)$$

$$\underbrace{Q}_{\underbrace{L}_{2\delta}} + \frac{R}{\underbrace{L}_{2\delta}} \underbrace{Q}_{\underbrace{L}_{2\delta}} + \frac{1}{\underbrace{LC}_{\omega_0^2}} Q = \frac{U_m}{\underbrace{L}_{X_0}} \cos \omega t \quad (3)$$

дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

При установившихся вынужденных колебаниях заряд конденсатора колеблется гармонически с циклической частотой внешней э.д.с. – ω

$$Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha), \quad (4)$$

где α – сдвиг фаз между Q и внешней э.д.с.,

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{U_m}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{4R^2}{4L^2} \omega^2}} = \\ &= \frac{U_m}{L \sqrt{\frac{\omega^2}{L^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \frac{\omega^2}{L^2} R^2}} = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$I = \underline{Q} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = \underbrace{\omega Q_m}_{I_m} \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6)$$

$$I_m = \omega Q_m. \quad (7)$$

Подставив уравнение (5) в уравнение (7), получим

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (8)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{— полное сопротивление цепи.}$$

Из уравнения для внешней э.д.с. (1) и уравнения (6) видно, что между током в контуре I и внешней э.д.с. U есть сдвиг фаз

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний дает

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \\ &= \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{\omega}{L} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (10) \end{aligned}$$

Из уравнений (9), (10) следует

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (11)$$

ωL – реактивное индуктивное сопротивление,

$\frac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $\varphi > 0$, т.е. ток I отстает по фазе от U ,

если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, то $\varphi < 0$, т.е. ток I опережает по фазе U .

Уравнение (2) запишем в виде:

$$IR + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t \quad (12) \Rightarrow$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (13)$$

Сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени внешней э.д.с.

$$U_R = RI = RI_m \cos \left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (14)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos \left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = U_{Cm} \cos \left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (15)$$

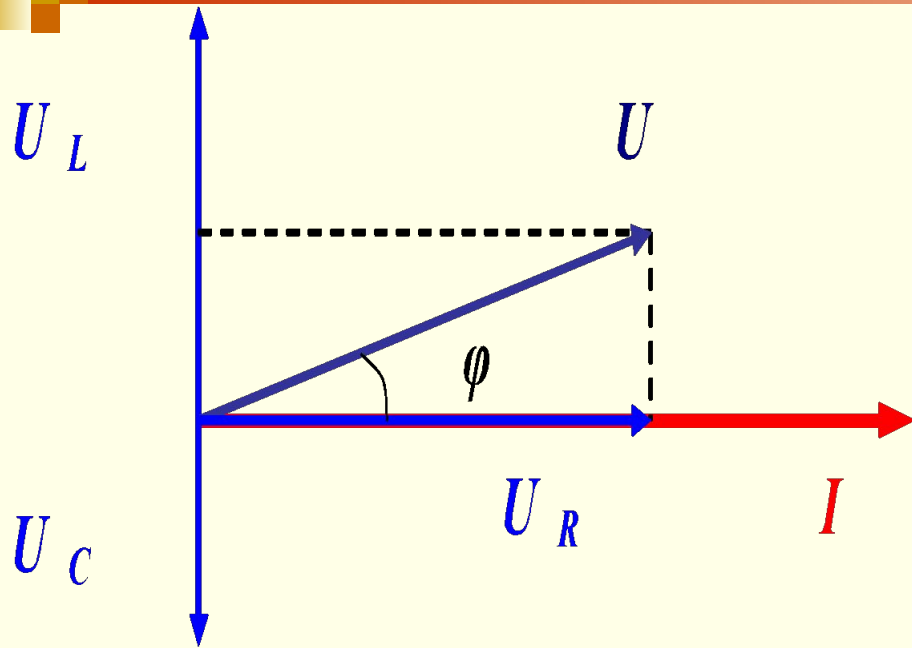
$$U_{Cm} = \frac{Q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (16)$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (17)$$

