

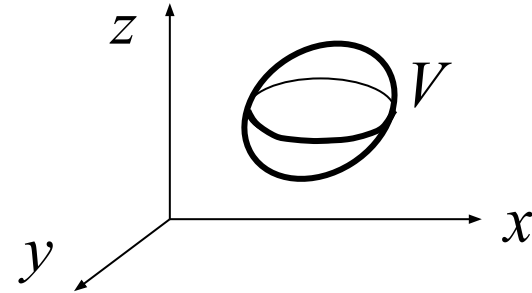
Лекция 2-3.

10. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

10.1. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл.

- Рассмотрим тело объемом V
- переменной плотности

$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$



Разобьем тело произвольным образом на n частей
элементарными объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$.

Выберем в каждом из элементарных объемов
произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$.

Масса элементарного объема приближенно равна

$$\Delta M_k \approx \gamma(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Просуммируем массу всех элементарных объемов

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \gamma(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

- Выражение в правой части называется интегральной суммой. Устремим наибольший диаметр элементарных объемов к нулю и рассмотрим предел**

$$\lim_{\max \Delta V_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \gamma(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Если этот предел интегральной суммы существует, то, очевидно, он равен массе тела и называется

тройным интегралом от функции $\gamma = \gamma(x, y, z)$ по объему V

$$M = \lim_{\max \Delta V_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \gamma(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_V \gamma(x, y, z) dV.$$

Вообще, тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по объему V называется предел интегральной суммы

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

• Свойства двойных интегралов переносятся на тройные интегралы:

1)
$$\iiint_V (f_1(x, y, z) \pm \dots \pm f_n(x, y, z)) dV = \iiint_V f_1(x, y, z) dV \pm \dots \pm \iiint_V f_n(x, y, z) dV.$$

2)
$$\iiint_V cf(x, y, z) dV = c \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

3) $V = V_1 \boxplus V_2, V_1 \boxplus V_2 = \emptyset$. Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV.$$

4) Если $\forall (x, y, z) \in V \quad f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$,
то $\iiint_V f_1(x, y, z) dV \geq \iiint_V f_2(x, y, z) dV$.

5) Если $m \leq f_{\text{наим}}$, $MV = f_{\text{наиб}}$,
то $mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq MV$,

где $V = \iiint_V dV$.

6) $\iiint_V f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \varsigma)V$, $(\xi, \eta, \varsigma) \in V$.

$f(\xi, \eta, \varsigma)$ - среднее значение f в области V .

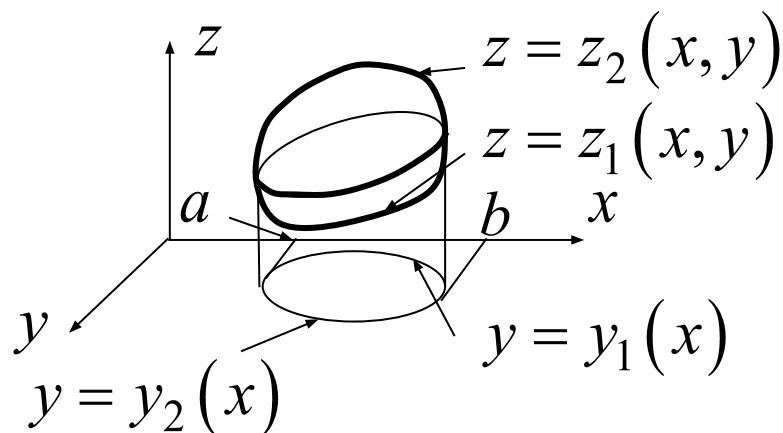
10.2. Вычисление тройных интегралов.

1) Декартовы координаты.

