Омский государственный технический университет

Кафедра физики

Калистратова Л.Ф.

Электронные лекции по разделам классической и релятивистской механики

6 лекций

(12 аудиторных часов)

Тема 5.
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

План лекции

5.1. Законы сохранения в классической механике.

5.2. Закон сохранения механической энергии.

5.3. Закон сохранения импульса.

5.4. Закон сохранения момента импульса.

5.1. Законы сохранения в классической механике

В **законах сохранения энергии, импульса, момента импульса** находят своё отражение фундаментальные свойства пространства и времени, а также факт бесконечного их существования.

Закон сохранения энергии является следствием **однородности времени.**

Закон сохранения импульса отражает **однородность пространства.**

Закон сохранения момента импульса – отражает **изотропность пространства.**

Однородность времени отражает тот факт, что **результат опыта не зависит от времени его проведения.**

Однородность пространства отражает тот факт, что **результат опыта не зависит от места его проведения.**

Изотропность пространства отражает тот факт, что **результат опыта не зависит от направления осей координат.**

Важно понять условия, при которых выполняется тот или иной закон сохранения.

В механической системе тела могут взаимодействовать как между собой (внутренние силы), так и с внешними телами (внешние силы).

Механическая система называется замкнутой или изолированной, **если на нее не действуют внешние силы** (система не обменивается с внешними телами энергией).

Понятие замкнутой системы является абстракцией.

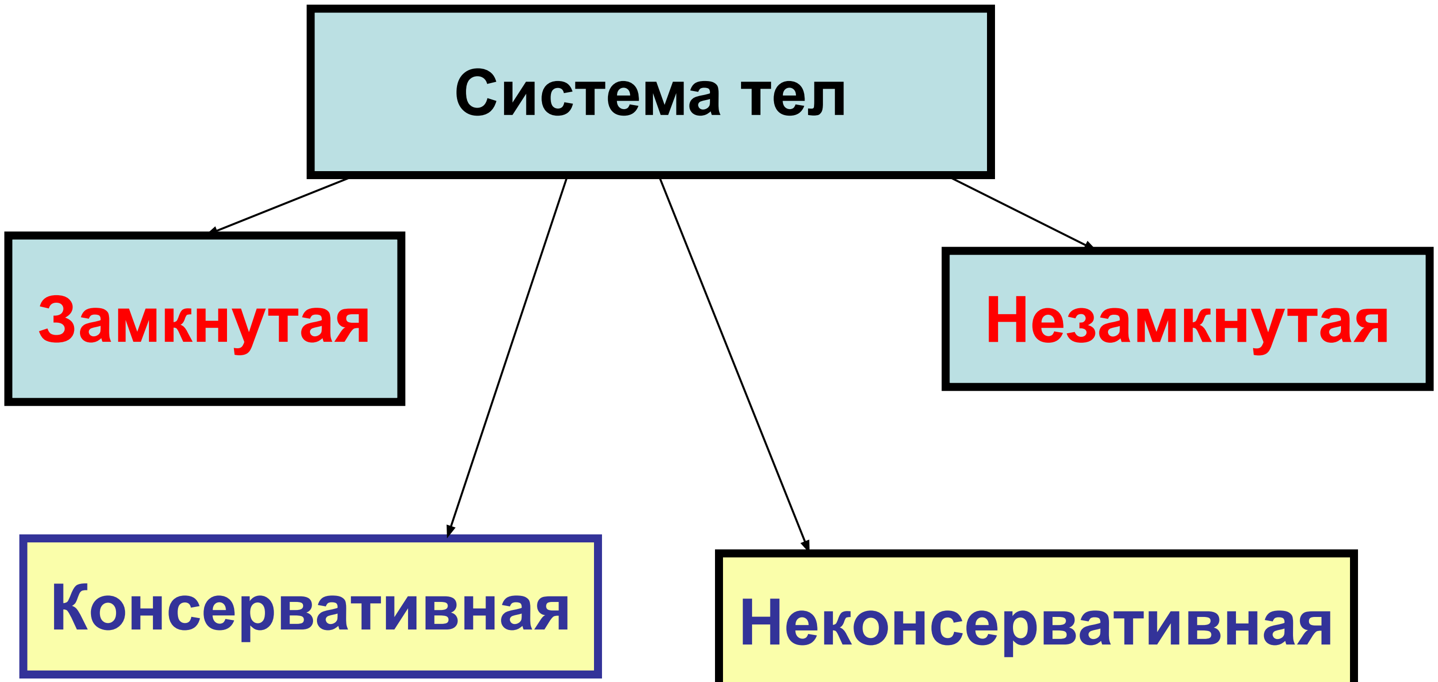
Реальным приближением к замкнутой системе служит система:

- взаимодействием которой с внешними телами можно пренебречь;
- система, в которой внешние силы практически компенсируются.