Сравнивая формулы для I , U_R , U_C , U_L , можно сделать вывод

U_R изменяется в фазе с током I ,
 U_C отстает от I , U_R по фазе на $\frac{\pi}{2}$

U_L опережает I по фазе на $\frac{\pi}{2}$

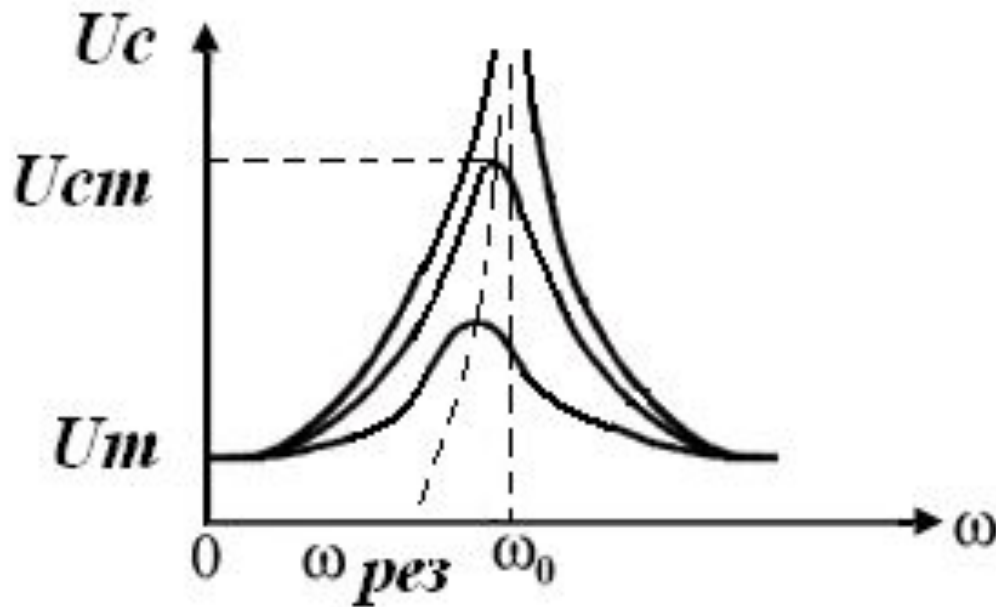


Фазовые соотношения представляются векторной диаграммой

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L.$$

Резонансная частота для заряда Q и напряжения U_C .

$$\omega_Q = \omega_{U_C} = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0.$$



На рисунке изображены резонансные кривые для напряжения U_C .

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

– коэффициент затухания.

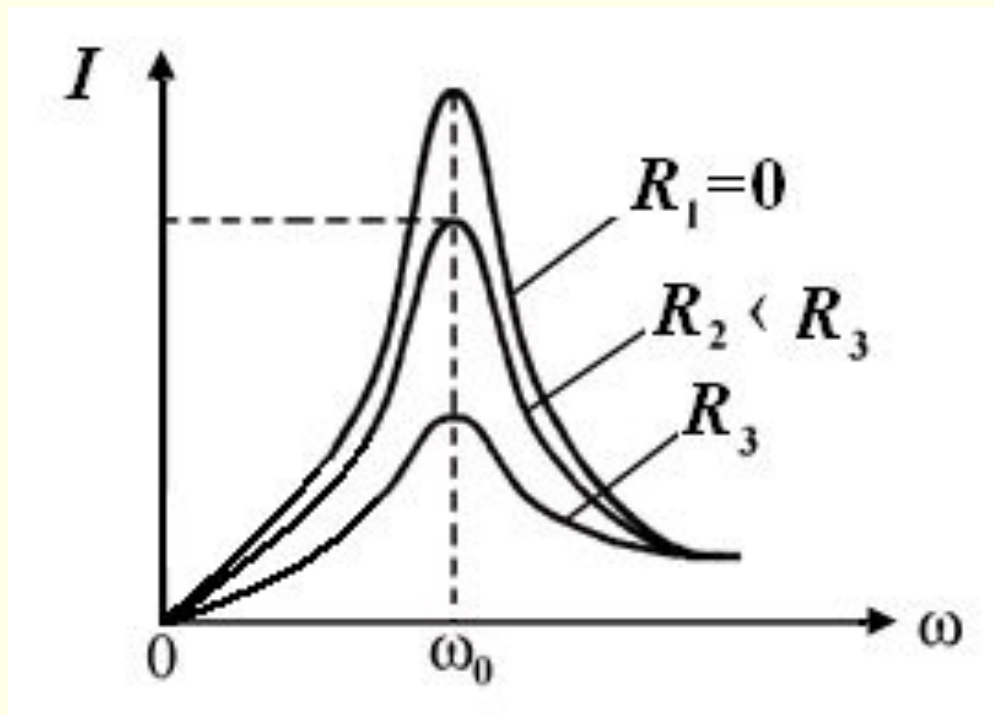
Чем меньше R и больше L , тем выше и острее максимум при резонансе.

