

**Курс: Элементы  
компьютерной  
математики**



Лектор – Склярова Елена  
Александровна

## *Тема: Клеточные автоматы*



- Клеточные автоматы. Общие понятия.
- Игра «Жизнь»

# Автоматы. Общие понятия.

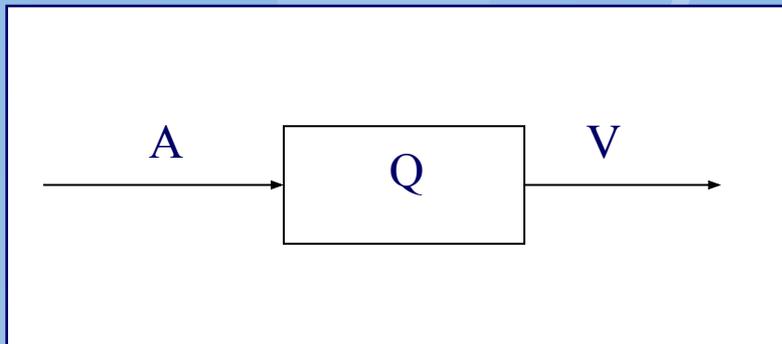
**Автоматом** называют устройство (или совокупность устройств), которое без непосредственного участия человека выполняет процессы приема, преобразования и передачи энергии, материалов или информации в соответствии с заложенной в него программой.

Нас интересуют автоматы, выполняющие дискретное преобразование информации, для которых заданы множества  $A$  входных сигналов,  $Q$  внутренних состояний и  $V$  выходных сигналов, а также две функции: функция переходов  $\delta$  и функция выходов  $\alpha$ .

Функция переходов определяет, в какое состояние  $q'$  (из множества возможных состояний  $Q$ ) перейдет автомат, если он находится в состоянии  $q$  и на вход поступил сигнал  $a \rightarrow \delta(q,a) = q'$ , а функция выходов показывает, какой при этом образуется выходной сигнал  $v$  (из множества выходных сигналов  $V$ ):  $\alpha(q,a) = v$ .

# Автоматы. Общие понятия.

Множество сигналов и состояний дискретны, и, кроме того, дискретно множество моментов, в которые поступают входные сигналы, выдаются выходные сигналы и меняются состояния. В этом случае число возможных значений аргументов функций переходов и выходов также конечно, и эти функции можно задавать таблично. Подобные автоматы называются **конечными автоматами**.



$$a \rightarrow \delta(g, a) = g'$$

$$\alpha(g, a) = v$$

# Клеточные автоматы

*Клеточные автоматы (КА)* являются частным случаем конечных автоматов, используемых для моделирования динамического поведения однородных сред. При этом пространство и время считаются дискретными, а физические величины в каждой точке моделируемой среды могут принимать конечное множество дискретных значений.

Для КА существует достаточно развитая теория. В ее основу легли работы Дж. фон Неймана, который в 1948 году ввел в науку само понятие "клеточный автомат" при разработке первой компьютерной модели биологического самовоспроизводства.

# Клеточный автомат. Определение

**Клёточный автомат (КА)** — набор клеток, образующих некоторую периодическую решетку с заданными правилами перехода, определяющими состояние клетки в следующий момент времени через состояние клеток, находящимися от нее на расстоянии не больше некоторого, в текущий момент времени.

Как правило, рассматриваются автоматы, где состояние определяется самой клеткой и ближайшими соседями. В качестве решетки обычно рассматривается кубическая решетка.

# Клеточные автоматы

Клеточный автомат можно представить, как регулярную решетку (или "таблицу") ячеек ("клеток"), каждая из которых может находиться в конечном числе возможных состояний, например 0 или 1. Состояние системы полностью определяется значениями переменных в каждой клетке. Важными особенностями клеточных автоматов являются следующие:

- Состояние каждой ячейки обновляется в результате выполнения последовательности дискретных постоянных шагов во времени (или тактов).
- Переменные в каждой ячейке изменяются одновременно ("синхронно"), исходя из значений переменных на предыдущем шаге.
- Правило определения нового состояния ячейки зависит только от локальных значений ячеек из некоторой окрестности данной ячейки.

# Клеточный автомат. Общие понятия

Клеточный автомат состоит из набора объектов (ячеек), обычно образующих регулярную решетку.

Состояние отдельно взятого  $i$ -го объекта (или ячейки) в момент времени  $n$  характеризуется некоторой переменной, которая может быть целым, действительным или комплексным числом, либо представлять собой набор из нескольких чисел. Рассматриваемые состояния ячеек изменяются синхронным образом через дискретные интервалы времени в соответствии с локальными вероятностными правилами, которые могут зависеть от состояния переменных в ближайших соседних узлах. Эти правила не меняются со временем.

# Общие понятия

Клеточный автомат является дискретной динамической системой, поведение которой полностью определяется в терминах локальных зависимостей.

Назовём **дискретным пространством** пространство над дискретным множеством элементов.

Экземпляр пространства этого класса будем называть **решёткой клеточного автомата**, а каждый его элемент - **клеткой**.

Каждая клетка характеризуется определённым значением из некоего множества.

О клетке говорят, что она содержит или имеет соответствующее значение, либо находится или пребывает в состоянии, кодируемом данным значением *ain*. Оно может быть булевым, целым, числом с плавающей точкой, множеством или другим объектом, в зависимости от потребностей задачи.

# Общие понятия

Совокупность состояний всех клеток решётки называется **состоянием решётки**.

Состояние решётки меняется в соответствии с некоторым законом, который называется **правилами клеточного автомата**.

Каждое изменение состояния решётки называется **итерацией**.

Время в рассматриваемой модели дискретно и каждая итерация соответствует некому моменту времени.

Правила определяют, какое значение должно содержаться в клетке в следующий момент времени, в зависимости от значений в некоторых других клетках в текущий момент, а также, возможно, от значения, содержащегося в ней самой в текущий момент.

# Общие понятия

Если новое состояние клетки зависит от текущего её состояния, то о соответствующем клеточном автомате говорят, что он является автоматом **с клетками с памятью**, иначе - автоматом **с клетками без памяти**.

Множество клеток, влияющих на значение данной, за исключением её самой, называется **окрестностью клетки**.

Окрестность клетки удобнее задавать, если на решётке ввести метрику, поэтому далее, для удобства, будем говорить о решётке, как о дискретном метрическом пространстве.

# Общие понятия

Одно из главных отличий клеточной системы от всех прочих вычислительных систем состоит в том, что во всех других системах присутствуют две принципиально различные части:

**архитектурная**, которая фиксирована и активна (то есть выполняет некоторые операции) и **данные**, которые переменны и пассивны (то есть сами по себе они ничего сделать не могут).

У клеточных автоматов и та, и другая части состоят из принципиально изоморфных, неотличимых друг от друга элементов. Таким образом, вычислительная система может оперировать своей материальной частью, модифицировать, расширять себя и строить себе подобных.

# Общие понятия

Отметим **основные свойства классической модели клеточных автоматов**.

- **Локальность правил.** На новое состояние клетки могут влиять только элементы её окрестности и, возможно, она сама;
- **Однородность системы.** Ни одна область решётки не может быть отличена от другой по каким-либо особенностям правил и т.п. Однако на практике решётка оказывается конечным множеством клеток (ведь не возможно выделить неограниченный объём данных).

В результате могут иметь место краевые эффекты, клетки стоящие на границе решётки будут отличны от остальных по числу соседей. Во избежание этого можно ввести периодические краевые условия

# Общие понятия

- **Множество возможных состояний клетки - конечно.** Это условие необходимо, чтобы для получения нового состояния клетки требовалось конечное число операций. Отметим, что оно не мешает использовать клетки для хранения чисел с плавающей точкой при решении прикладных задач.
- **Значения во всех клетках меняются одновременно,** в конце итерации, а не по мере вычисления. В противном случае порядок перебора клеток решётки, при совершении итерации, существенно влиял бы на результат. Необходимо отметить, что на практике, при решении определённых задач, возникает потребность в том, чтобы отказаться от последних трёх свойств.

