

Математика 2 семестр.

Лекция № 1.

**Неопределенный интеграл.**

# Первообразная.

В дифференциальном исчислении по заданной функции  $f(x)$  отыскивали её производную  $f'(x)$ . Рассмотрим обратную задачу: по заданной функции  $f(x)$  восстановить функцию  $F(x)$ , для которой:

$$F'(x) = f(x).$$

Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$ .

*Пример.*  $f(x) = \cos x$ , найдём первообразные для функции  $f(x)$  :  
 $F_1(x) = \sin x$ ,  $F_2(x) = \sin x + 5$ ,  $F_3(x) = \sin x + x$ .

Из примера следует, что задача об отыскании первообразной имеет не единственное решение. Если  $f(x)$  является первообразной для  $F(x)$ , то и  $F(x) + C$  также является первообразной ( $C = \text{const}$ ).

# Теорема о разности первообразных.

**Теорема.** Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причём любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Доказательство. Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  - две первообразные функции для  $F(x)$ , докажем, что  $f_2(x) = f_1(x) + C$ , где  $C = \text{const}$

Предположим, что разность между функциями  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  является функцией:  $G(x) = f_2(x) - f_1(x)$ , по условию теоремы

$$f_1'(x) = F(x), \quad f_2'(x) = F(x).$$

Тогда  $G'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) = F(x) - F(x) = 0$ .

Зафиксируем значение переменной  $x_0$ , пусть  $x$  - произвольное значение. По формуле Лагранжа

$$G(x) - G(x_0) = G'(x_0)(x - x_0), \quad x_0 < x < x_1,$$

$$G'(x_0) = 0, \text{ тогда } G(x) - G(x_0) = 0, \text{ значит } G(x) = G(x_0) = \text{const}$$

Следовательно,  $f_2(x) = f_1(x) + C$ , где  $C = \text{const}$

# *Неопределённый интеграл.*

Совокупность всех первообразных функции  $f(x)$  называют **неопределённым интегралом** функции и обозначают  $\int f(x)dx$ ;

$f(x)$  - подынтегральная функция;

$f(x)dx$  - подынтегральное выражение;

$x$  - переменная интегрирования.

Действие отыскания неопределённого интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется **интегрированием** данной функции.

# Интегральная кривая.

Пусть требуется найти кривую  $y = F(x)$ , зная, что тангенс угла наклона касательной в каждой её точке есть заданная функция  $f(x)$ . Согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла наклона касательной в данной точке кривой равен значению производной в этой точке. Значит, нужно найти такую функцию  $F(x)$ , для которой  $F'(x) = f(x)$ . Следовательно, задача свелась к нахождению первообразной. Таким образом,  $y = \int f(x) dx$ , или  $y = F(x) + C$ . Ясно, что условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а семейство кривых. Причем, если  $y = F(x)$  одна из таких кривых, то всякая другая может быть получена из неё параллельным переносом вдоль оси  $OY$ .

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, требуется дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы кривая проходила через заданную точку  $(x_0, y_0)$ . Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой кривой:  $y_0 = F(x_0) + C$ . Отсюда

