Лекция 2-4

10.3. Приложения тройных интегралов.

Пусть дано тело V **переменной плотности** $\gamma(x, y, z)$.
Массу тела M **можно вычислить по формуле**

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z)\,dv.$$

1) Статические моменты инерции тела относительно координатных плоскостей $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

- $M_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z)\,dv, \qquad M_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z)\,dv,$

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z)\,dv.$$

2) Координаты центра тяжести:

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv},$$

$$z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\,dv}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dv}.$$

Если тело однородно, т. е. $\gamma(x, y, z) = const,$ **то**

$$x_{цт} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V x\,dv}{V}, \quad y_{цт} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V y\,dv}{V}, \quad z_{цт} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V z\,dv}{V}.$$

3) **Моменты инерции тела относительно координатных осей:**

$$J_x = \iiint_V \gamma(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right) dv,$$

$$J_y = \iiint_V \gamma(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right) dv, \quad J_z = \iiint_V \gamma(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right) dv.$$

4) **Центробежные моменты инерции тела:**

$$J_{xy} = \iiint_V xy\gamma(x, y, z)\, dv, \quad J_{xz} = \iiint_V xz\gamma(x, y, z)\, dv,$$

$$J_{yz} = \iiint_V yz\gamma(x, y, z)\, dv.$$

5) **Полярный момент инерции тела:**

$$J_0 = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\, dv.$$

11. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

11.1. Криволинейный интеграл по длине дуги (1 – го рода).

Дифференциал длины дуги в плоском случае для линии, заданной уравнением $y = y(x)$ **равен**

$$ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Дифференциал длины дуги в пространственном случае для линии, заданной уравнениями $y = y(x),\ z = z(x)$ **равен**

$$ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2 + \left(z'(x)\right)^2}\,dx.$$

При параметрическом задании линии

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \qquad z = z(t)$$

дифференциал длины дуги в плоском случае равен

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$$

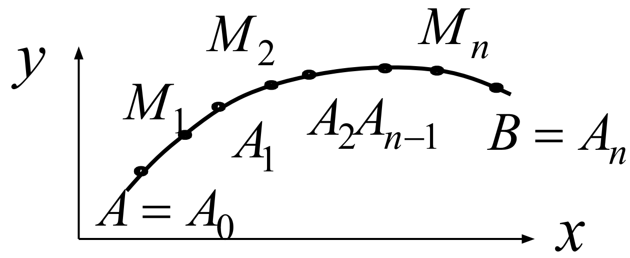
а в пространственном случае -

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt.$$

Определение.

- **Криволинейным интегралом 1-го рода** $\int\limits_K f(x,y)\,ds$

от функции двух переменных $f = f(x,y)$ **(заданной в некоторой связной области), взятым по отрезку** $K = \overset{\frown}{AB}$ **плоской кривой (этот отрезок находится в той же области и называется путем интегрирования), заданной своим уравнением , называется число,**
получаемое следующим образом:



1) Отрезок AB разбивается на n элементарных отрезков произвольно выбранными точками $A_1, ..., A_{n-1}$, идущими от начала отрезка $A = A_0$ до его конца $B = A_n$.
2) Внутри (или на границе) каждого элементарного отрезка $A_{i-1}A_i$ выбирается одна произвольная точка M_i с координатами x_i, y_i.

3) Значения функции $f\left(x_i, y_i\right)$ в этих выбранных точках умножаются на длины отрезков $A_{i-1}A_i = \Delta s_i$ (эти длины считаются положительными).

4) Все полученные n произведений $f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i$ складываются.
5) Вычисляется предел суммы

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i.$$

Если этот предел существует и не зависит от выбора точек $A_i, M_i,$ **то он называется криволинейным интегралом 1-го рода**

$$\int_K f(x,y)\,ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i. \qquad \textbf{(А)}$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции трех переменных $u = f(x,y,z),$ **взятый по отрезку** K **пространственной кривой**

$$\int_K f(x,y,z)\,ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i. \qquad \textbf{(Б)}$$

Теорема существования.

- **Если функция** $f(x,y)$ **или** $f(x,y,z)$ **непрерывна, а кривая на отрезке** K **непрерывна и имеет непрерывно вращающуюся касательную, то криволинейный интеграл 1-го рода типа (А) или (Б) существует. Т. е. пределы существуют и не зависят от выбора точек** $A_i,\ M_i.$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
Оно сводится к вычислению определенного интеграла:

1) Если уравнения пути интегрирования заданы в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t)$ **, то**

$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad \textbf{(А)}$$

Для пространственной кривой $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$$\int_K f(x,y,z)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt. \qquad \textbf{(Б)}$$

Здесь значение параметра t_0 **берется для точки** A **, значение параметра** t_1 **берется для точки** B **. Точки** A **и** B **выбираются так, чтобы выполнялось неравенство** $t_0 < t_1.$

2) Если уравнения пути интегрирования заданы в явном виде $y = y(x)$ для плоской кривой (для пространственной кривой $y = y(x),\ z = z(x)$), то

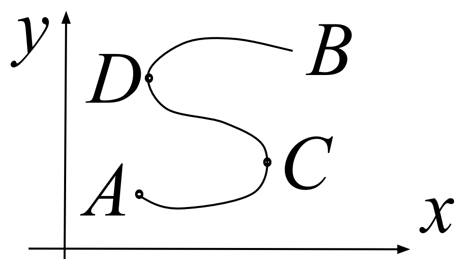
$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx, \qquad \textbf{(А)}$$

$$\int_K f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x, y(x), z(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2+\left(z'(x)\right)^2}\,dx. \qquad \textbf{(Б)}$$

Здесь значение $x = a$ берется для точки A, значение $x = b$ берется для точки B. Точки A и B выбираются так, чтобы выполнялось неравенство

$a < b.$

Замечание. Пусть кривая такова, что для заданного x координата y принимает несколько значений, например:



Тогда кривую нужно разбить промежуточными точками на отрезки таким образом, чтобы для каждого отрезка выполнялось взаимно однозначное соответствие между x и y, и интегрировать в сторону увеличения координаты x. Для данного примера криволинейный интеграл 1-го рода примет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{AC} f(x,y)\,ds + \int\limits_{DC} f(x,y)\,ds + \int\limits_{DB} f(x,y)\,ds.$$

Приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

- **1) Длина криволинейного отрезка** K**:** $L = \int\limits_K ds.$
- **2) Масса неоднородного криволинейного отрезка** K **переменной плотности** $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$M = \int\limits_K \gamma(x, y, z)\, ds.$$

Пример.

Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_K yds,$ **где** K

- дуга параболы $y^2=2x$ **от точки** $A(0,0)$

до точки $B\left(4,\sqrt{8}\right).$

Удобно задать уравнение параболы в виде $x=\dfrac{y^2}{2}$ **и вычислять интеграл по координате** $y.$

Производная равна $x'=y.$ **Интеграл примет вид**

$$I=\int\limits_K yds=\int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+\left(x'\right)^2}dy=\int\limits_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}dy=\left.\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\sqrt{8}}=\frac{26}{3}.$$