Текстовые задачи в школьном курсе математики

Целью работы является разработка методики изучения текстовых задач в школьном курсе математики.

Задачи исследования:

1. Проанализировать действующие учебники по математике для выявления в них текстовых задач.
2. Выделить основные классы текстовых задач и алгоритм решения для каждого класса задач.
3. Изучить статьи и научно-методическую литературу по данной теме.
4. Систематизировать теоретический материал, связанный с методами и приемами решения текстовых задач.
5. Разработать методику изложения основных методов и приемов решения текстовых задач.
7. Разработать программу элективного курса по теме «Решение текстовых задач».

Методы решения текстовых задач:

1. Арифметический метод
2. Алгебраический метод
3. Комбинированный метод
4. Функционально-графический метод
5. Геометрический метод

Виды текстовых задач:

1. Задачи на движение:
   – движение по прямой дороге
   – движение по замкнутой дороге
   – движение по реке
   – движение протяженных тел
   – средняя скорость движения
2. Задачи на работу:
   – явный объем работы
   – неявный объем работы
3. Задачи на проценты
4. Задачи на растворы и сплавы

Задача 1. Катер спустился вниз по течению реки на 50 км, а затем прошел в обратном направлении 36 км, что заняло у него на 30 минут больше времени, чем по течению. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч?

Решение. Пусть собственная скорость катера равна х км/ч, тогда его скорость по течению реки равна (х + 4) км/ч, а против течения реки (х – 4) км/ч.

Время движения катера

по течению реки равно $\dfrac{50}{x+4}$ ч,

а против течения реки $\dfrac{36}{x-4}$ ч.

Так как 30 минут = 0,5 часа, то согласно условию задачи составим уравнение:

$$\frac{36}{x-4} - \frac{50}{x+4} = \frac{1}{2}$$

$$72\,(x+4) - 100\,(x-4) = (x-4)\,(x+4) \qquad (x \neq 4)$$

$$x^2 + 28x - 704 = 0$$

$$x_1 = 16, \qquad x_2 = -44 < 0 \quad (\textit{не подходит})$$

Итак, собственная скорость катера равна 16 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

Задача 2. Аквариум наполняется водой через две трубки за 3 часа. За сколько часов может наполниться аквариум через первую трубку, если для этого потребуется на 2,5 ч меньше, чем для наполнения аквариума через вторую трубку?

Решение. Примем объем аквариума за 1. Пусть аквариум наполняется через одну первую трубку за х часов. Составим таблицу и найдем производительности (пропускную способность) трубок.

	Объем аквариума	Произво-дительность (1/час)	Время (час)
Первая трубка	1	$\frac{1}{x}$	x
Вторая трубка	1	$\frac{1}{x+2,5}$	$x+2,5$

	Объем работы	Произво-дительность (1/час)	Время (час)
Первая трубка	$\frac{3}{x}$	$\frac{1}{x}$	3
Вторая трубка	$\frac{3}{x+2,5}$	$\frac{1}{x+2,5}$	3

Составим уравнение:

$$\frac{3}{x}+\frac{3}{x+2,5}=1$$

$$2x^2-7x-15=0$$

Последнее уравнение имеет один положительный корень $x = 5$. Значит, аквариум наполняется через одну первую трубку за 5 часов.

Ответ: 5 часов.

Задача 3. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года – 726 изделий.

Решение. Обозначим через а часть, на которую увеличивался выпуск продукции каждый раз. Тогда имеем уравнение:

$$600(1+a)^2 = 726$$

$$(1+a)^2 = 1,21$$

$$a = 0,1$$

Значит, завод дважды увеличивал выпуск продукции на 10%.

Ответ: 10%.

Задача 4. Клиент А сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение. Обозначим через х – часть, на которую банк повышает сумму вклада. Тогда через два года на счету клиента А будет $6200(1+x)^2$ рублей, а у клиента Б через год будет $6200(1+x)$ рублей.

Согласно условию задачи составим уравнение:

$$6200(1+x)^2 - 6200(1+x) = 682$$

$$100(1+x)^2 - 100(1+x) - 11 = 0$$

Сделаем замену $t = 10(1+x)$,
тогда уравнение примет вид

$$t^2 - 10t - 11 = 0, \quad t_1 = 11, \quad t_2 = -1$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 10(1+x)=11, \\ 10(1+x)=-1, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=0,1, \\ x=-0,1<0 \Rightarrow \textit{не подходит}. \end{array}\right.$$

Отсюда $x=0,1$.

Следовательно, банк начисляет 10% годовых по вкладам.

Ответ: 10%.

Задача 5. Один раствор содержит 20% (по объему) соляной кислоты, а второй – 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50% раствора кислоты?

Решение. Пусть для получения нового раствора необходимо взять х литров первого раствора, а значит, и (100 – х) литров второго раствора.

	Общий объем (л)	Концент-рация кислоты	Объем чистой кислоты (л)
Первый раствор	x	0,2	$0,2x$
Второй раствор	$100-x$	0,7	$0,7(100-x)$
Новый раствор	100	0,5	$0,5\cdot 100=50$

Составим уравнение:

$$0,2x + 0,7(100 - x) = 50$$

$$x = 40$$

Итак, необходимо взять 40 литров первого раствора и 100–40=60 (литров) второго раствора.

Ответ: 40 л; 60 л.