НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Задача побудови функції $\varphi\ (x)$, яка б приблизно зображувала функцію $f(x)$ з тим чи іншим ступенем точності, називається задачею наближення.

- Рівномірне наближення.
- Інтерполяція
- Середньоквадратичне наближення.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

Задана система вузлів $x_0, x_1, ..., x_m$ та значень функції у вузлах $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_m)$:
Поліном

$$\varphi(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) ... + a_m\psi_{\mathrm{m}}(x)$$

називається узагальненим поліномом,
де $\psi_j(x)$ – система базисних функцій,
a_0, a_1, ..., a_m– деякі постійні коефіцієнти.

Системою базисних функцій можуть бути:

$$\psi_k(x) = x^k, \quad k = 0, m$$

$$\psi_k(x) = exp(2\pi\, i\, k\, x), \quad k = 0, m$$

$$\psi_k(x) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), ...$$

$$f(x_0)=a_0\psi_0(x_0)+a_1\psi_1(x_0)+a_2\psi_2(x_0)...+a_m\psi_{\mathrm{m}}(x_0)$$
$$f(x_1)=a_0\psi_0(x_1)+a_1\psi_1(x_1)+a_2\psi_2(x_1)...+a_m\psi_{\mathrm{m}}(x_1)$$
$$f(x_2)=a_0\psi_0(x_2)+a_1\psi_1(x_2)+a_2\psi_2(x_2)...+a_m\psi_{\mathrm{m}}(x_2)$$
$$...$$
$$f(x_{\mathrm{m}})=a_0\psi_0(x_m)+a_1\psi_1(x_m)+a_2\psi_2(x_m)...+a_m\psi_{\mathrm{m}}(x_m)$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}\psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) & ... & \psi_{\mathrm{m}}(x_0)\\ \psi_0(x_1) & \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & ... & \psi_{\mathrm{m}}(x_1)\\ \psi_0(x_2) & \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & ... & \psi_{\mathrm{m}}(x_2)\\ ... & & & & \\ \psi_0(x_m) & \psi_1(x_m) & \psi_2(x_m) & ... & \psi_{\mathrm{m}}(x_m)\end{bmatrix}\neq 0;\ \mathbf{f}=\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\\ f(x_2)\\ ...\\ f(x_{\mathrm{m}})\end{bmatrix};\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ ...\\ a_m\end{bmatrix};$$

$$\Delta\mathbf{a}=\mathbf{f},\quad \mathbf{a}=\Delta^{-1}\mathbf{f}$$

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0^1 + a_2 x_0^2 \ldots + a_m x_0^m$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1^1 + a_2 x_1^2 \ldots + a_m x_1^m$$

$$f(x_2) = a_0 + a_1 x_2^1 + a_2 x_2^2 \ldots + a_m x_2^m$$

$$\ldots$$

$$f(x_\mathrm{m}) = a_0 + a_1 x_m^1 + a_2 x_m^2 \ldots + a_m x_m^m$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1^1 & \ldots & x_1^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_m^1 & \ldots & x_m^m \end{bmatrix} \neq 0;$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \ldots \\ f(x_\mathrm{m}) \end{bmatrix}; \ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} = \Delta^{-1} \mathbf{f}$$

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Інтерполяційний поліном Лагранжа можна записати як:

$$L_m(x) = \varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j)\psi_j(x)$$

де $\psi_j(x)$ – поліном степеня *m*, що у вузлах інтерполяції задовольняє умови:

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } i = j \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Поліном, що задовольняє цим вимогам:

$$\psi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_{m-1})(x_j - x_m)}$$

Приклад

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1$$
$$x_1 = 2 \qquad f(x_1) = 4$$
$$x_2 = 3 \qquad f(x_2) = 9.$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \quad = x^2.$$

Приклад

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1$$

$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 8$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 27$$