Система называется незамкнутой, если на неё действуют внешние силы и их результирующая сила отлична от нуля.

В любых системах сумма всех внутренних сил равна нулю, поскольку силы взаимодействия каждой пары тел равны по модулю и противоположны по направлению.

Механическая система называется консервативной, если на тела системы действуют только консервативные силы.



5.2. Закон сохранения механической энергии

Пусть на механическую систему тел действуют как внутренние, так и внешние силы.

Силы взаимодействия могут быть как консервативными, так и неконсервативными.

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех действующих на систему сил.

$$\Delta E_{K} = A_{\text{любыхсил}}$$

$$\Delta E_{К} = A_{\text{конс.внут.}} + A_{\text{неконс.внут.}} +$$

$$+ A_{\text{конс.внеш.}} + A_{\text{неконс.внеш.}}$$

$$A_{\text{конс.внут.}}$$

- работа **внутренних консервативных** сил,

$$A_{\text{неконс.внут.}}$$

- работа **внутренних неконсервативных** сил.

$$A_{\text{конс.внеш.}}$$

— работа **внешних консервативных** сил;

$$A_{\text{неконс.внеш.}}$$

- работа **внешних неконсервативных** сил.

Работа внутренних консервативных сил равна **убыли потенциальной энергии взаимодействия тел системы друг с другом:**

$$A_{\text{конс.внут.}} = -\Delta E_{\Pi 1}$$

Работа внешних консервативных сил равна **убыли потенциальной энергии системы во внешних потенциальных полях**:

$$A_{\text{конс..внеш.}} = -\Delta E_{\Pi 2}$$

Выполняя математические операции переноса слагаемых в левую часть основного выражения, получим

$$\Delta(E_{К} + E_{П1} + E_{П2}) =$$

$$= A_{конс.внеш.} + A_{неконс.внеш.}$$

Заметим, что **потенциальная энергия механической системы Еп складывается** из

- потенциальной энергии взаимодействия точек системы друг с другом $E_{П1}$;
- потенциальной энергии во внешних потенциальных полях $E_{П2}$.

$$E_п = E_{п1} + E_{п2}$$

Полная механическая энергия системы:

$$E = E_К + E_п$$

Изменение полной механической энергии:

$$\Delta E = \Delta(E_К + E_П)$$

В результате вывода получили, что

$$\Delta E = A_{НК}$$

Закон сохранения полной механической энергии для неконсервативной системы тел формулируется: **изменение полной механической энергии неконсервативной системы тел равно суммарной работе любых неконсервативных сил, действующих на тела системы.**

Если в системе **неконсервативные силы отсутствуют:**

$$A_{НК} = 0$$

тогда **система тел** будет являться **консервативной.**

При этом $\Delta E = 0 \quad \longrightarrow \quad E_2 = E_1$

$$E = \text{const}$$

Закон сохранения энергии формулируется:

полная механическая энергия консервативной системы тел сохраняется (не меняется, остаётся величиной постоянной).