$$U_{ctm} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Резонанс для тока возникает при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$.

В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением $\varphi = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0$), изменение тока и напряжения происходит синфазно.

$$\omega_I = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$




Полное сопротивление цепи Z становится минимальным ($Z = R$), а ток становится максимальным.

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ & & & \rightarrow 0 & \end{matrix}$

Резонансные кривые для тока сходятся в 0, т.к. при постоянном напряжении ($\omega = 0$) ток в цепи, содержащей конденсатор, не течет.

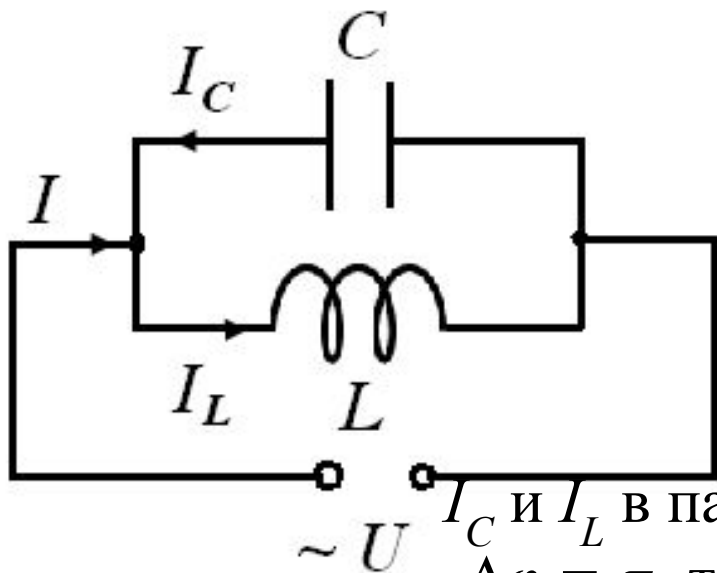
Ток в цепи определяется активным сопротивлением R и принимает максимально возможное при данном U_m значение. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи $U_R = U$, а падение напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется *резонансом напряжений* или *последовательным резонансом*.



Явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определённой частоты (для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура — радиоприёмник).

Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчёте изоляции электрических цепей (линий), содержащих C и L с целью предотвращения её пробоя.

✓ **Резонанс токов (параллельный резонанс)** наблюдается в цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные конденсатор C и катушку индуктивности L , при приближении частоты приложенного напряжения к резонансной частоте



$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

В этом случае разность фаз токов

I_C и I_L в параллельных ветвях

$\Delta\varphi = \pi$, т.е. токи в ветвях противоположны по

фазе, а амплитуда тока $I = I_m = I_{Cm} + I_{Lm}$ во внешней (неразветвлённой) цепи равно нулю.

При активном сопротивлении цепей $R \neq 0$ разность фаз токов $\Delta\varphi \neq \pi$ амплитуда силы тока $I_m \neq 0$, но будет иметь наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов токи I_C и I_L компенсируются, а сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через R . Может оказаться, что сила тока $I \ll I_C$ и I_L . Такой контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к $\omega_{рез}$.

