

**Кафедра медицинской и биологической физики**

**Тема: Интегральное исчисление  
Дифференциальные уравнения**

---

лекция № 2 для студентов 1 курса,  
обучающихся по специальности  
31.05.01 – Лечебное дело

**К.п.н., доцент Шилина Н.Г.**  
Красноярск, 2016

# План лекции:

---

- Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла
  - Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла
  - Таблица интегралов от некоторых функций. Способы вычисления интегралов
  - Типы дифференциальных уравнений и способы их решения
-

# Понятие неопределенного интеграла

---

- Функция  $F(x)$ , называется первообразной для функции  $f(x)$ , если ее производная  $F'(x)$  равна данной функции,  $F'(x) = f(x)$ , а  $dF(x) = f(x)dx$ .
  - Совокупность всех первообразных  $F(x) + C$  для данной функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом (обозначается  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , где  $f(x)dx$  – подынтегральное выражение,  $f(x)$  – подынтегральная функция,  $C$  – постоянная).
-

# Свойства неопределенного интеграла

---

- дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:  $d \int F(x) dx = F(x) dx$ ;
  - неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции:  $\int F(x) dx = F(x) + C$ ;
  - постоянный множитель выносится за знак интеграла:  $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ ;
  - интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов этих функций:  $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \int f_3(x) dx$ .
-

# Таблица интегралов основных функций

---

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

---

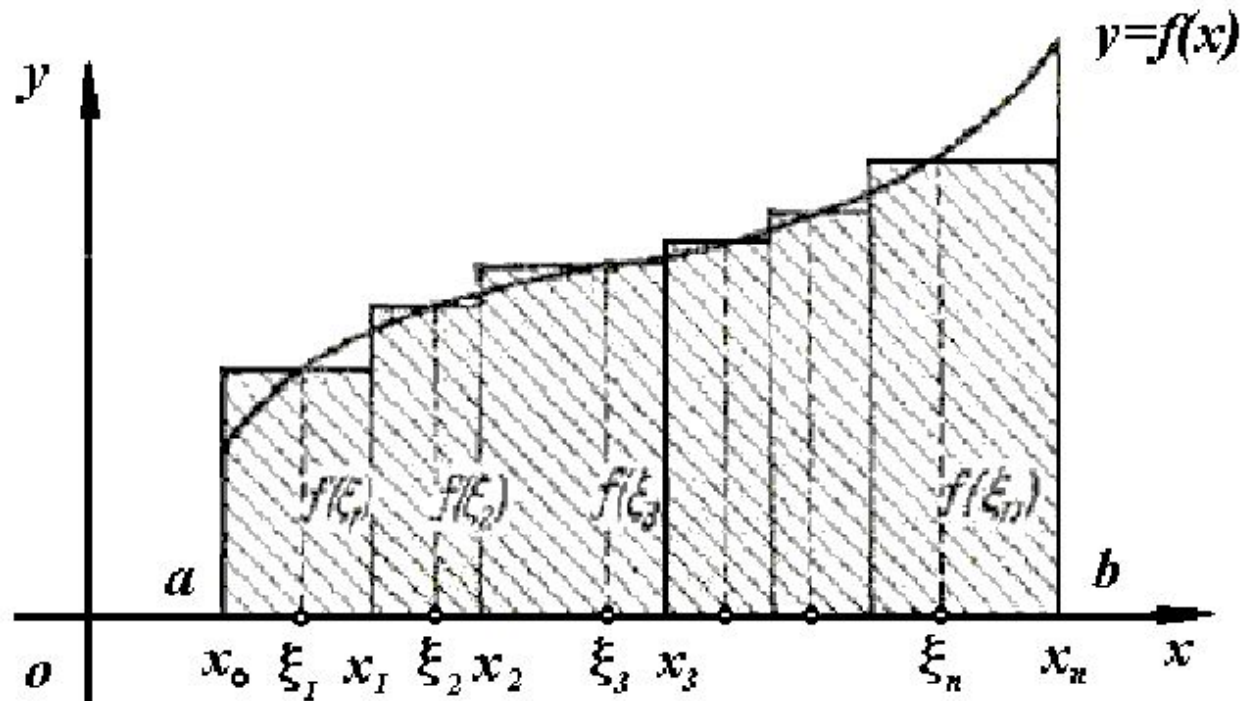
# Методы интегрирования

---

- Интегрирование по формулам. Этот метод основан на использовании таблицы интегралов основных функций и свойствах неопределенного интеграла
  - Интегрирование методом замены переменной (или метод подстановки). Этот способ применяется для упрощения подынтегрального выражения и сведения интеграла к табличному. Вводится новая переменная  $z=f(x)$ , находится ее дифференциал  $dz=z'dx$ , выражается  $dx = \frac{dz}{z'}$ , и все подынтегральное выражение записывается в новых переменных  $z$ .
-