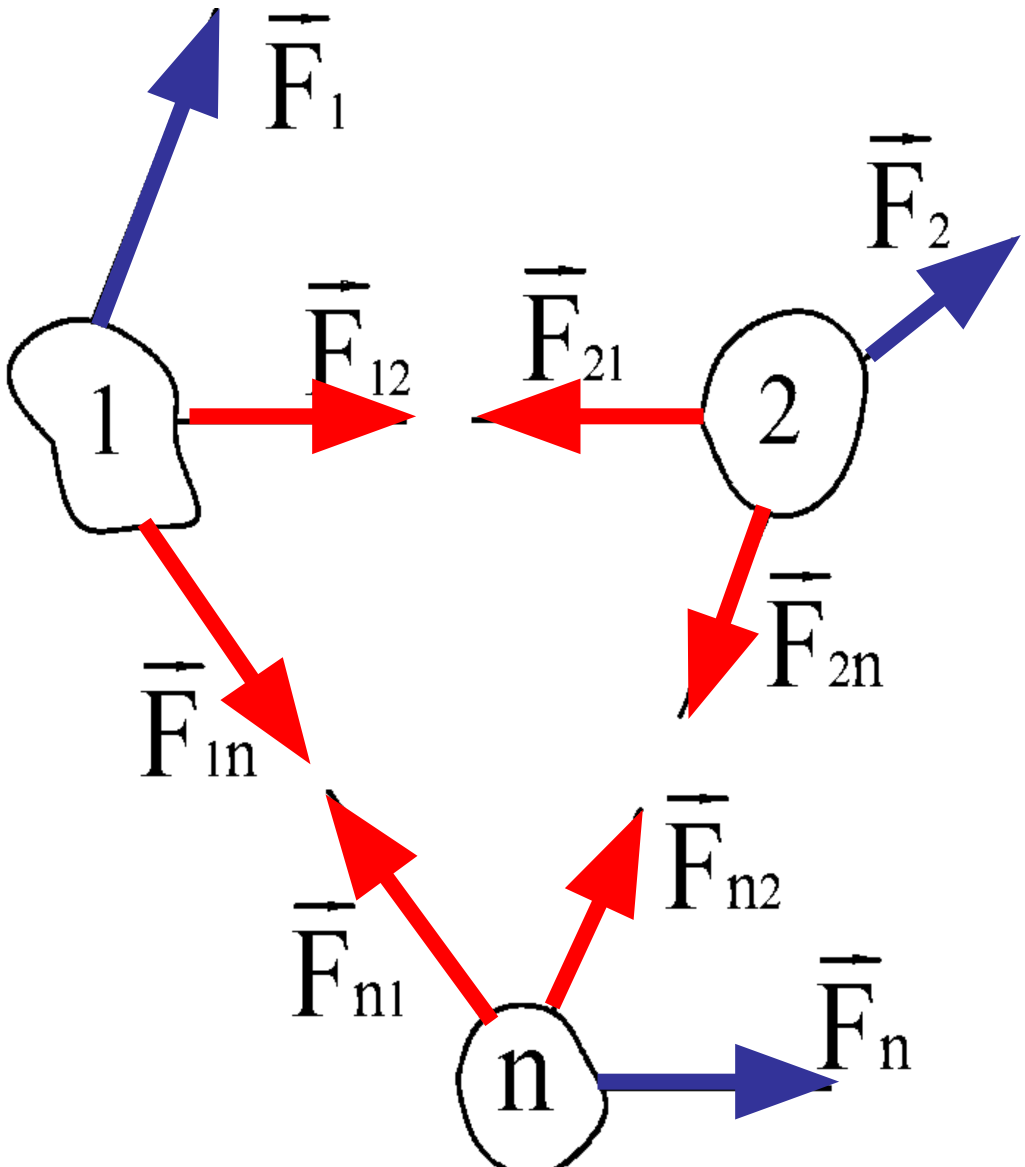
5.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, которые могут взаимодействовать как между собой (это **внутренние силы**), так и с внешними телами (это **внешние силы**).

Те и другие силы взаимодействия могут быть как **консервативными**, так и **неконсервативными.**

Внутренние силы обозначим символами $\vec{F}_{ij}$.

Внешние силы, действующие на каждое из тел, обозначим как $\vec{F}_k$.



$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_{12}$
$\vec{F}_{21}$
1
2
$\vec{F}_{2n}$
$\vec{F}_{1n}$
$\vec{F}_{n2}$
$\vec{F}_{n1}$
n
$\vec{F}_n$

Запишем для каждого из тел **второй закон Ньютона** в его наиболее общей форме.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2$$

- -

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_k$$

Просуммируем левые и правые части равенств.

По **третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил равна нулю**, поскольку они попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

При сложении равенств получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_k$$

Результирующим импульсом системы тел **называется векторная сумма импульсов отдельных тел:**

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \vec{p}$$

Векторная сумма действующих на систему сил есть **равнодействующая всех внешних сил.**

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_k = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

Тогда можно переписать

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{внеш.} \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{p}$$

Закон сохранения импульса для незамкнутой системы тел формулируется: **в незамкнутой системе тел скорость изменения импульса системы равна равнодействующей внешних сил**

Если **система замкнута**, то

$$\vec{F}_{внеш.} = 0$$

Тогда $$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$$

Закон сохранения импульса формулируется:

результирующий импульс замкнутой системы тел сохраняется.

Естественно, что при этом остается постоянной и сумма проекций импульсов тел системы на любую координатную ось.

На практике достаточно часто приходится иметь дело со взаимодействием тел в условиях, когда действием внешних сил пренебречь нельзя (система не является замкнутой).

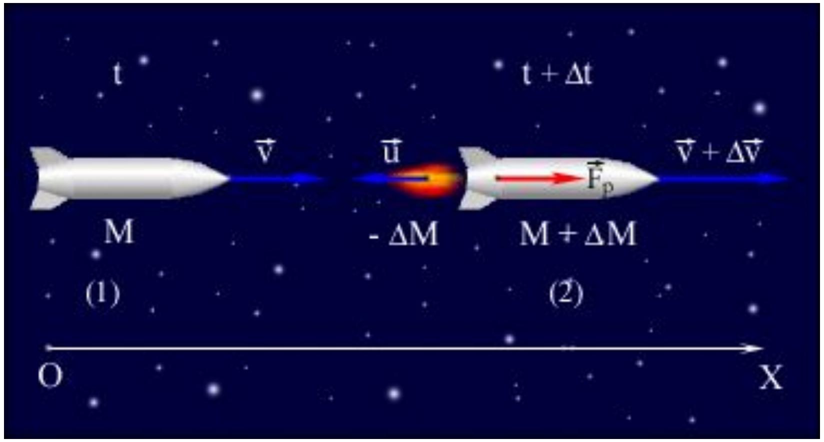
В таких случаях можно найти такое направление (координатную ось X), на которое внешние силы имеют нулевые проекции.

