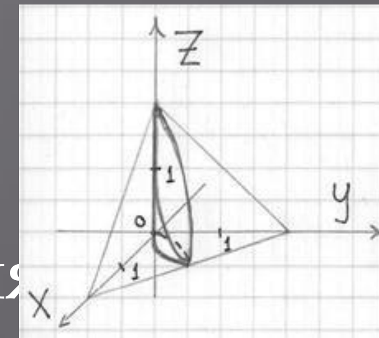
ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА.

- Понятие тройного интеграла вводиться аналогично понятию двойного интеграла.
- Пусть функция **f(x,y,z)** определена в ограниченной замкнутой области T, которая принадлежит трехмерному пространству с определенной декартовой системой координат **Oxyz**. Разобьем заданную область на **n** частей, которые не имеют общих внутренних точек и объемы которых равны соответственно.
- В каждой такой элементарной области возьмем произвольную точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$
- составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)dV_i$

- Тройной интеграл в общем виде записывается следующим образом:



- **f(x,y,z)** – подынтегральная функция переменных.
- **dxdydz** – произведение дифференциалов.
- τ – область интегрирования – пространственное тело ограниченное множеством поверхностей.
- Вычислить тройной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**:

В соответствии с общим смыслом интегрирования, произведение dxdydz равно бесконечно малому объему dV элементарного тела.

Тройной интеграл ***объединяет*** все эти *бесконечно малые частицы* по области, в результате чего получается интегральное

Как решать тройной интеграл?

- Пример 1.
- С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями [illegible]
  Варианты ответа:

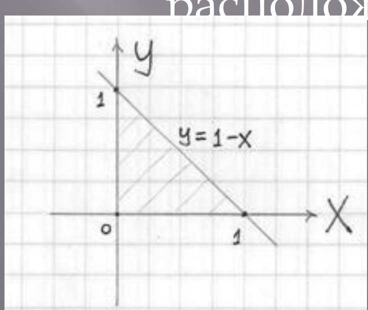
1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] 4) [illegible]

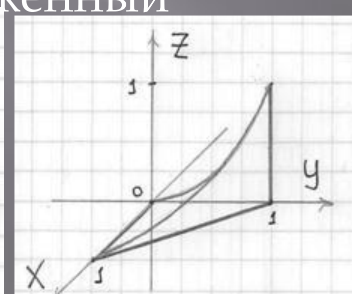
- С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1)используем формулу [illegible] Сначала изобразим *параллельную ортогональную* проекцию тела на координатную плоскость XOY.

2) выясняем, чем тело ограничено с сверху, чем снизу и выполняем пространственный чертёж.

$z=y^2$ параболический цилиндр расположенный





над плоскостью XOY и проходящий через ось OX:

- 3)Выбираем порядок обхода тела: Двигаемся по OZ
- Двигаемся по OY =>
- Двигаемся по OX

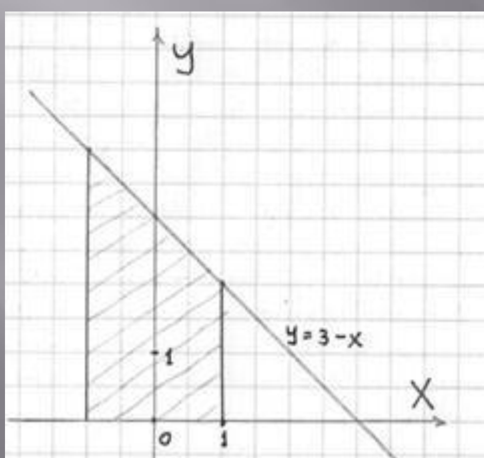
- Решение свелось к двойному интегралу, используем формулу:

- Ответ: 1)

Пример 2.

- Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Выполнить чертёж.
- Варианты ответа:
- 1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] 4) [illegible]
- Решим систему [illegible] получены

две **прямые**, лежащие в плоскости [illegible] параллельные оси

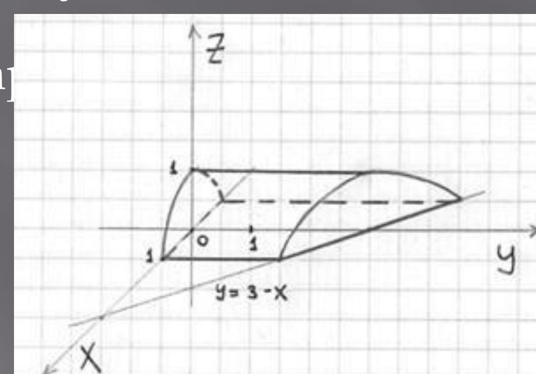


оекцию тела на плоскость XOY:

Искомое тело ограниченно плоскостью **z=0**

снизу И

пар ом **$z=1-x^2$**



- Составим порядок обхода тела: Двигаемся по OZ
- Двигаемся по OY
- Двигаемся по OX

При интегрировании по «игрек» – «икс» считается константой, поэтому константу целесообразно сразу вынести за знак интеграла.

Ответ: 2)

- Пример 3.
- Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями

Выполнить чертёжи данного тела и его проекции на плоскость XOY.

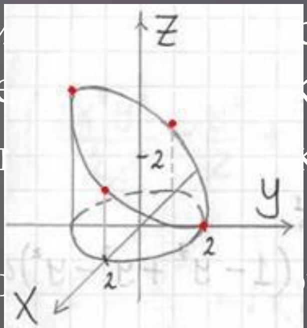
Варианты отета:

- 1) 2) 3) 4)

Решение: придерживаемся того же порядка действий: в первую очередь рассматриваем уравнения, в которых отсутствует переменная «зет». Оно здесь одно. Проекция **цилиндрической поверхности** на плоскость

представляет собой «одноимённую» **окружность.**

Плоскости ограничивают и снизу и сверху («высекают» его из цилиндра) и прое круг



Плоскость пересекает цилинд косым углом, в результате чего получается эллипс.

Из уравнения вычисли функции («высоту») в направляющихся точках

- Проекция тела на плоскость XOY представляет собой круг, и это весомый аргумент в пользу перехода к цилиндрической системе координат:

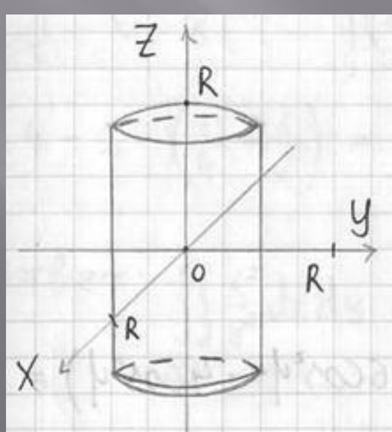
- Найдём уравнения поверхностей в цилиндрических координатах:

порядок обхода тела:

Ответ: 3)

Пример 4.

- С помощью тройного интеграла вычислить объём заданного тела: , где – произвольное положительное число.
- неравенство задаёт шар с центром в начале координат радиуса , а неравенство – «внутренность» кругового цилиндра с осью симметрии радиуса . Таким образом, искомое тело ограничено круговым цилиндром сбоку и симметричными относительно плоскости сферическими сегментами сверху и снизу.
- Варианты ответа:
- 1) 2) 3) 4)
- Порядок обхода:



- Решаем методом подведения под знак дифференциала:

- Ответ: 4)