$$C = y_0 - F(x_0).$$

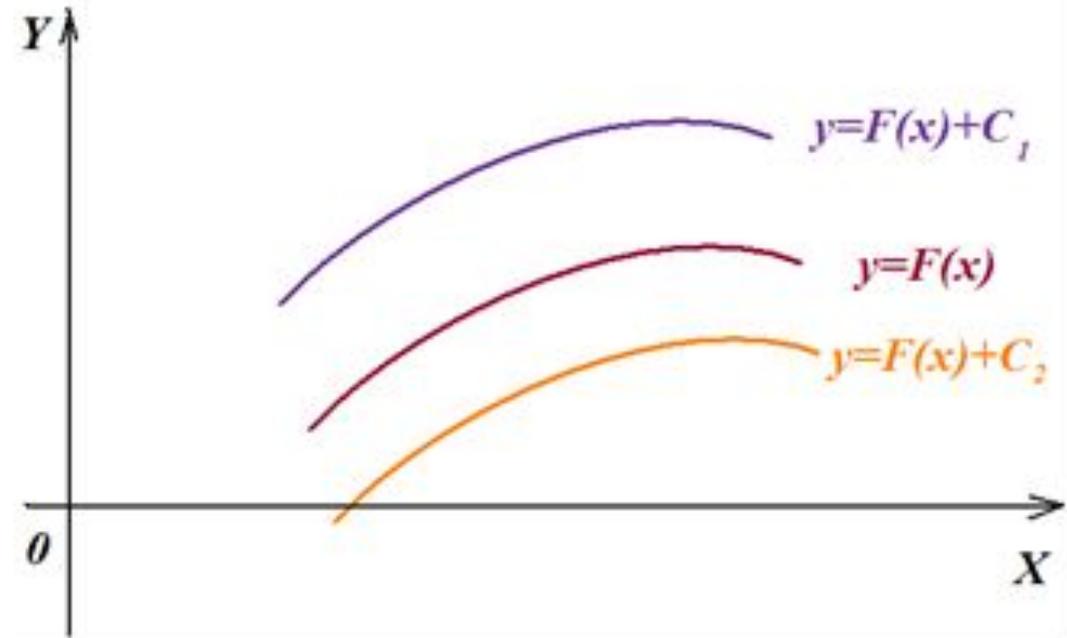


График первообразной функции от  $f(x)$  называют **интегральной кривой**.

**Неопределенный интеграл** геометрически представляется семейством всех интегральных кривых.

# Таблица интегралов.

Формулы интегрирования прямо вытекают из формул дифференцирования основных элементарных функций, каждая из них легко проверяется дифференцированием.

$$1. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \int 0 dx = C, \int dx = x + C.$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$3. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha > -1, \alpha \neq -1, \int x^{-1} dx = \ln|x| + C.$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$7. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$8. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$9. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$10. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 \pm a^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

# *Взаимно - обратные действия дифференцирования и интегрирования.*

Возведение в степень и извлечение корня дают примеры взаимно – обратных математических операций:

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \quad (x^n)^{\frac{1}{n}} = x, \quad x > 0.$$

Операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно – обратными :

$$\begin{aligned} (x \cdot f(x))' &= x f'(x), \\ f(x) \cdot x &= (x f'(x))' \cdot x = f'(x) \cdot x^2, \\ x \cdot f'(x) &= x f(x) = x^2 f'(x) + x. \end{aligned}$$

# *Основные правила интегрирования.*

1. Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx \quad (c = \text{const}).$$

3. Вид формул интегрирования не изменится, если независимую переменную  $x$  заменить любой дифференцируемой функцией от  $x$  (свойство инвариантности) :

$$f(x) = f(u), \quad \int f(x) dx = \int f(u) du + \int f(x) dx \quad \int f(x) dx = \int f(u) du + \int f(x) dx.$$



# ***Методы интегрирования.***

## ***Интегрирование по частям.***

Возьмём формулу дифференциала произведения :

$$du \cdot v = u dv + v du, \quad u = u(x), \quad v = v(x),$$
$$u dv = d uv - v du,$$

Проинтегрируем последнее равенство :  $\int u dv = uv - \int v du$ .

Эта формула определяет метод интегрирования по частям.

Метод используют в том случае, когда функция  $u = u(x)$  упрощается после дифференцирования ( например, функции  $\ln x$ ,  $P_n(x)$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arctg x$  и т.д. ).

***Пример.***

$$\int x \cdot \sin 2x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin 2x, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\} =$$
$$-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left( -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$$

## *Примеры интегрирования.*

Пример 1. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx$ .

Используем формулу для квадрата суммы, операции с алгебраическими дробями, свойство линейности неопределённого интеграла и таблицу интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx &= \int \frac{1 + 2\sqrt{x} + x}{x} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \\ &= \int dx + 2 \int x^{-1/2} dx + \int dx = \ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C. \end{aligned}$$

# Примеры интегрирования.

Пример 2. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Применим выделение полного квадрата, формулу линейной замены переменной и табличные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + C.$$

Пример 3. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) - 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 - 2^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x + 1 - 2}{x + 1 + 2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Два рассмотренных примера похожи по методу нахождения, но в итоге сводятся к разным табличным интегралам.

*Интегралы от тригонометрических функций часто можно найти, применяя формулы тригонометрии для упрощения подынтегрального выражения.*

Пример 4. Найдем неопределенный интеграл  $\int \cos^2 x \, dx$ .

Применим для упрощения подынтегрального выражения формулу понижения степени. Затем используем свойство линейности неопределенного интеграла.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Пример 5. Найдем неопределенный интеграл  $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$ .

Применим формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cos 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(4x + 3x) + \sin(4x - 3x)] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

*Примеры интегрирования методом замены переменной.  
При применении метода замены переменной следует в  
последней выкладке перейти к исходной переменной.*

Пример.6. Найдем неопределенный интеграл  $\int \sin^2 x \cos x dx$ .

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Пример 7. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ .

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

## Примеры интегрирования методом замены переменной.

Пример 8. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ .

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C.$$

Пример 9. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$ .

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

Пример 10. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$ .

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}} = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{1+x^6}| + C$$

*Примеры интегрирования методом  
интегрирования по частям.*

Пример 11. Найдем неопределенный интеграл  $\int x e^{2x} dx$ .

$$\int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Пример 12. Найдем неопределенный интеграл  $\int \ln(x-1) dx$ .

$$\begin{aligned} \int \ln(x-1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x-1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x-1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = \\ &= x \ln(x-1) - \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = x \ln(x-1) - x - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

## Примеры интегрирования методом интегрирования по частям.

Пример 13. Найдем неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.\end{aligned}$$

Пример 14. Найдем неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx .$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin \frac{x}{3} \\ du = 2x dx \quad v = -3 \cos \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 6 \int x \cos \frac{x}{3} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos \frac{x}{3} \\ du = dx \quad v = 3 \sin \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 6 \left( 3x \sin \frac{x}{3} - \int 3 \sin \frac{x}{3} dx \right) = \\ &= -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 18x \sin \frac{x}{3} + 54 \cos \frac{x}{3} + C.\end{aligned}$$

В заключение заметим, что в дифференциальном исчислении производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, - интегрирование. Можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Так, например, хотя для функций  $e^{-x^2}$ ;  $\frac{\sin x}{x}$ ;  $\frac{\cos x}{x}$ ;  $\frac{1}{\ln x}$  существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях. Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл не берется в элементарных функциях*.

## *Интегралы от рациональных дробей.*

Пример 15. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{4dx}{5x+3}$ .

Используем линейную замену переменных.

$$\int \frac{4dx}{5x+3} = 4 \cdot \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{5x+3} = \left| \begin{array}{l} u = 5x + 3 \\ du = 5dx \end{array} \right| = \frac{4}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{4}{5} \ln|u| + C = \frac{4}{5} \ln|5x+3| + C$$

Пример 16. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{7dx}{(3x-2)^2}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{7dx}{(3x-2)^2} &= 7 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{(3x-2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 2 \\ du = 3dx \end{array} \right| = \frac{7}{3} \int \frac{du}{u^2} = \frac{7}{3} \cdot \left( -\frac{1}{u} \right) + C = \\ &= -\frac{7}{3(3x-2)} + C = -\frac{7}{9x-6} + C. \end{aligned}$$

## Интегралы от рациональных дробей.

Пример 17. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x+1}{x^2+16} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+16} dx &= \int \frac{2x}{x^2+16} dx + \int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{d(x^2+16)}{x^2+16} + \int \frac{dx}{x^2+4^2} = \\ &= \ln|x^2+16| + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 18. Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int \frac{x^2-1+1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} dx = \int \left( x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int x dx - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

# Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6298>. — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2