Тогда будет оставаться постоянной не векторная сумма импульсов всех тел системы, а **сумма проекций импульсов на данную координатную ось:**

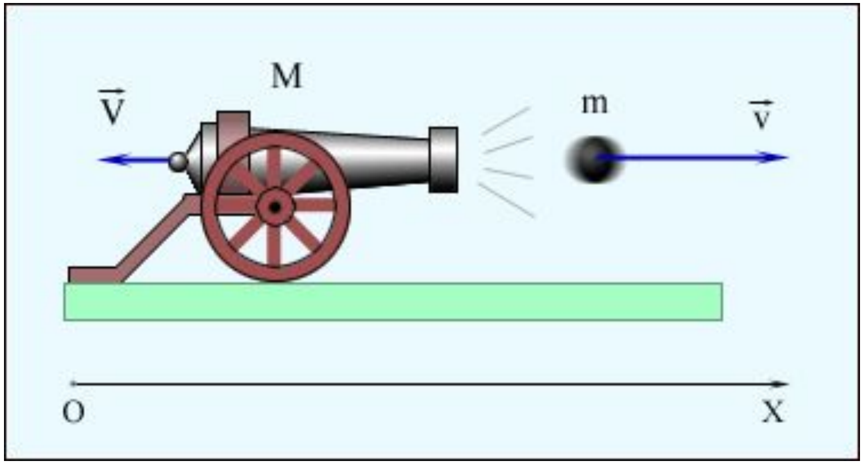
$$P_X = \text{const.}$$

С законом сохранения импульса связаны такие понятия как:

- реактивное движение:



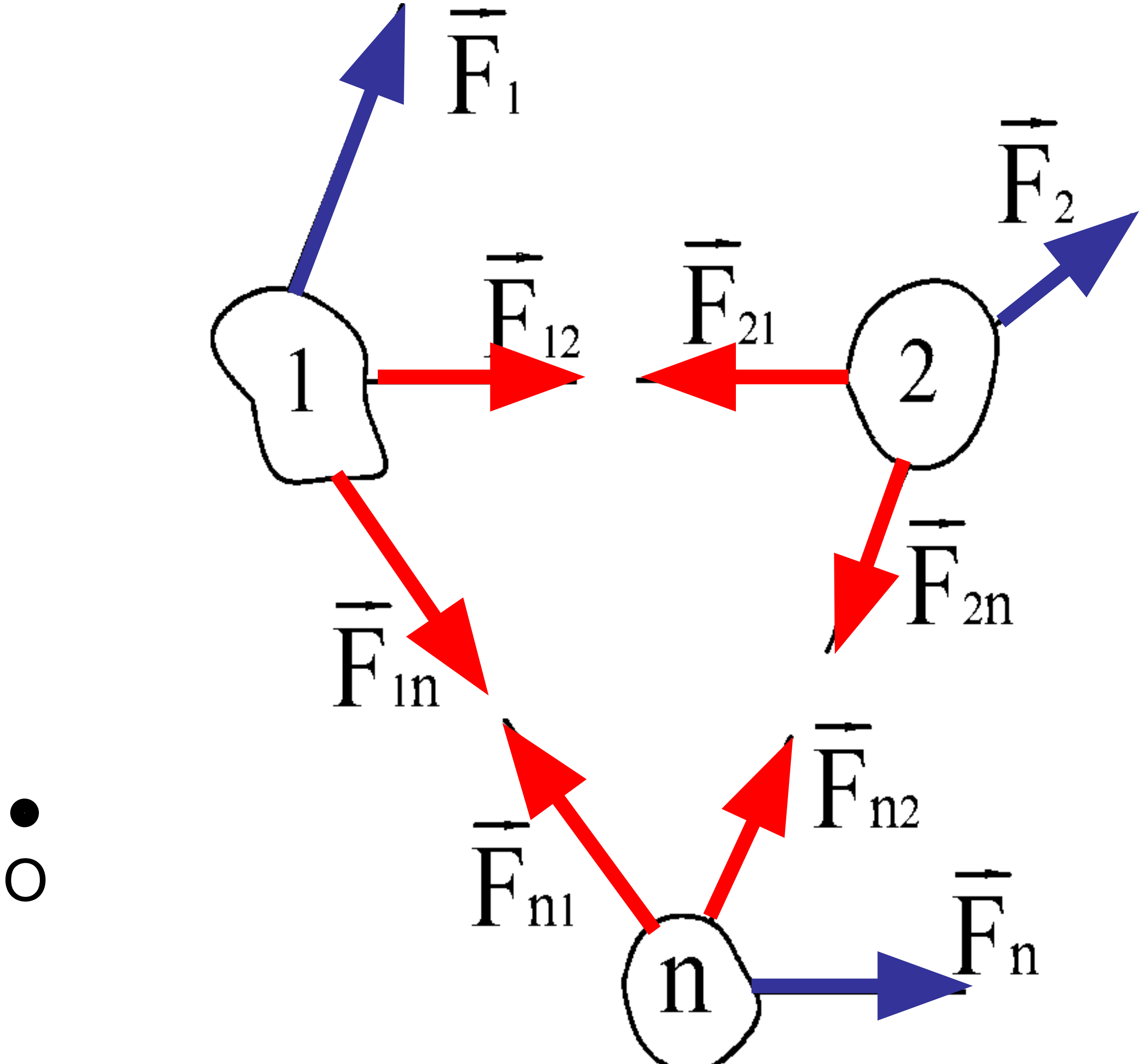
- отдача:



5.3. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему из **n** тел (или материальных точек), взаимодействующих как между собой, так и с внешними телами.

Выберем точку О, относительно которой будем отсчитывать моменты импульсов тел (частиц) и моменты сил, приложенных к ним.



$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_{12}$
$\vec{F}_{21}$
1
2
$\vec{F}_{2n}$
$\vec{F}_{1n}$
$\vec{F}_{n2}$
$\vec{F}_{n1}$
$\vec{F}_n$
n
O

Запишем основной закон динамики вращательного движения для каждого тела в отдельности.

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \dots + \vec{M}_{1n} + \vec{M}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \dots + \vec{M}_{2n} + \vec{M}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\vec{L}_n}{dt} = \vec{M}_{n1} + \vec{M}_{n2} + \dots + \vec{M}_{n-1,n} + \vec{M}_k$$

$\vec{M}_{ij}$ – **моменты внутренних сил**, действующих между i-ым и j-ым телами ;

$\vec{M}_k$ – **моменты внешних сил**, действующих на i- ое тело.

Сложим левые и правые части равенств:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n\right) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_k$$

Учтем, что **сумма моментов внутренних сил равна нулю.**

Моментом импульса системы тел называется векторная сумма моментов импульсов всех тел системы.

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \vec{L}$$

Векторная сумма моментов внешних сил представляет собой **результирующий момент всех внешних сил,** действующих на систему:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_{внеш}$$

Таким образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}.$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш.}}$$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_{p}$$

Закон сохранения импульса для незамкнутой системы формулируется: **скорость изменения результирующего момента импульса незамкнутой системы тел равна равнодействующему моменту внешних сил.**

Если **внешние силы отсутствуют** или их равнодействующая сила равна нулю, то **система будет замкнутой**.

Тогда суммарный момент внешних сил относительно произвольной точки О может быть равен нулю:

$$\vec{M}_{\text{внеш.}} = 0$$

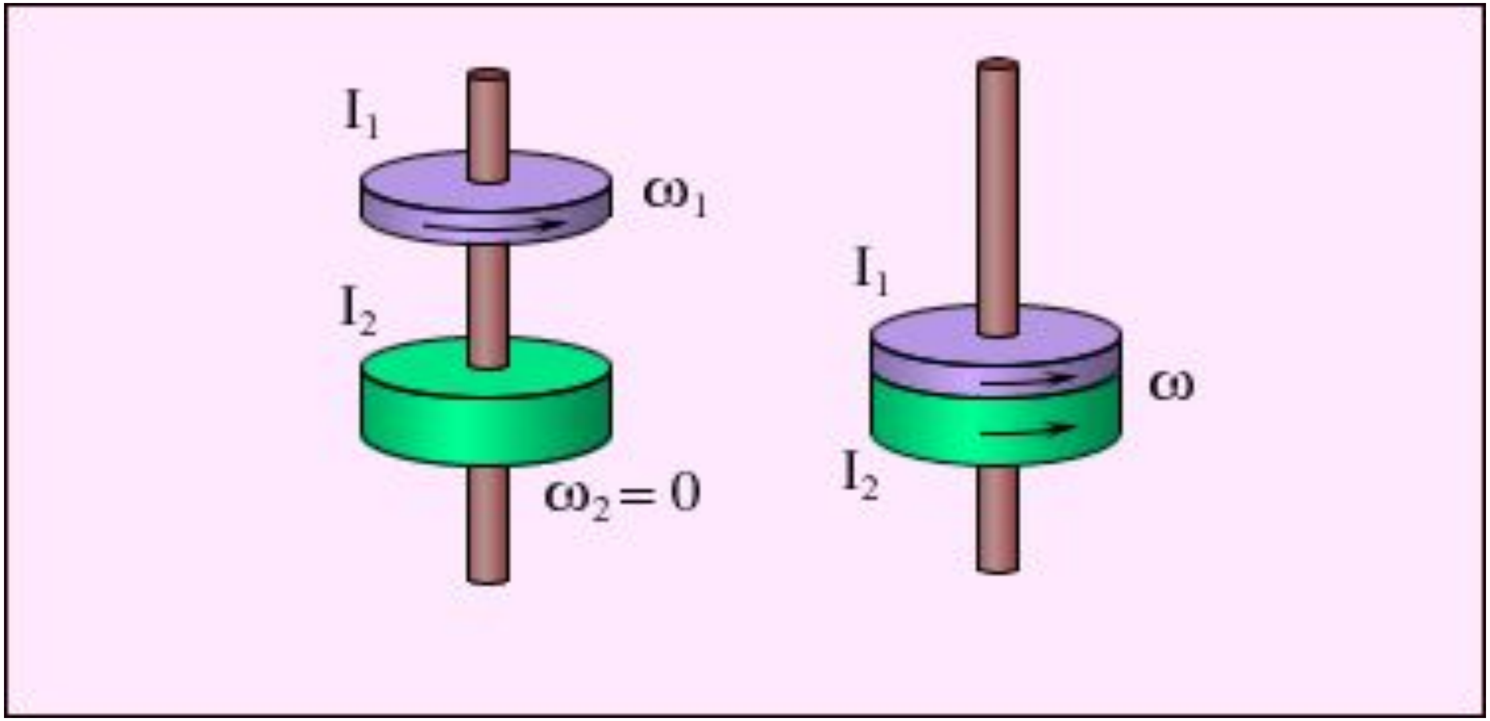
Следовательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const}$$

Закон сохранения момента импульса формулируется: **результирующий момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным.**

Рисунок иллюстрирует закон сохранения момента импульса: $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J\omega$, но $\omega_2 = 0$

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega$$



На практике часто приходится рассматривать вращение взаимодействующих тел относительно некоторой неподвижной оси Z.

В этом случае может сохраняться суммарный момент импульса системы относительно данной оси Lz.

Необходимым условием этого является **равенство нулю суммарного момента внешних сил относительно этой же оси вращения.**

$$M_{z,\,внеш} = 0.$$

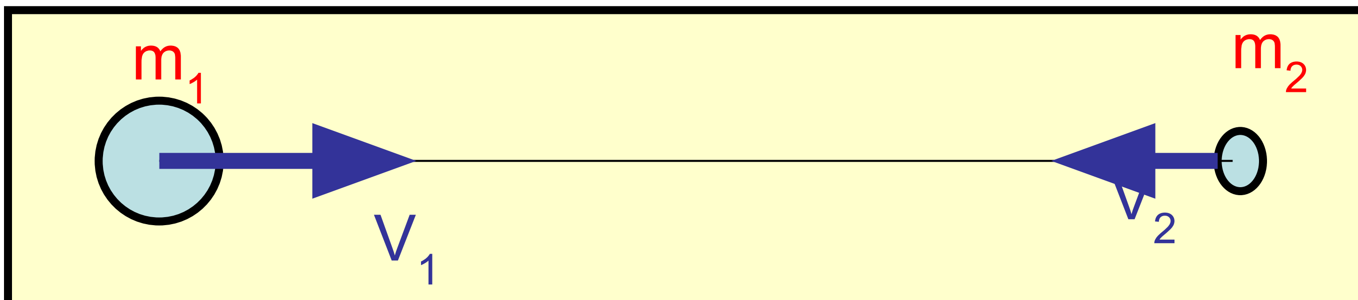
Последнее может выполняться и для незамкнутой системы, если внешние силы параллельны оси вращения или пересекают эту ось.

Применение законов сохранения к удару тел

Центральный (лобовой) удар тел происходит по линии, соединяющей центры тяжести тел.

Бывает трёх типов:

1. **абсолютно неупругий** удар;
2. **абсолютно упругий** удар;
3. **упругий** (промежуточный) удар.