# Общие понятия

КА можно разделить на:

- *детерминированные;*
- *вероятностные;*
- *подвижные;*
- *неподвижные;*
- *однородные;*
- *неоднородные.*

В *детерминированных* КА состояние ячейки  $a_{i,n+1}$  в последующий момент времени однозначно определяется состоянием этой ячейки и ее ближайших соседей в предыдущий момент времени.

В этом случае состояние данного элемента в момент времени  $n+1$  является однозначной функцией  $F$  от двух переменных – состояния этого элемента и суммы состояний его ближайших соседей в предшествующий момент времени  $n$ . При таком определении клеточный автомат не обладает памятью.

# Общие понятия

**Клеточные автоматы с памятью** можно получить, предположив, что функция  $F$  зависит, например, также от состояния элемента в еще более ранний момент времени.

**Подвижные КА** характеризуются возможностью изменения положения клетки в решетке во время эволюции системы.

В **неподвижных КА** положение клетки во время эволюции остается постоянным. Иногда используются правила, записанные в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (класс КА-ОДУ).

В этом случае состояния ячеек задаются набором переменных, значения которых способны принимать любые действительные числа.

# Общие понятия

Для таких автоматов ДУ решаются для каждой ячейки отдельно на протяжении фиксированного отрезка времени, при этом каждая ячейка может иметь различные начальные условия. Этот класс КА очень плотно прилегает к ДУ в частных производных.

КА, в которых состояния ячеек в последующий момент времени определяются на основе некоторых вероятностей, называются **вероятностными КА** (ВКА). В классических ВКА правила переходов имеют абстрактный характер и не связаны однозначно с реальными процессами, происходящими в моделируемой системе. В таких автоматах при моделировании процесса для каждой ячейки датчиком случайных чисел генерируется случайное число  $Q$  ( $0 < Q < 1$ ), которое сравнивается с вероятностью  $w$  реализации этого процесса. Если  $Q < w$ , то процесс реализуется. К таким КА относятся метод реакционного решеточного газа, метод прямого стимулирования Монте-Карло и метод вероятностного КА с применением процедуры Монте-Карло.

# Общие понятия

В **ВКА** вместо функции  $F$  необходимо задать набор вероятностей изменения состояния клетки, которые показывают, какой будет вероятность перехода  $i$ -го элемента из состояния в  $n$ -й момент времени в состояние в последующий  $n+1$ -й момент времени при условии, что состояния его ближайших соседей в  $n$ -й момент времени принимали определенные значения.

# Общие понятия

Для решения наиболее трудных задач типа "реакция – диффузия – конвекция" с учетом **флуктуаций** был разработан метод вероятностного клеточного автомата с применением **процедуры Монте-Карло** (ВКА-МК или просто ВКА).

Клеточный автомат представляет собой регулярную решетку, состоящую из  $N_2 = N_0$  элементарных ячеек. Форма решетки может быть не только квадратной, но и прямоугольной с сильно вытянутыми ячейками. Каждая ячейка характеризуется набором целых чисел: числом молекул соответствующего сорта в данной ячейке (например,  $n_A, n_B, n_C$  в случае трех сортов молекул А, В и С) и своими целочисленными координатами (например,  $i$  и  $j$ ).

Ячейке приписывается также определенный объем  $V_m$  и линейный размер  $l = (V_m)^{1/3}$ . Объем  $V_m$  используется при задании вероятностей протекания химических реакций в ячейках. Все ячейки считаются гомогенными.

# Общие понятия

**Флуктуации** — случайные отклонения от среднего значения физических величин, характеризующих систему из большого числа частиц; вызываются тепловым движением частиц или квантовомеханическими эффектами.

Примером термодинамических флуктуаций являются флуктуации плотности вещества в окрестностях критических точек, приводящих, в частности, к сильному рассеянию света веществом и потери прозрачности.

Флуктуации, вызванные квантовомеханическими эффектами присутствуют даже при температуре абсолютного нуля. Они принципиально неустранимы.

# Правила построения КА

Общие правила построения клеточных автоматов можно сформулировать следующим образом:

- Состояние клеток дискретно (обычно 0 и 1, хотя могут быть автоматы и с большим числом состояний).
- Соседями являются ограниченное число клеток, часто это ближайшие клетки.
- Правила, задающие динамику развития клеточного автомата, обычно имеют простую функциональную форму и зависят от решаемой проблемы.
- Клеточный автомат является тактируемой системой, т.е. смена состояний клеток происходит одновременно.

# Область применения КА

Клеточные автоматы предоставляют большую свободу в выборе структуры и правил развития системы.

Это позволяет моделировать на их основе или решать с их помощью самые разнообразные задачи:

- ✓ моделирование химических и физических процессов,
- ✓ проведение исследований по "Искусственной жизни" (Artificial Life)
- ✓ исследование биологических процессов
- ✓ моделирование распространения слухов и т.д.

# Общие понятия

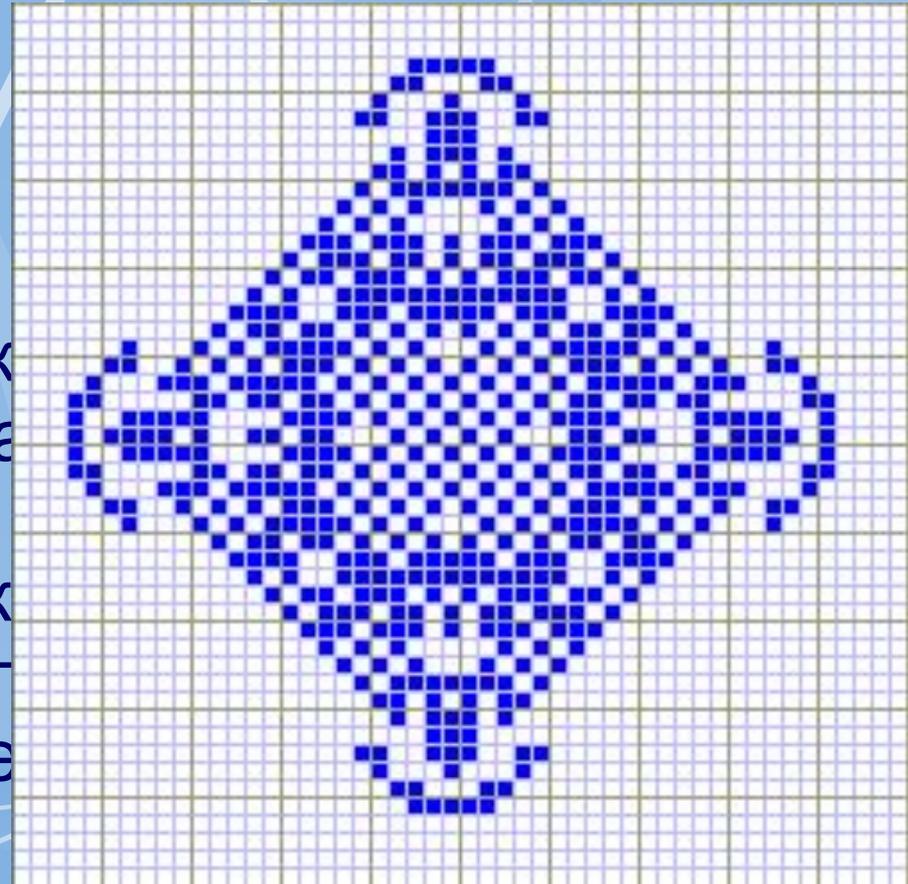
Клеточные автоматы различаются, в частности, количеством состояний клеток, размерностью сетки и правилом изменения состояний клеток. Мы рассмотрим некоторые разновидности автоматов с двумерной сеткой.

В двумерных автоматах соседями клеток обычно считаются 5 клеток - сама клетка и 4 ее непосредственных не диагональных соседа (**окрестность фон Неймана**), или 9 клеток - сама клетка и 8 ее непосредственных соседей, включая диагональные клетки (**окрестность Мура**).