# Понятие определенного интеграла

---



# Понятие определенного интеграла

---

- Выражение  $\int_a^b f(x)dx$  называют определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[ab]$ .
  - Если неопределенный интеграл представляет собой совокупность функций, отстоящих друг от друга на величину  $C$ , то определенный интеграл – это всегда число, значение которого определяется видом подынтегральной функции и значениями верхнего ( $b$ ) и нижнего ( $a$ ) пределов интегрирования.
-



# Свойства определенного интеграла

---

- при смене пределов интегрирования меняется знак у определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю  $\int_a^a f(x)dx = 0$
- если точка  $c$  принадлежит отрезку  $[ab]$ , то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

---

# Формула Ньютона -Лейбница

---

- Чтобы вычислить определенный интеграл необходимо найти его первообразную (неопределенный интеграл) и подставить пределы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

---

# Дифференциальные уравнения

---

- Уравнение, содержащее независимую переменную  $x$ , функцию  $f(x)$  и ее производные от первого до  $n$ -го порядка, называется дифференциальным.  $F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), C) = 0$ .
  - Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной.
  - Решением дифференциального уравнения называется функция  $y = f(x)$ , которая при подстановке обращает это уравнение в тождество.
-

# Алгоритм решения дифференциальных уравнений

---

- представить производную в дифференциальной форме, т.е.  $y' = \frac{dy}{dx}$  ;
  - разделить переменные, т.е. все, что относится к одной переменной (x) собрать в одной части равенства, а все, что относится к другой переменной (y) – в другой части равенства;
  - проинтегрировать обе части равенства и записать решение в виде  $y=f(x)$ ;
  - выполнить проверку.
-

# Основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения

---

- уравнение вида  $y' = f(x)$ .

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x) \cdot dx$$

$$\int dy = \int f(x) dx$$

$$y = F(x) + c$$

---

□ уравнение вида  $y' = f(y)$ .

---

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

$$F(y) = x + c$$

---

- уравнение с разделяющимися переменными вида

---

$$f_1(x)\Psi_1(y)dx + f_2(x)\Psi_2(y)dy = 0$$

$$f_1(x) \cdot \Psi_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot \Psi_2(y) \cdot dy = 0$$

$$f_1(x)\Psi_1(y) \cdot dx = -f_2(x) \cdot \Psi_2(y) \cdot dy$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)} dy$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\int \frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)} dy$$

$$F(x) + c = F(y)$$

---

# Общее и частное решение дифференциального уравнения

---

- Константа может быть выбрана в любом виде (произвольно) для удобства решения. И тогда получают общее решение дифференциального уравнения.
  - Если же заданы начальные условия, то константа вычисляется и имеет вполне определенное значение. Тогда можно говорить о частном решении дифференциального уравнения.
-



# Заключение

---

Нами рассмотрены:

- понятия неопределенного и определенного интегралов, а также показаны на примерах способы их решения;
  - виды дифференциальных уравнений, алгоритмы их решения.
-

# Тест-контроль

---

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком входящей в него:

1. функции
  2. аргумента
  3. высшей производной
  4. низшей производной
-

# РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

## **Обязательная:**

1. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики: учебник для мед.вузов.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2007.-

## **Дополнительная:**

1. Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др.- М.: ИНФРА-М, 2010.-
2. Шаповалов К.А. Основы высшей математики: учебное пособие. - Красноярск: Печатные технологии, 2004
3. Математика: метод. указания к внеаудит. работе для студ. по спец. – педиатрия /сост. Л.А.Шапиро и др.- Красноярск: тип.КрасГМУ, 2009.-

## **Электронные ресурсы:**

1. ЭБС КрасГМУ
  2. Ресурсы интернет
-



Красноярский  
Государственный  
Медицинский  
Университет  
им. проф.  
В.Ф.Войно-Ясенецкого



**БЛАГОДАРЮ  
ЗА ВНИМАНИЕ**