Используется в резонансных усилителях; индукционных печах, в которых C и L подбирают таким образом, чтобы при частоте генератора сила тока через нагревательную катушку была гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

Переменный ток

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей R , L , C , переменного тока, обусловленного переменным напряжением $U = U_m \cos \omega t$. (1)

Этот ток изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. (2)

$$I_m(U_m, C, L, R, \omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (3)$$

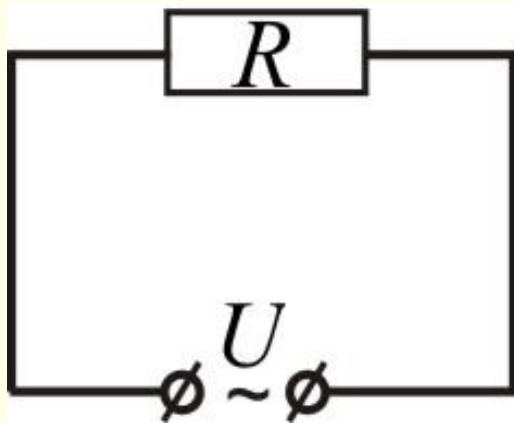
Ток I отстает по фазе от напряжения U на φ , определяемую выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4)$$

Полное электрическое сопротивление (импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (5)$$

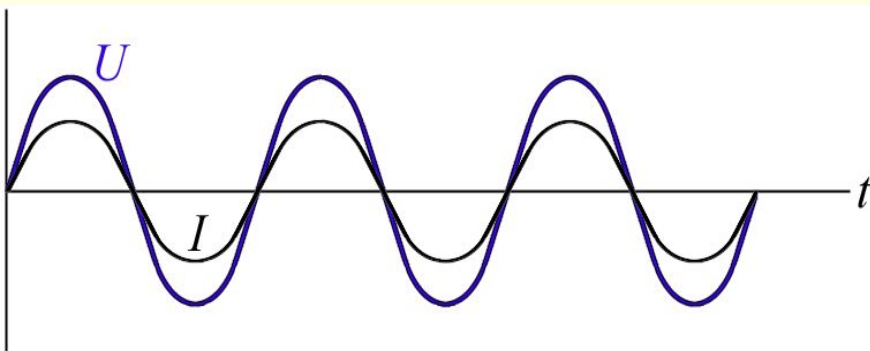
✓ Переменный ток, текущий через R .



$$L \rightarrow 0, C \rightarrow 0$$

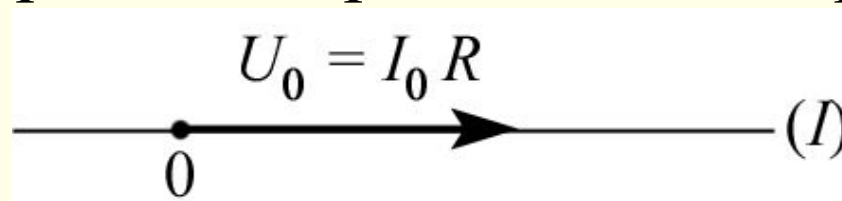
Закон Ома: $IR = U = U_m \cos \omega t$.

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

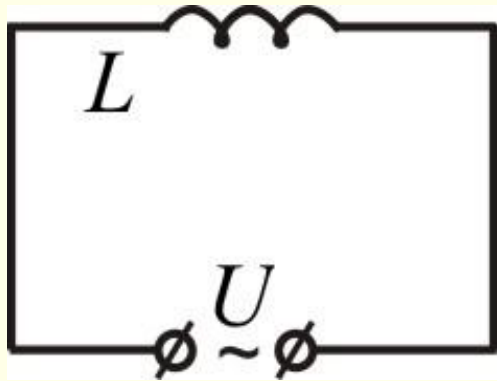


Следовательно, ток изменяется в фазе с напряжением и $\varphi = 0$.

Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



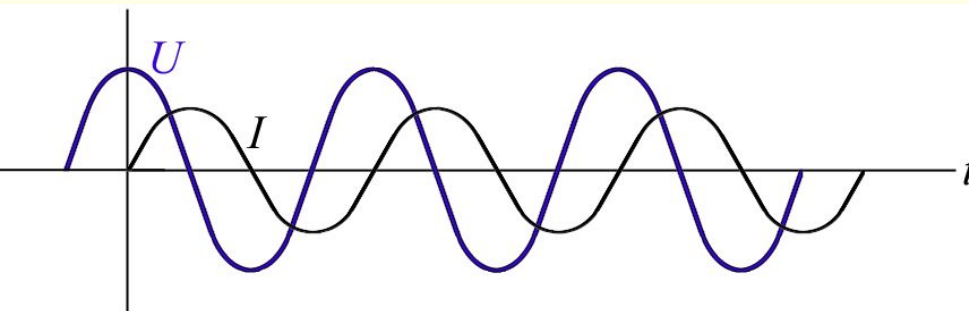
✓ Переменный ток, текущий через L



$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_L = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$R \rightarrow 0, C \rightarrow 0$$

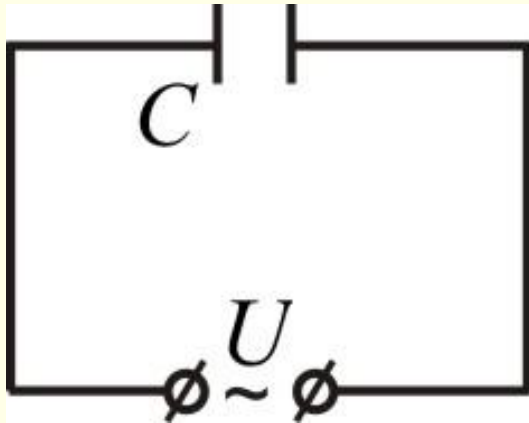


I_L отстает от U_L на $\frac{\pi}{2}$

$R_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление.

Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность не оказывает сопротивление.

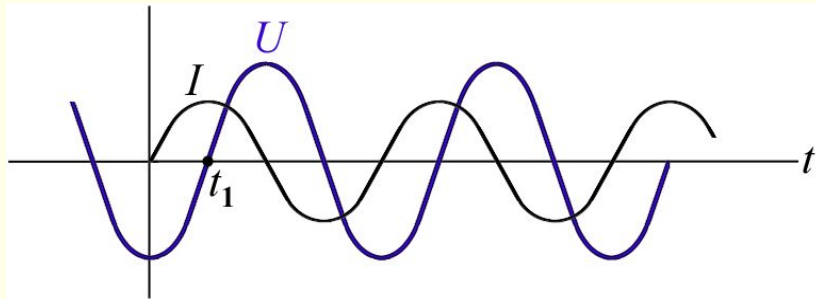
✓ Переменный ток, текущий через C



$R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$I_C = I_m \cos\left(\omega t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$



I_C опережает U_C на $\frac{\pi}{2}$

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

– реактивное емкостное сопротивление.

При $R = 0$

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = R_L - R_C$$

– реактивное сопротивление.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

– полное сопротивление.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

– фаза:

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений $U(t)$ и $I(t)$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