- Пусть дан тройной интеграл $I = \iiint_V f(x, y, z) dV$.
- Разобьем область интегрирования V на элементарные объемы плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен $dV = dxdydz$. Следовательно

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz.$$

Установим правило вычисления тройного интеграла



$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

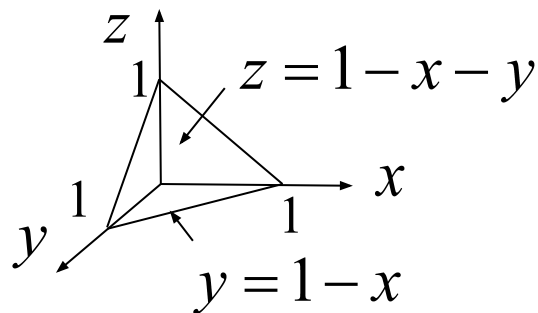
Пример.

Вычислить тройной интеграл $I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$

по области, ограниченной плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

и $x + y + z = 1$.

Построим область интегрирования:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left(-\frac{x^2}{2} y - x \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2} y \right) \Big|_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2) Цилиндрические координаты.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$$

Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

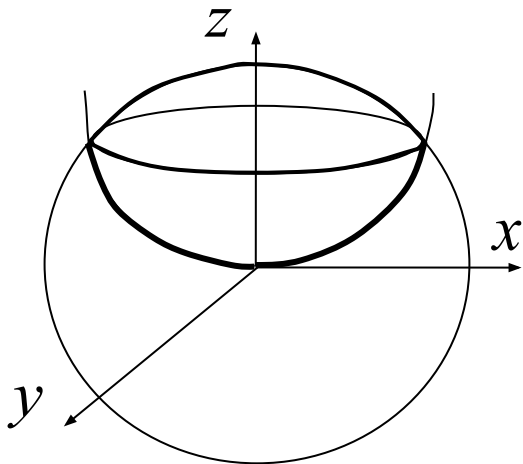
Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет

вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz.$$

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V z dv$ по области, ограниченной поверхностями

$$V : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$



Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad J = r.$$

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \rightarrow z = r^2.$$

Уравнение сферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \rightarrow z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей является окружность радиуса $r = \sqrt{2}$ ($r^2 + r^4 = 6$).

Переменные изменяются в следующих пределах:

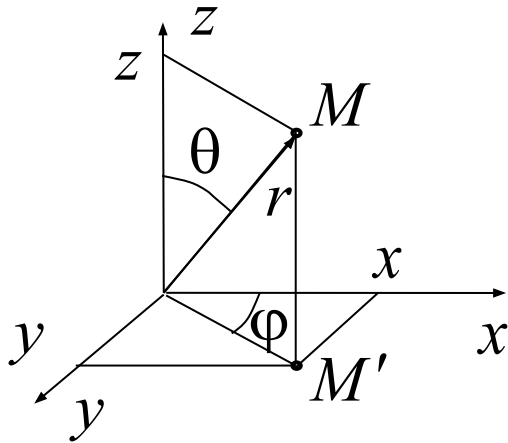
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I = \iiint_V z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \left. \frac{z^2}{2} \right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - r^2 - r^4) r dr = \frac{11}{3} \pi.$$

3) Сферические координаты.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$
$$(0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi).$$



Якобиан преобразования
вычисляется по формуле

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

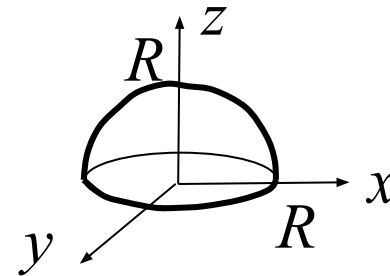
Тройной интеграл в
сферических
координатах примет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi dr d\theta.$$

**Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$,
где область V - верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.**

**Перейдем к сферическим
координатам:**

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \quad J = r^2 \sin \theta.$$



**Для данной области интегрирования, переменные
изменяются в пределах: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Интеграл запишется в виде:**

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \\ = 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{15} \pi R^5.$$