Абсолютно неупругий удар

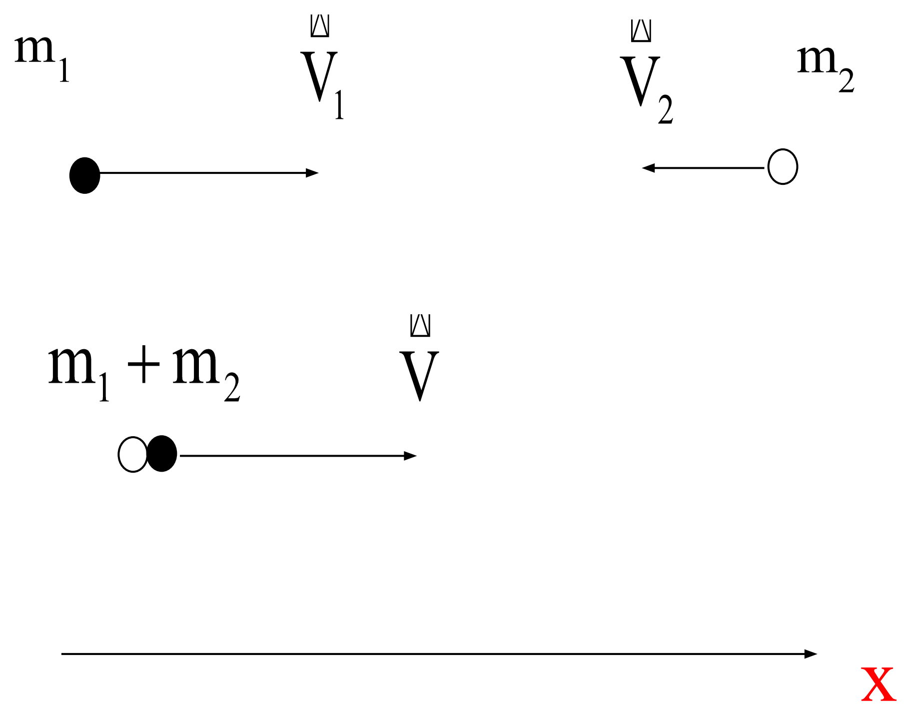
При **абсолютно неупругом ударе** тела:

- **деформируются;**
- **после удара движутся с одинаковыми скоростями.**

При деформации часть кинетической энергии превращается во внутреннюю энергию, поэтому для этого удара **сохраняется только импульс системы тел:**

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{V}$$

Закон сохранения импульса в скалярной форме в проекциях на ось x:



до удара

после удара

$$x)\, m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)V$$

Закон сохранения энергии для абсолютно неупругого удара тоже можно записать, но только с учётом той энергии, которая перейдёт в другие виды энергии:

- энергию, ушедшую на деформацию тел;
- энергию, выделенную в виде тепла;
- энергию, ушедшую на трение и т.д.

$$\frac{m_1 V_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{\,2}}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + \Delta E$$

Абсолютно упругий удар

При **абсолютно упругом ударе** тела:

- **не деформируются;**
- **после удара движутся с разными скоростями и направлениями.**

Для такого удара справедливыми являются **два закона сохранения**:

импульса

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2$$

энергии

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_2U_2^2}{2}$$

Для указанного на рисунке случая абсолютно упругого удара **законы сохранения** **импульса** и **энергии** запишутся как

$$m_1V_1 = -m_1U_1 + m_2U_2$$

$$\frac{m_1V_1^{\,2}}{2} = \frac{m_1U_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2U_2^{\,2}}{2}$$