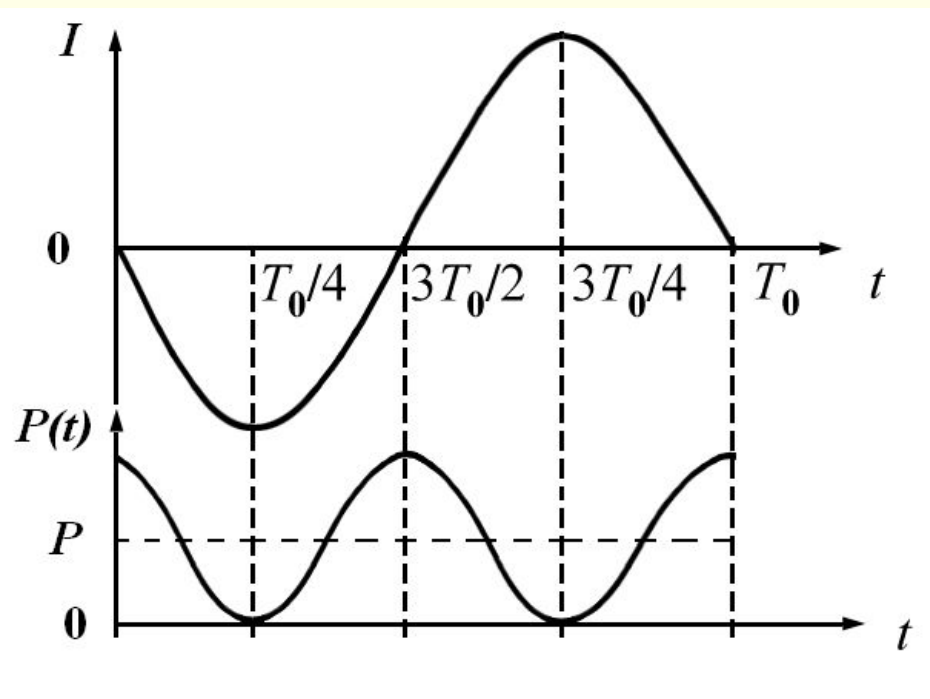
$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi).$$

сред.знач.

Среднее значение $\langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle = 0.$

Практическое значение представляет *среднее значение мощности*

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi.$$

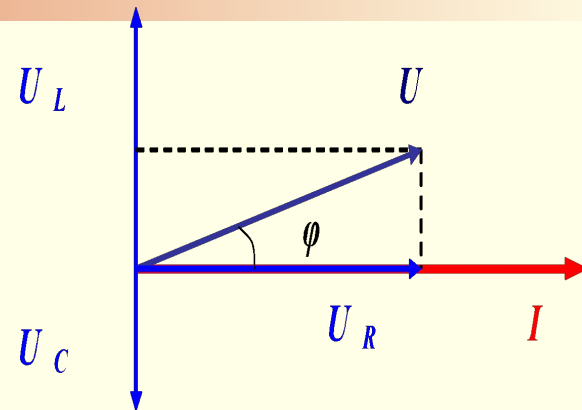


$$P(t) \sim \cos 2\omega t,$$

т.е. мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой в 2 раза превышающей частоту тока.

Из векторной диаграммы видно, что

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \frac{R}{Z}.$$



Подставляем это выражение в формулу для среднего значения мощности:

$$P = \frac{1}{2} \frac{U_m I_m R}{Z} = \frac{1}{2} \frac{U_m}{\cancel{Z} I_m} I_m R = \frac{R I_m^2}{2}.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

– действующее (эффективное) значение силы тока.

Аналогично,

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

– *действующее значение напряжения.*

Уравнение средней мощности можно записать в виде:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

$\cos \varphi$ называется *коэффициент мощности.*

В технике стремятся сделать $\cos \varphi$ максимальным.

Если $\cos \varphi$ мал, то для выделения в цепи требуемой мощности надо иметь большой ток, что приводит к росту потерь в проводах.

Для промышленных установок $\cos \varphi \geq 0,85$.

Рекомендуемая литература

- 1. Алтунин Б.Ю., Панкова Н.Г. Теоретические основы электротехники:** Комплекс учебно - методических материалов: Часть 1 / Б.Ю. Алтунин, Н.Г. Панкова; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-130 с.
- 2. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.1/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-98 с.
- 3. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.2/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2008.-98 с
- 4. Касаткин, А.С. Электротехника** /А.С. Касаткин, М.В. Немцов.-М.: Энергоатомиздат, 2000.
- 5. Справочное пособие по основам электротехники и электроники** /под. ред. А.В. Нетушила.-М.: Энергоатомиздат, 1995.
- 6. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники.**-3-е изд., перераб. И доп.-М.: Радио и связь, 1990.-512 с.: ил.
- 7. Новожилов, О. П. Электротехника и электроника:** учебник / О. П. Новожилов. – М.: Гардарики, 2008. – 653 с.

Тема 13 Закончена

Благодарю за внимание