# Общие понятия

Состояние клеточного автомата может быть описано матрицей, например:

Здесь состояния клеток соответствующих ячейка  
Но намного интереснее  
виде изображения, где к  
соответствует клетке, и т  
определяется состояние



# Примеры КА

## Автоматы серии "Поколения"

Автоматы с числом состояний более чем два. Правила изменений состояния клетки записываются следующим образом

**S/B/C**

где:

**S** - набор цифр от 0 до 8, определяет число "живых" соседей, при котором клетка остается "в живых",

**B** - набор цифр от 0 до 8, определяет число "живых" соседей при котором "мертвая" клетка становится "живой"

**C** - число, определяет число ходов "умирания" клетки

# Примеры КА

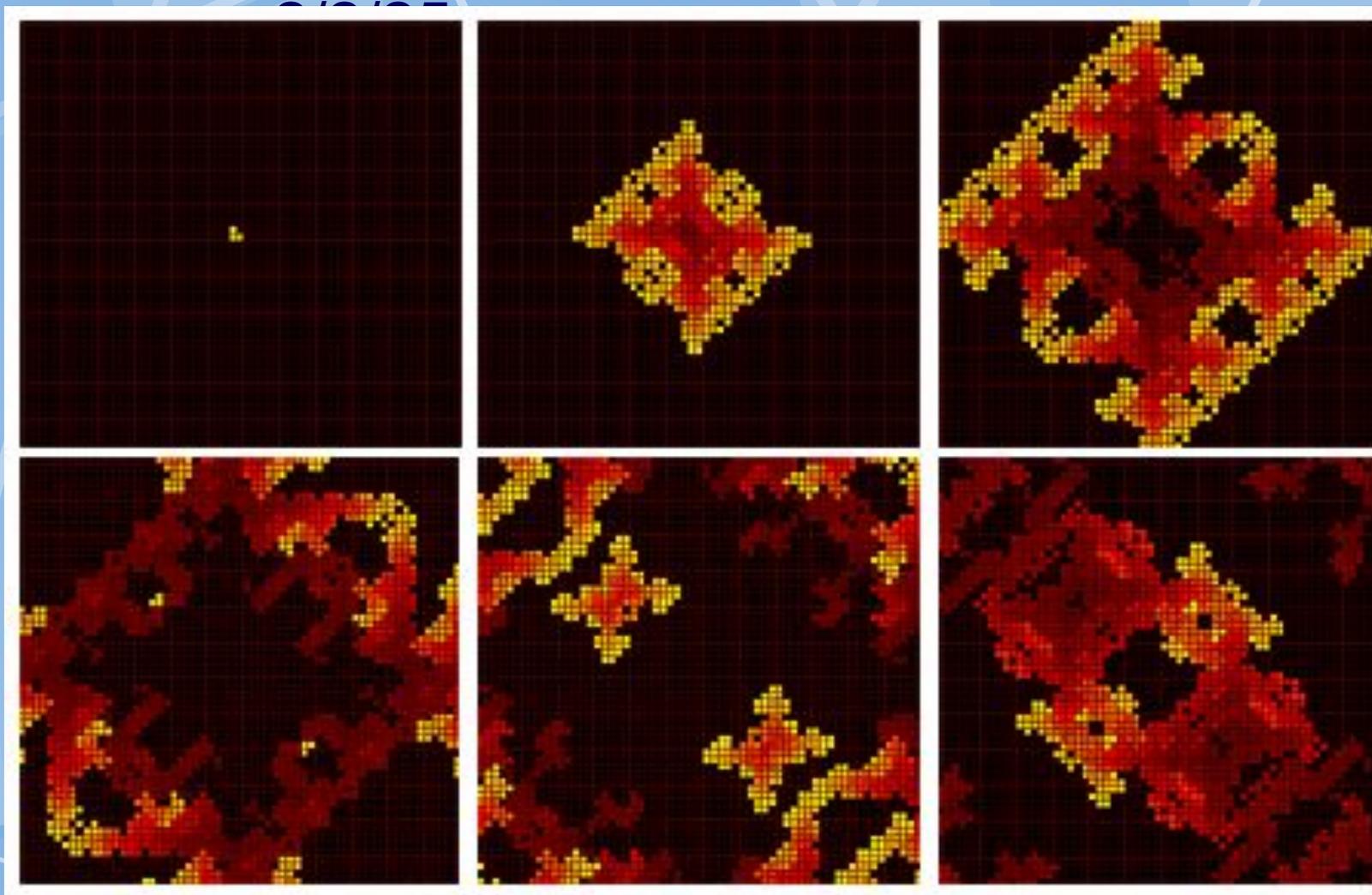
Например - 23/3/14

Означает, что клетка живет, если у нее 2 или 3 соседа, что при ровно трех соседях "рождается" новая клетка, и что клетка умирает за четырнадцать ходов

Если число "живых" соседей у клетки не равняется ни одной из цифр из набора  $S$ , клетка начинает "умирать" и ее состояние увеличивается с каждым ходом, пока не достигнет  $S$ , после чего клетка пропадает. "Умиращая" клетка не участвует в подсчете числа "живых" соседей при расчете следующего шага. При рождении клетка получает первое состояние ("клетка жива").

# Примеры КА

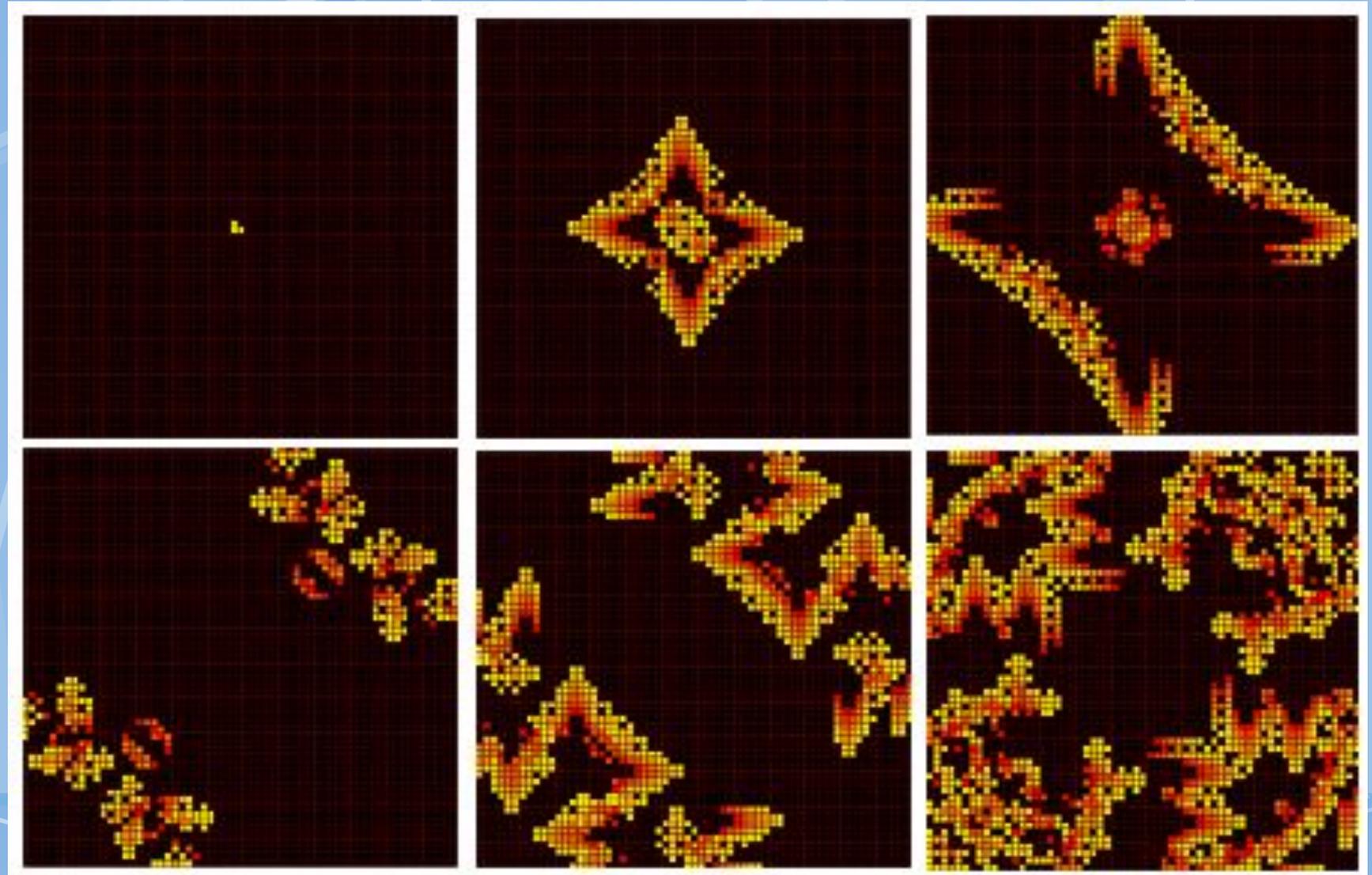
## "Искры"



Я,

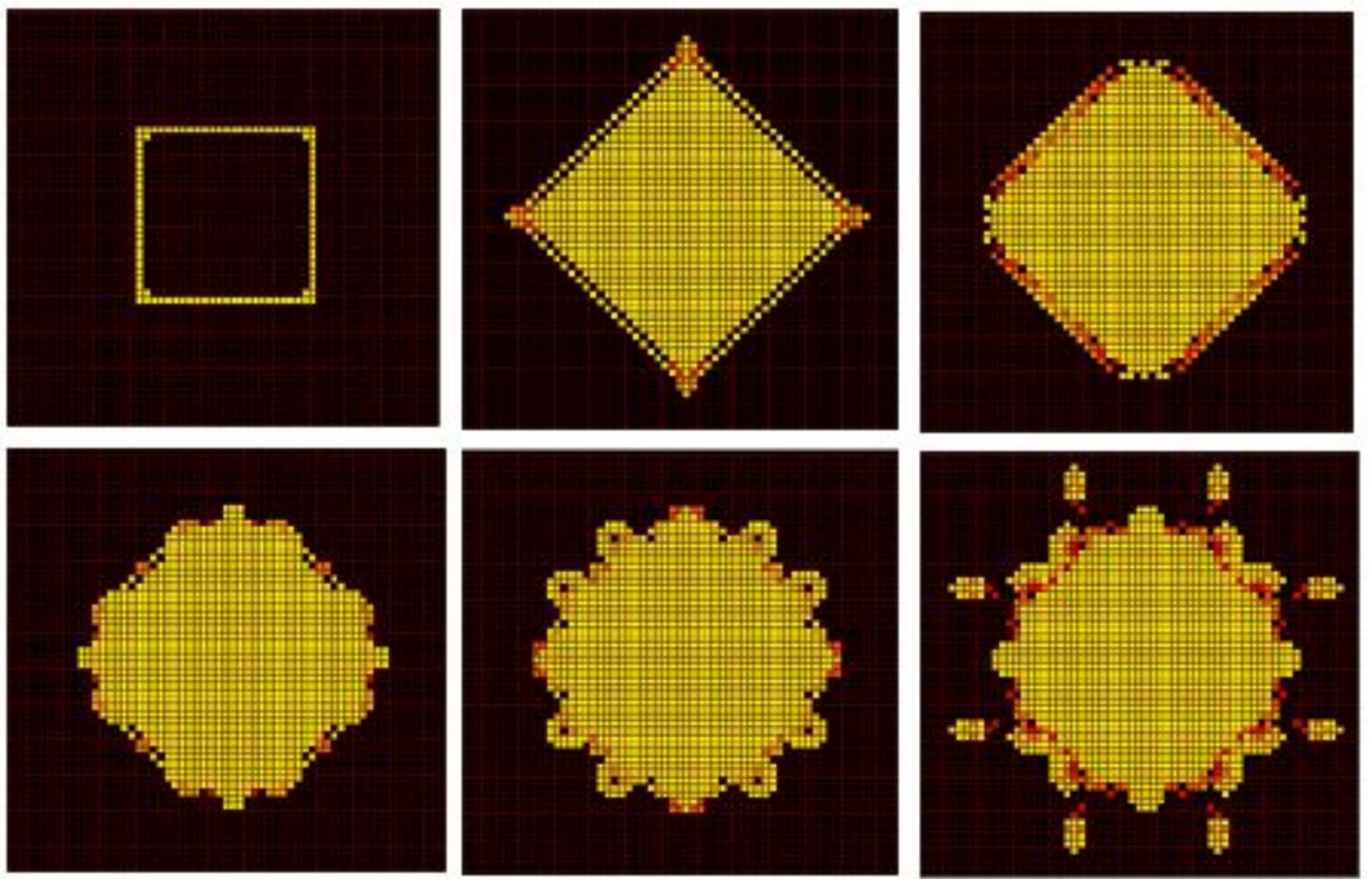
# Примеры КА

## "Букашки"



# Примеры КА

## "Пламя"



# Примеры КА

## Автомат "Клеточная вселенная"

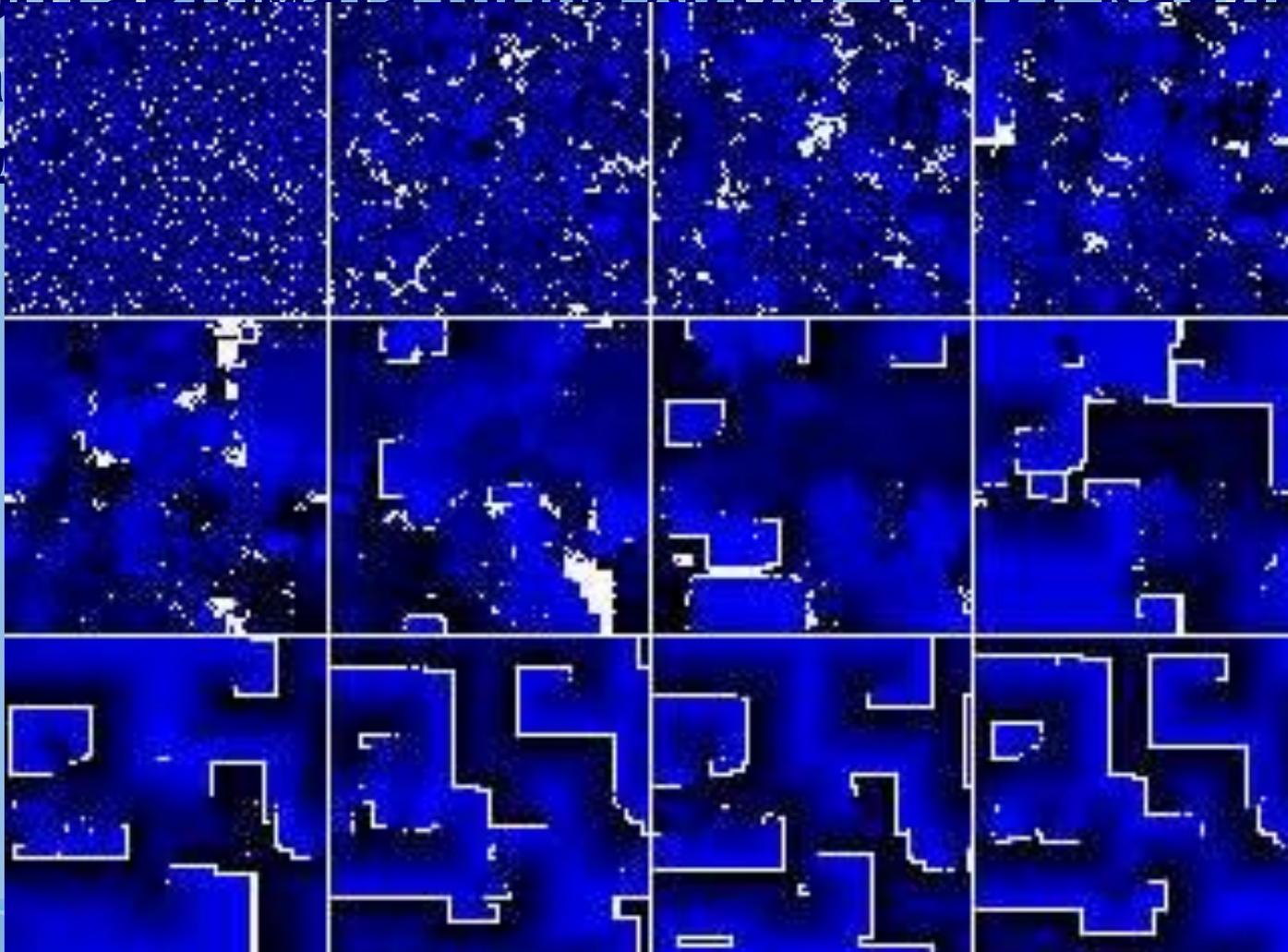
Еще один пример клеточного автомата, открытый Дейвидом Гриффитом из Висконсинского университета в Мэдисоне.