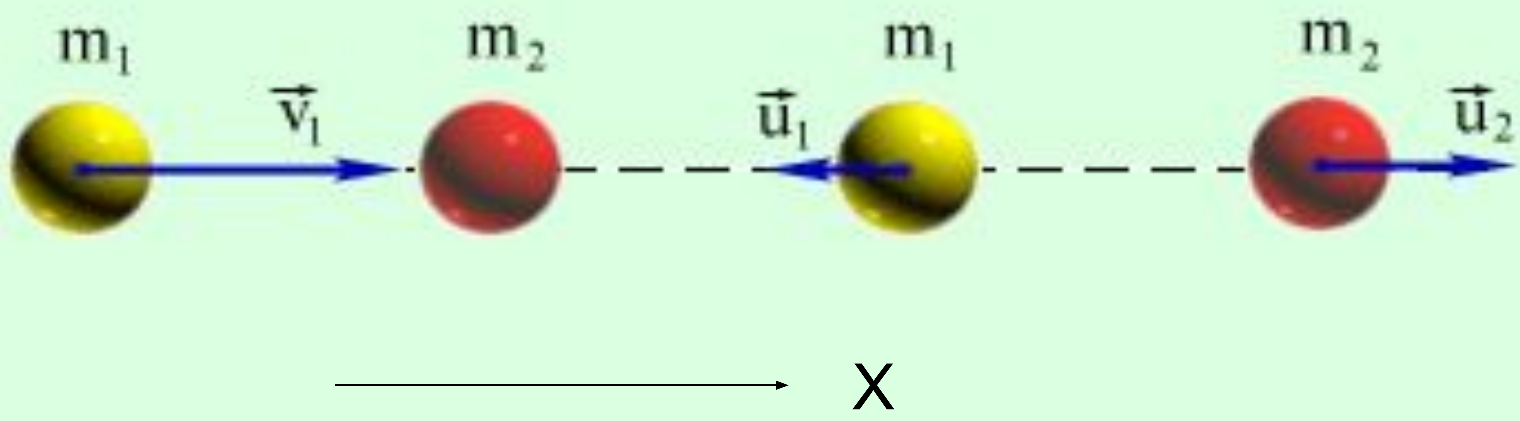
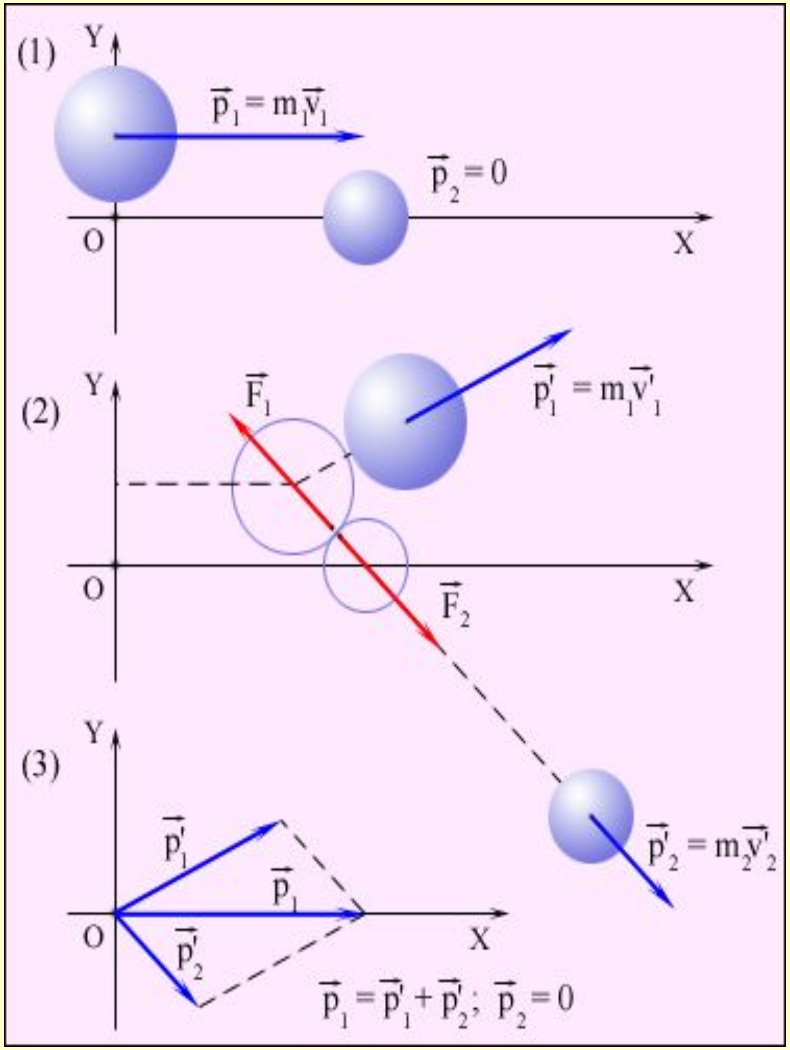


Рисунок иллюстрирует абсолютно упругий удар шаров разной массы.

После удара изменились направления движения шаров.

При одинаковой массе шаров получается игра в билльярд.



Частные случаи

Сталкиваются шары массами m_1 и m_2.

Скорости шаров до удара: V_1 и V_2.

Скорости шаров после удара: U_1 и U_2 .

1. **Шары с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$) обмениваются энергией**:

$$U_1 = V_2\,; \quad U_2 = V_1\,.$$

2. Шары с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$), но второй шар неподвижен ($V_2 = 0$).

Происходит **обмен импульсами**: первый шар остановится, а второй будет двигаться со скоростью первого.

$$U_2 = V_1 .$$

3. Столкновение шара со стеной ($V_2 = 0$, m_2 много больше m_1):

$$U_1 = -V_1 .$$

Законы сохранения в микромире

В заключение темы отметим, что рассмотренные выше фундаментальные законы сохранения справедливы как в макромире, так и в микромире.

В области элементарных частиц количество законов сохранения увеличивается.

Отметим среди них некоторые законы сохранения:

1. закон сохранения электрического заряда;
2. закон сохранения барионного заряда;
3. закон сохранения лептонного заряда;
4. закон сохранения чётности, странности, очарования и др.

Эти законы представляют собой равенство некоторых чисел на входе и выходе всевозможных превращений элементарных частиц.

Эти законы не связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени.