

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

- Теория поля - крупный раздел, физики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные поля.

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

- Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U=U(M)$, говорят, что в области определено, задано скалярное поле (или функция точки). Иначе говоря, скалярное поле - это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения.

-
- Примерами скалярных полей могут быть поля температуры, атмосферного давления, плотности, электрического потенциала и т.д.
 - Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, например x и y , соответствующее скалярное поле $U(x; y)$ называют плоским.

ВОПРОС ИССЛЕДОВАНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

- Основной вопрос исследования скалярного поля есть вопрос об изменении функции U при переходе из одной точки пространства в другую. Это геометрическое место точек называют поверхностью уровня скалярного поля U . Ее уравнение в выбранной системе координат имеет вид: $U(x; y; z) = C$, где $C = \text{const}$.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

- Векторное поле называется соленоидальным, если во всех точках его дивергенция равна нулю, т.е. Примерами соленоидальных полей являются: поле скоростей вращающегося твердого тела; магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль электрического тока, и т.д. :

$$\operatorname{div} \vec{\Phi}(M) = 0, \quad \forall M \in R_3.$$

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ЦИРКУЛЯЦИЯ

- Векторной называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением векторного поля в данной точке.

-
- Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

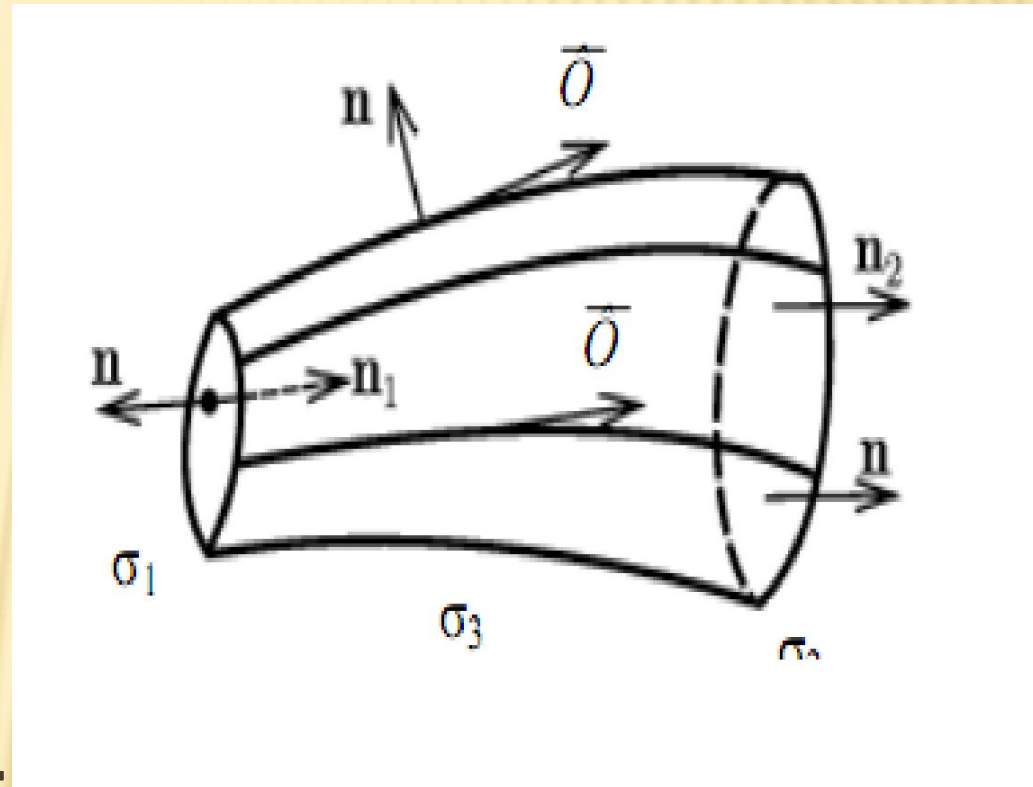
РОТОР (ВИХРЬ) РОТОРНОГО ПОЛЯ

- Ротором(вихрем) $\text{rot}\Phi$ вектора $\Phi=(P,Q,R)$ называется вектор

$$\text{rot}\vec{\Phi} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

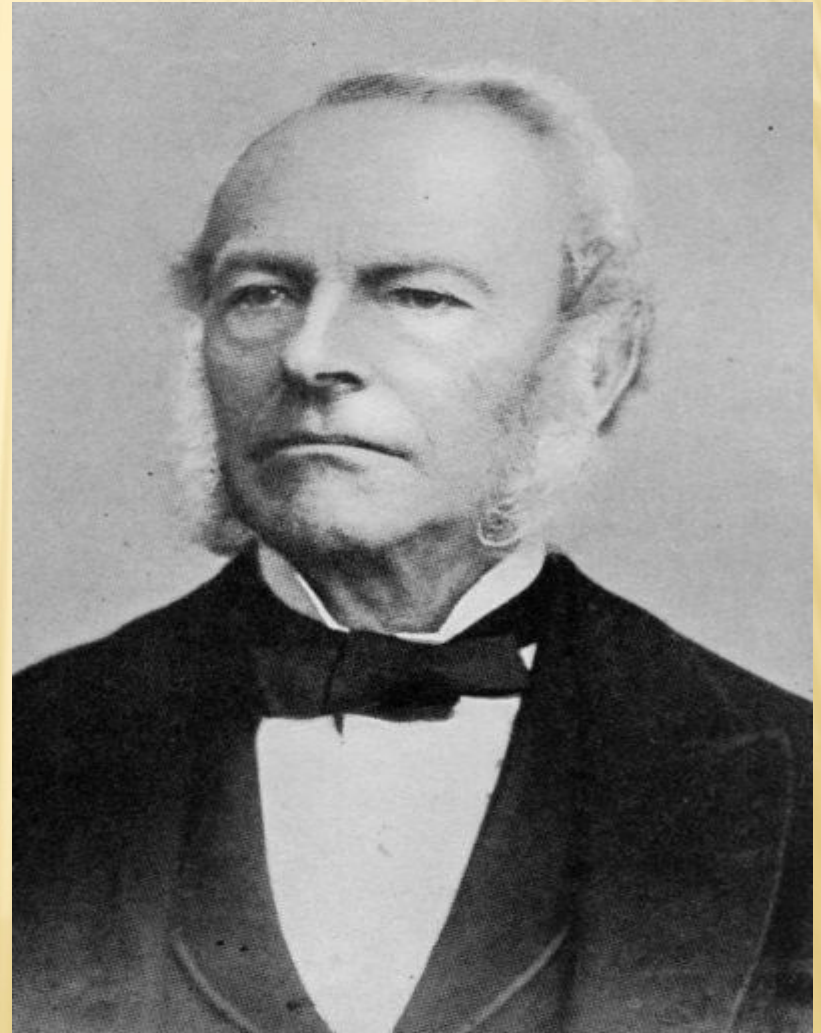
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ТРУБКИ

- Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую L , образуют поверхность, называемую векторной трубкой.



ФОРМУЛА СТОКСА

- Джордж Габриель Стокс – английский механик и математик (1819 – 1903гг.)



ТЕОРЕМА СТОКСА ДОКАЗАНА В 1854Г.

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности σ , то справедлива формула Стокса:

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx +$$

,

где произвольная поверхность σ ограничена контуром L и ориентирована по правилу правой руки.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1	$div(\bar{A} + \bar{B}) = (\nabla, \bar{A} + \bar{B}) = (\nabla \bar{A}) + (\nabla \bar{B}) = div \bar{A} + div \bar{B}$
2	$rot(\bar{A} + \bar{B}) = rot \bar{A} + rot \bar{B}$
3	$grad(\lambda u) = \nabla(\lambda u) = \lambda \nabla u = \lambda gradu$
4	$grad(uv) = \nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(uv_c) = ugradv + vgradu$
5	$div(u\bar{\Phi}) = (\nabla, u\bar{\Phi}) = \nabla(u_c \bar{\Phi}) + \nabla(u\bar{\Phi}_c) = udiv\bar{\Phi} + \bar{\Phi}gradu$
6	$rot(u\bar{\Phi}) = [\nabla, u\bar{\Phi}] = [\nabla, u_c \bar{\Phi}] + [\nabla, u\bar{\Phi}_c] = urot\bar{\Phi} + [gradu, \bar{\Phi}]$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Скалярное поле $u(x, y, z) \longrightarrow \operatorname{gradu} - \text{вектор}$

$\operatorname{gradu} \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{divgradu} - \text{скаляр} \\ \operatorname{rotgradu} - \text{вектор} \end{cases}$

Векторное поле $\vec{\Phi} = (P, Q, R) \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}\vec{\Phi} - \text{скаляр} \longrightarrow \operatorname{graddiv}\vec{\Phi} - \text{вектор} \\ \operatorname{rot}\vec{\Phi} - \text{вектор} \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{divrot}\vec{\Phi} - \text{скаляр} \\ \operatorname{rotrot}\vec{\Phi} - \text{вектор} \end{cases} \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин.

Математическим ядром теории поля являются рассмотренные нами понятия градиента, дивергенции, ротора, циркуляции и др. Эти понятия важны и в усвоении основных идей математического анализа функций многих переменных.