Стартуя из произвольно выбранного исходного состояния, автомат демонстрирует четыре различные фазы, завершающиеся причудливыми кристаллическими образованиями, сильно напоминающими примитивные формы жизни.

Правило поведения автомата заключается в том, чтобы пронумеровать возможные состояния от 0 до  $n - 1$  и считать, что если клетка находится на данном такте в состоянии  $k$ , то на следующем такте она должна "съесть" любые соседние клетки, находящиеся в состоянии  $k - 1$ . Съедение проявляется в том, что съеденная соседняя клетка переходит из состояния  $k - 1$  в состояние  $k$ ; клетка в состоянии 0 может поедать соседние клетки в состоянии  $n - 1$ .

# Примеры КА

На рисунке представлен пример реализации такого автомата (поле  $80 \times 80$ ,  $n=17$ ). Каждый фрагмент представляет собой реализацию автомата на данном этапе.



# Примеры КА

## Автоматы серии "Тьюрмиты"

**Тьюрмит** - это некий синтез клеточного автомата и машины Тьюринга.

От клеточного автомата тьюрмит отличается тем, что в начальный момент времени его поле пусто и какая-то одна клетка считается начальной (тьюрмит занимает начальную позицию, находится в начальном состоянии, начальное направление, например, на восток).

Затем на каждом такте применяется правило вида:

<текущее состояние><старый цвет текущей клетки><новый цвет><направление перемещения><новое состояние>

# Примеры КА

Состояния принято обозначать латинскими буквами; цвета - числами от 0 до 15 (16-ти цветовая палитра), причем начальный цвет черный (это не жесткое ограничение, при желании цветовую гамму можно обогатить и придумать свои обозначения); направление перемещения изменяется относительно текущего курса тьюрмита, обозначается числами -1 (повернуть налево), 1 (повернуть направо), 0 (прямо).

Например,

правило

**A 0 15 0 B**

означает, что если тьюрмит находится в состоянии A и стоит на черной клетке, то он должен покрасить ее в белый цвет, продвинуться на одну клетку в текущем направлении и перейти в состояние B.

Таким образом, если A - начальное состояние тьюрмита, 0 - начальный цвет, то набор правил тьюрмита должен содержать правило **A 0 \_ \_ \_**.

# Примеры КА

## "Кактус"

(на рисунке представлена одна из возможных конфигураций)

Система правил:

**A 0 2 1 A**

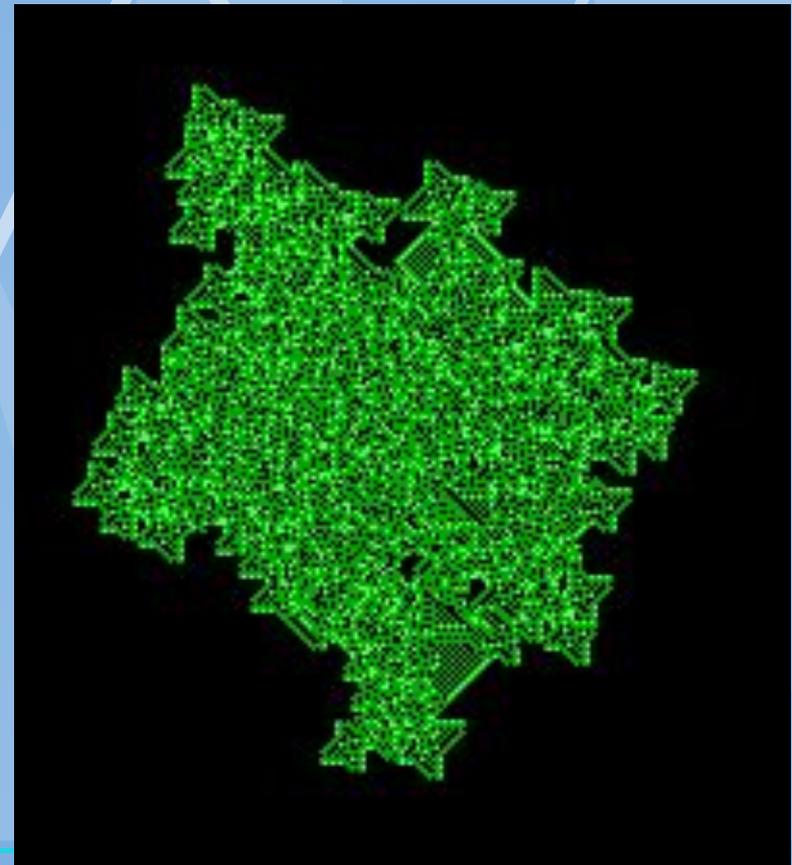
**A 2 10 -1 B**

**A 10 0 -1 B**

**B 0 2 1 A**

**B 2 2 -1 A**

**B 10 2 -1 A**



# Примеры КА

## "Спираль Тэрка"

(на рисунке представлена одна из возможных конфигураций)

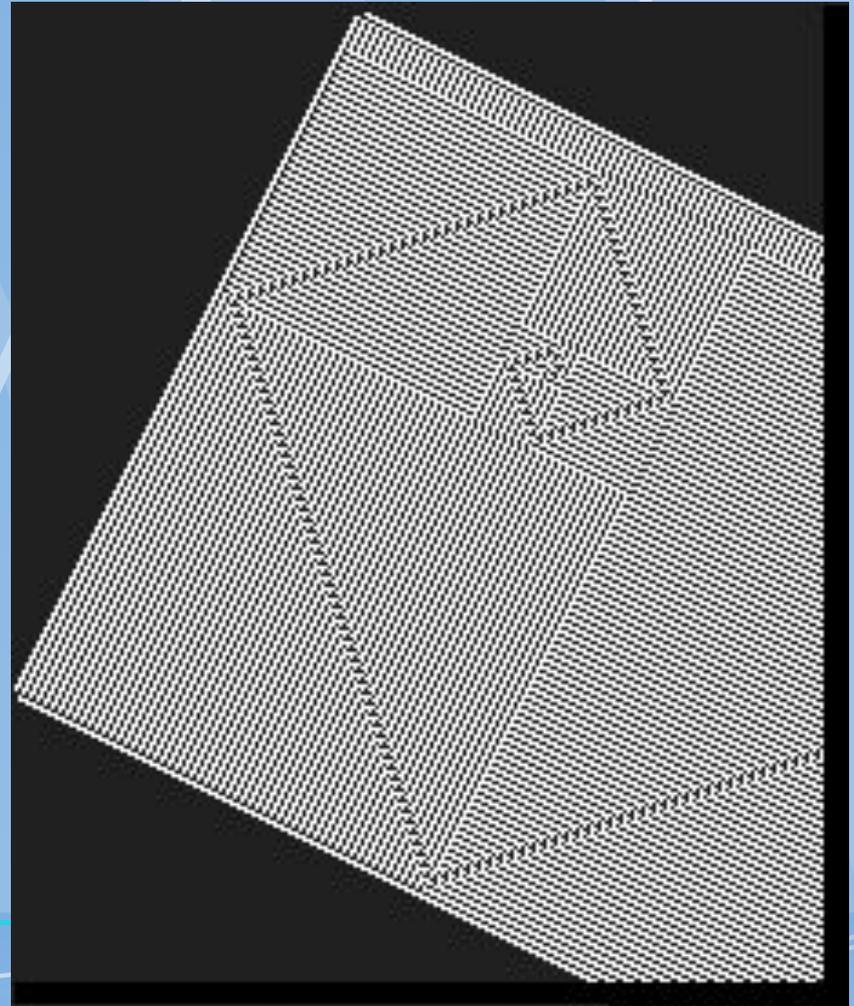
Система правил:

A 0 2 -1 A

A 2 0 0 B

B 0 2 1 A

B 2 2 1 A

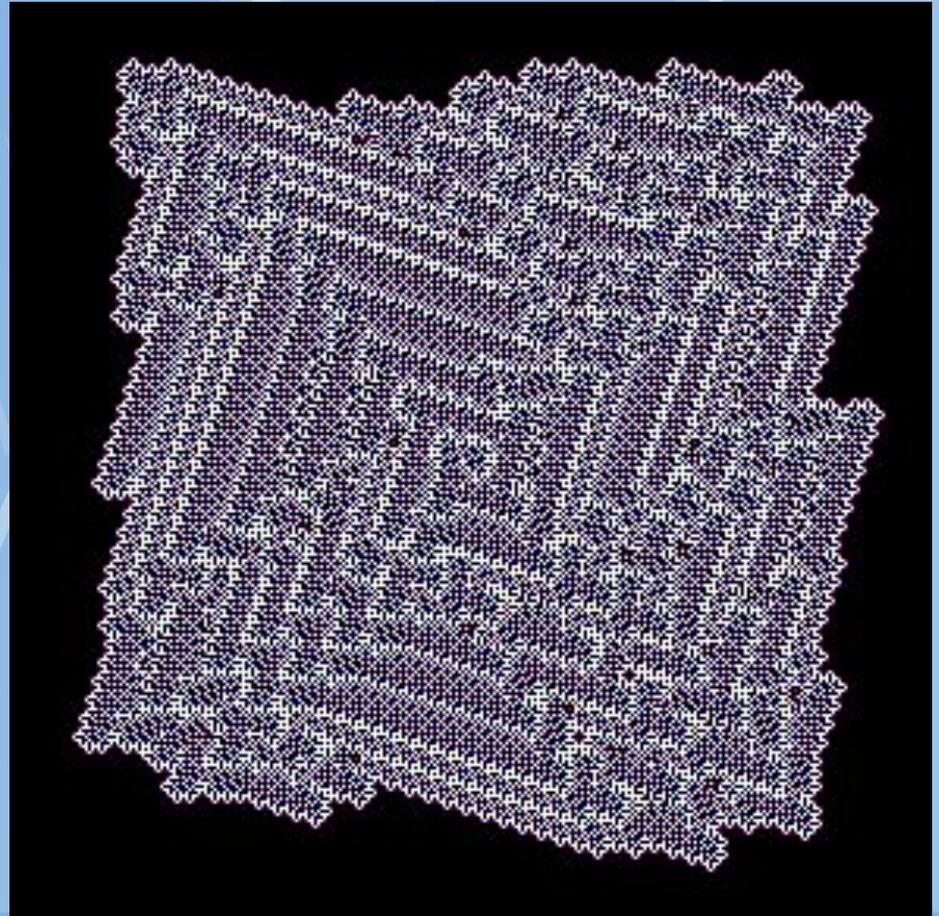


# Примеры КА

## "Нить Ариадны:"

Система правил:

A 0 15 0 D  
A 15 0 0 B  
E 0 15 0 C  
E 15 15 0 B  
B 0 0 -1 E  
B 5 5 1 A  
B 15 15 1 E  
B 1 1 1 E  
C 0 15 -1 E  
C 15 1 -1 A  
C 1 5 -1 A  
C 5 0 -1 A  
D 0 5 -1 A  
D 5 15 -1 A  
D 15 1 -1 A  
D 1 0 -1 A

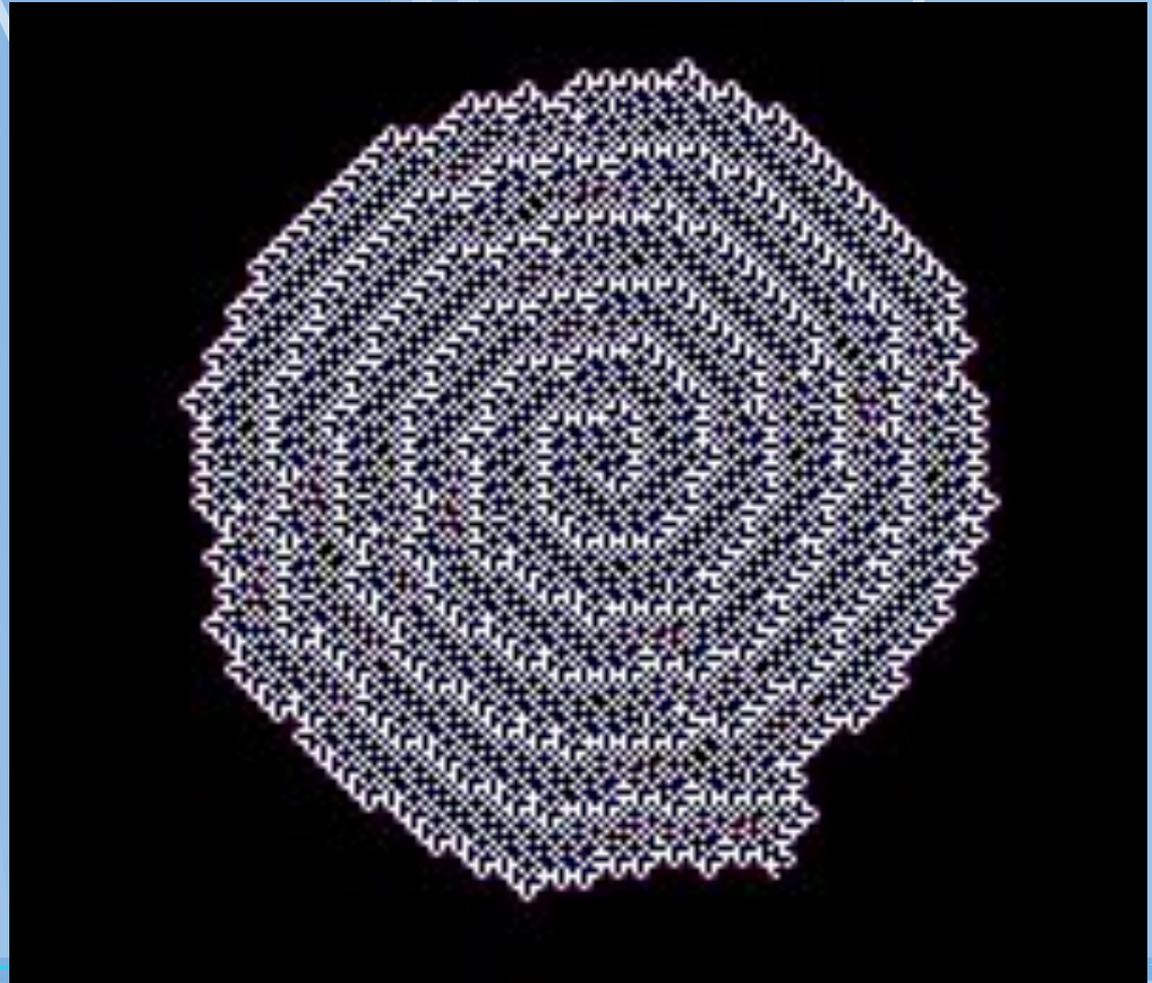


# Примеры КА

"Спираль:"

Система правил:

A 0 15 0 D  
A 15 0 0 B  
E 0 15 0 D  
E 15 15 0 B  
B 0 0 1 E  
B 1 1 1 E  
B 5 5 1 A  
B 15 15 1 E  
C 0 15 -1 A  
C 15 1 -1 A  
C 1 5 -1 A  
C 5 0 -1 A  
D 0 5 -1 A  
D 5 15 -1 A  
D 15 1 -1 A  
D 1 0 -1 A



# Игра «Жизнь»

**Игра «Жизнь»** - клеточный автомат, придуманный английским математиком Джоном Конвеем в 1970 году.

# Игра «Жизнь»

Место действия этой игры — «вселенная» — это размеченная на клетки поверхность, безграничная, ограниченная, или замкнутая. В компьютерных реализациях игры чаще всего используют поверхность тора. Каждая клетка на этой поверхности может находиться в двух состояниях: быть живой или быть мёртвой. Клетка имеет восемь соседей.

Распределение живых клеток в начале игры называется первым поколением.

# Игра «Жизнь»

Каждое следующее поколение рассчитывается на основе предыдущего по таким правилам:

- ❖ пустая (мёртвая) клетка ровно с тремя живыми клетками-соседями оживает;
- ❖ если у живой клетки есть две или три живые соседки, то эта клетка продолжает жить;
- ❖ в противном случае (если соседок меньше двух или больше трёх) клетка умирает (от «одиночества» или от «перенаселённости»).

# Игра «Жизнь»

Игрок не принимает прямого участия в игре, а лишь расставляет «живые» клетки, которые взаимодействуют согласно правилам уже без его участия.

Эти простые правила приводят к огромному разнообразию форм, которые могут возникнуть в игре.

# Немного истории. Происхождение

Джон Конвей заинтересовался проблемой, предложенной в 1940-х годах известным математиком Джоном фон Нейманом, который пытался создать гипотетическую машину, которая может воспроизводить сама себя. Джону фон Нейману удалось создать математическую модель такой машины с очень сложными правилами.

Конвей попытался упростить идеи предложенные Нейманом, и в конце концов ему удалось создать правила, которые стали правилами игры «Жизнь». Впервые, описание этой игры было опубликовано в октябрьском выпуске (1970) журнала *Scientific American*, в рубрике «Математические игры» Мартина Гарднера (*Martin Gardner*).

# Компьютерная реализация

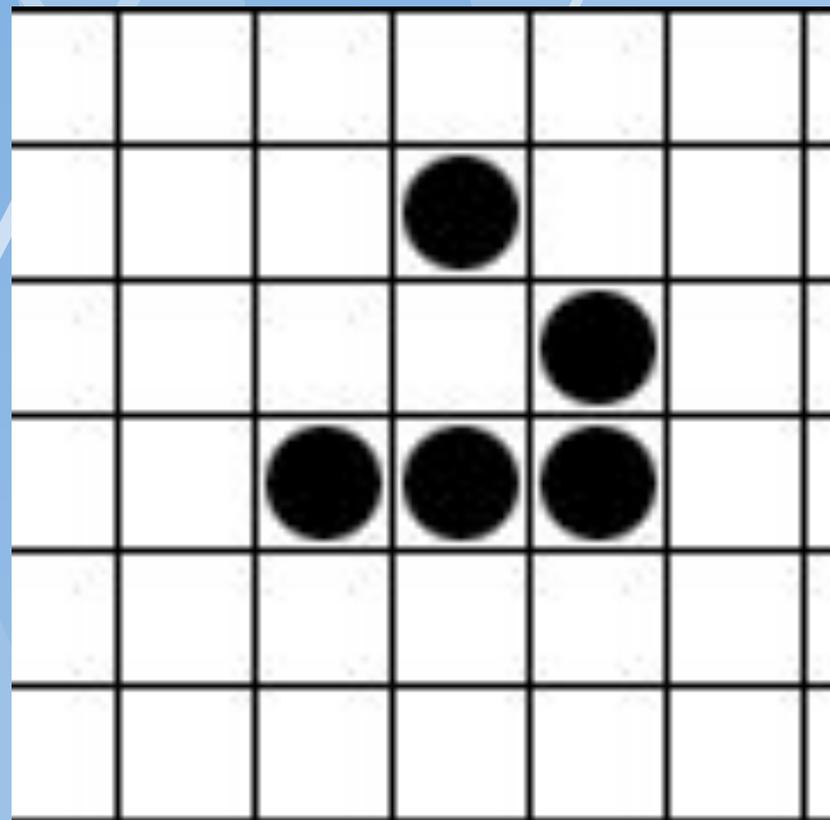
Простейший алгоритм последовательно просматривает все ячейки решетки и для каждой ячейки подсчитывает соседей, определяя судьбу каждой клетки (не изменится, умрет, родится).

Более сложный, но и более быстрый алгоритм составляет списки клеток для просмотра в последующем поколении, клетки, которые не могут измениться, в списки не вносятся.

# Фигуры

## Глайдер (glider)

Вскоре после опубликования правил, было обнаружено несколько интересных шаблонов (вариантов расстановки живых клеток в первом поколении), в частности: *r*-пентамино и глайдер (*glider*).



# Фигуры

Некоторые такие фигуры остаются неизменными во всех последующих поколениях, состояние других периодически повторяется, в некоторых случаях со смещением всей фигуры.

Существует фигура (*Diehard*) всего из семи живых клеток, потомки которой существуют в течение 130 поколений, а затем исчезают.

# Фигуры

Конвей первоначально предположил, что никакая начальная комбинация не может привести к неограниченному размножению и предложил премию в 50 долларов тому, кто докажет или опровергнет эту гипотезу.

Приз был получен группой из Массачусеттского технологического института, придумавшей неподвижную повторяющуюся фигуру, которая периодически создавала движущиеся «глайдеры».

Таким образом, количество живых клеток могло расти неограниченно. Затем были найдены движущиеся фигуры, оставляющие за собой «мусор» из других фигур.

# Фигуры

К настоящему времени более-менее сложилась следующая классификация фигур:

**Глайдерное ружьё Госпера** ([en:Bill Gosper](#)) — первая бесконечно растущая фигура



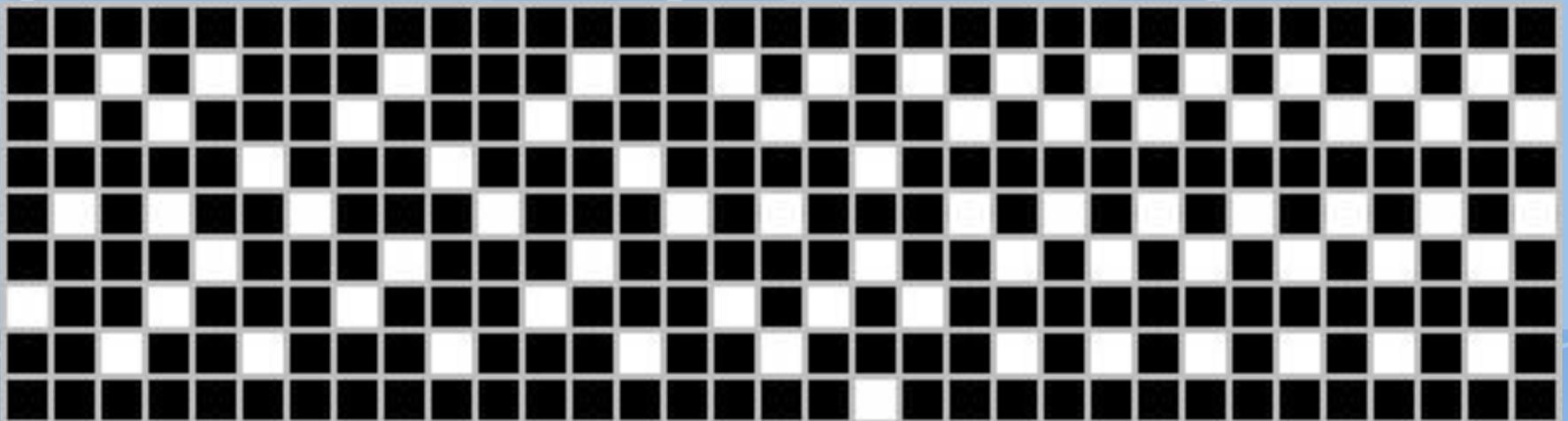
# Фигуры

- *Устойчивые фигуры:* фигуры, которые остаются неизменными
- *Периодические фигуры:* фигуры, у которых состояние повторяется через некоторое число поколений
- *Двигающиеся фигуры:* фигуры, у которых состояние повторяется, но с некоторым смещением
- *Ружья:* фигуры, у которых состояние повторяется, но дополнительно появляется двигающаяся фигура
- *Паровозы:* двигающиеся фигуры, которые оставляют за собой следы в виде устойчивых или периодических фигур
- *Пожиратели:* устойчивые фигуры, которые могут пережить столкновения с некоторыми двигающимися фигурами

# Райский сад

*Райским садом* называется такое расположение клеток, у которого не может быть предыдущего поколения.

Практически для любой игры, состояние клеток в которой определяется несколькими соседями на предыдущем шаге, можно доказать существование садов Эдема, но построить конкретную фигуру гораздо сложнее.



# Еще раз ...

Функцию переходов (для клетки принято называть множеством правил КА. Наиболее известным примером КА считается автомат "Жизнь", придуманный в 1970 году Джоном Конвеем. Правила в игре "Жизнь", которую мы рассмотрим сегодня следующие:

1. Клетка может находиться в двух состояниях: пассивном и активном.
2. В качестве окрестности рассматриваются 8 соседних клеток.
3. Если в окрестности пассивной клетки ровно 2 активных, то данная клетка также становится активной ("рождается").
4. Если в окрестности активной клетки 3 или более активных клеток, то она становится пассивной ("умирает").

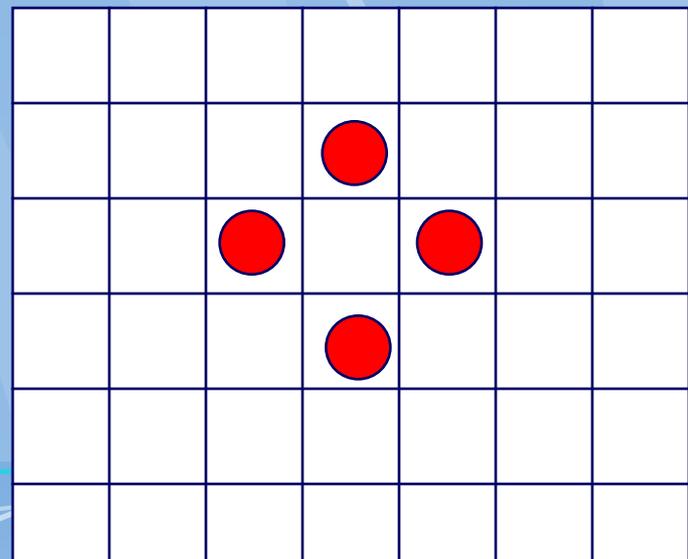
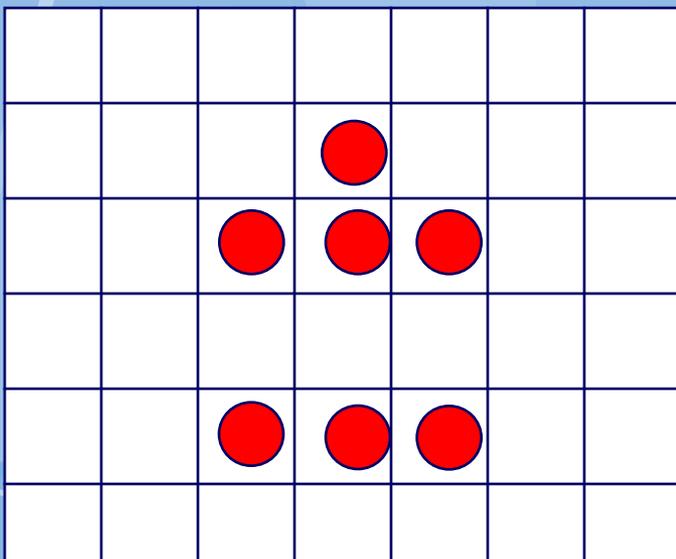
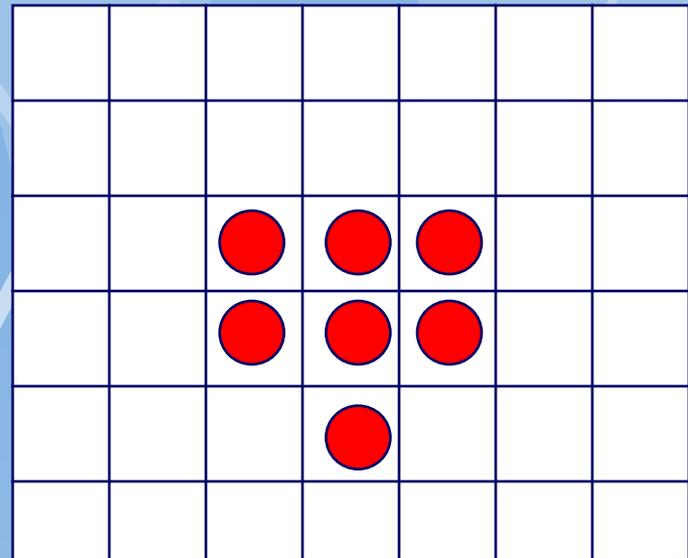
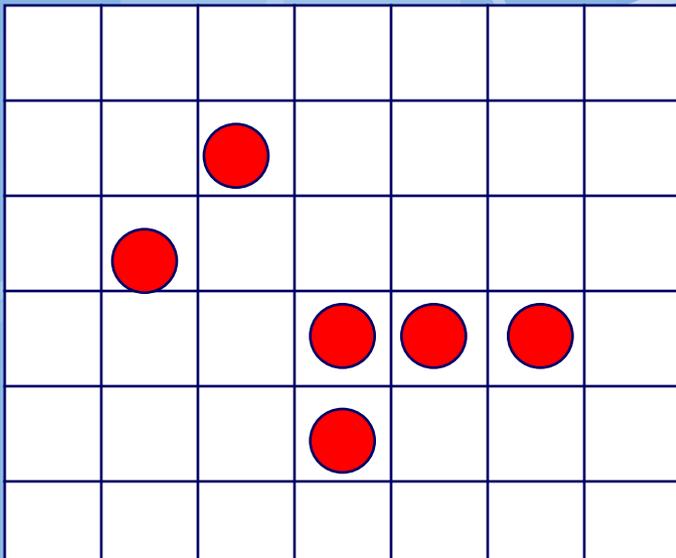
В начальный момент времени дается некоторое распределение активных и пассивных клеток. Используя полученное распределение, определяется состояние клеток на следующем шаге от времени, и так далее. В зависимости от вида начального распределения приходим к различным эволюциям состояний клеток.

# Вспомним ... и запишем...

Правила в игре "Жизнь", которую Вам предстоит реализовать:

1. **Выживание:** Если заняты 2 или 3 соседние клетки.
2. **Гибель:** Если занято более трех или менее двух соседних клеток. (В первом случае – перенаселена, во втором случае слишком изолирована).
3. **Рождение:** Если занято три и только три соседних с ней клетки.

# Клеточные автоматы



**Лекция окончена**

Нажмите клавишу <ESC> для выхода