$$L(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \; = 6x^2 - 11x + 6.$$

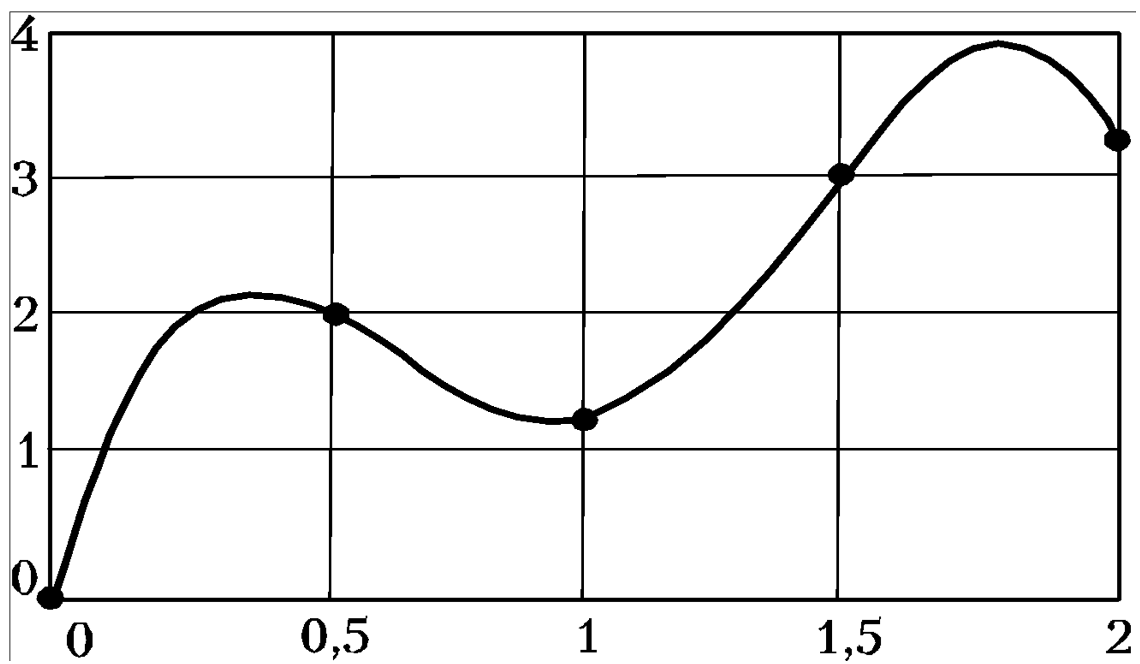
Інтерполяційний поліном Лагранжа можна записати як:

$$L_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_{m-1})(x_j - x_m)}$$

Приклад

x_J	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_J)$	0	2	1.25	3	3.25

$$L_4(x) = 14.875x - 32.9583x^2 + 25.5x^3 - 6.16667x^4$$



ПОХИБКИ ФОРМУЛИ ЛАГРАНЖА

Різницю між функцією та її інтерполяційним наближенням називають залишковим членом інтерполяційної формули або похибкою інтерполяції:

$$r_m(x) = L_m(x) - f(x)$$

Для полінома Лагранжа маємо:

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!}\omega(x), \qquad M_{m+1} = \max_{[a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$$

$$|f(x) - L_m(x)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}\omega(x),$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_m)$.

Коли функція $f(x)$ є поліномом степеня *m*, інтерполяційний поліном на вузлах $x_0, x_1, \ldots, x_m$ є точним, тобто:

$$L_m(x) \equiv f(x)$$

$y = \ln x$

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y	0.000	0.95310	0.182322	0.262364	0.336472

$x = 1.23;$

$x_0 = 1.1;\ x_1 = 1.2;$ $x_0 = 1.1;\ x_1 = 1.2;\ x_2 = 1.3;$

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, y_1, \quad n = 1;$$

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\, y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\, y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\, y_2, \quad n = 2.$$

$L_1(1.23) = 0.206335;$
$L_2(1.23) = 0.207086;$

$$|f(x)-L_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$

$$|f(x)-L_2(x)|\le\frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|.$$

$$f(x)=\ln(x) \quad f^{(2)}(x)=-\frac{1}{x^2} \quad M_2=\max_{[1.2,1.3]}|f^{(2)}(x)|=\frac{1}{1.2^2}\approx 0.69$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3} \quad M_3=\max_{[1.2,1.3]}|f^{(3)}(x)|=\frac{2}{1.1^3}\approx 1.5$$

$$\varepsilon_1=|\ln(1.23)-L_1(x)|\le\frac{0.69}{2}|(1.23-1.2)(1.23-1.3)|\approx 7.3*10^{-4},$$

$$\varepsilon_2=|\ln(1.23)-L_2(x)|\le\frac{1.5}{6}|(1.23-1.1)(1.23-1.2)(1.23-1.3)|\approx 6.9*10^{-5},$$

Скінченні різниці першого порядку:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0),$$

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

$$\ldots$$

$$\Delta f(x_{m-1}) = f(x_m) - f(x_{m-1}).$$

Скінченні різниці другого порядку:

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1),$$

$$\ldots$$

$$\Delta^2 f(x_{m-2}) = \Delta f(x_{m-1}) - \Delta f(x_{m-2}).$$

У загальному випадку скінченні різниці *k*-го порядку:

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i).$$

ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

1. Скінченні різниці сталої дорівнюють нулю.
2. Сталий множник можна виносити за знак скінченної різниці.
3. Якщо $f(x)$− многочлен степеня *m,* то різниця

$$\Delta^k f(x) \equiv 0 \quad \text{для} \quad k > m$$

4. Якщо *m-і* різниці функції $f(x)$ сталі, то ця функція є многочленом степеня *m*.

ГОРИЗОНТАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_1)$	$\Delta^4 f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_2)$	$\Delta^3 f(x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$\Delta f(x_3)$	$\Delta^2 f(x_3)$		
x_4	$f(x_4)$	$\Delta f(x_4)$			
x_5	$f(x_5)$				

ГОРИЗОНТАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$
1,215	9,58756	0,07418	0,00159	0,00001	0,00000
1,220	9,66174	0,07576	0,00160	0,00001	0,00000
1,225	9,73750	0,07736	0,00162	0,00001	
1,230	9,81487	0,07898	0,00163		
1,235	9,89385	0,08061			
1,240	9,97446				

ДІАГОНАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$					
		$\Delta f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$			
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$		
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$		$\Delta^4 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_2)$		$\Delta^3 f(x_1)$		$\Delta^5 f(x_0)$
x_3	$f(x_3)$		$\Delta^2 f(x_2)$		$\Delta^4 f(x_1)$	
		$\Delta f(x_3)$		$\Delta^3 f(x_2)$		
x_4	$f(x_4)$		$\Delta^2 f(x_3)$			
		$\Delta f(x_4)$				
x_5	$f(x_5)$					

ДІАГОНАЛЬНІ СКІНЧЕННІ РІЗНИЦІ

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$	$\Delta^5 f(xi)$
1,215	9,58756					
		0,07418				
1,220	9,66174		0,00159			
		0,07576		0,00001		
1,225	9,73750		0,00160		0,00000	
		0,07736		0,00001		0,00000
1,230	9,81487		0,00162		0,00000	
		0,07898		0,00001		
1,235	9,89385		0,00163			
		0,08061				
1,240	9,97446					

ПЕРША ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Нехай, вузли інтерполяції $x_0, x_1, \dots, x_m$ розташовані рівномірно: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_m = x_0 + mh.$

Побудуємо інтерполяційний поліном у вигляді:

$$N_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_m(x - x_0)\dots(x - x_{m-1})$$

Задача полягає в обчисленні значень $a_0, a_1, \dots, a_m.$

Покладемо $x = x_0$, то $f(x_0) = N_m(x_0) = a_0$

Покладемо $x = x_1.$

$$f(x_1) = N_m(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1 h.$$

Звідки $a_1 = \dfrac{\Delta f(x_0)}{h}.$

Для $x = x_2$ маємо:

$$f(x_2) = N_m(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Враховуючи, що $(x_2 - x_0) = 2h$ та $(x_2 - x_1) = h$:

$$f(x_2) = 2f(x_1) - f(x_0) + a_2 2! h^2, a_2 = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}.$$

Аналогічно, для $x = x_3$

$$a_3 = \frac{f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)}{3! h^3} = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3! h^3}.$$

Для $x = x_k$ маємо:

$$a_k = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} (k = 1, 2 ... m).$$

Таким чином, маємо :

$$N_m(x) = a_0 + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) + \ldots +$$

$$+\frac{\Delta^m f(x_0)}{m!h^m}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1}).$$

Завдання

Покласти $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ *і отримати іншу*

форму запису першої інтерполяційної формули Ньютона.

ДРУГА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Нехай, вузли інтерполяції $x_0, x_1, ..., x_m$ розташовані рівномірно: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, ..., x_m = x_0 + mh.$

Побудуємо інтерполяційний поліном у вигляді:

$$N_m(x) = a_0 + a_1(x - x_m) + a_2(x - x_m)(x - x_{m-1}) + ... + a_m(x - x_m)...(x - x_1)$$

Задача полягає в обчисленні значень $a_0, a_1, ..., a_m.$

Покладемо $x = x_m$, то $f(x_m) = N_m(x_m) = a_0$

Покладемо $x = x_{m-1}.$

$$f(x_{m-1}) = N_m(x_{m-1}) = a_0 + a_1(x_{m-1} - x_m).$$

Звідки $a_1 = \dfrac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{(x_m - x_{m-1})} = \dfrac{\Delta f(x_{m-1})}{h}.$

Для $x = x_{m-2}$ маємо:

$$f(x_{m-2}) = N_m(x_{m-2}) = a_0 + a_1(x_{m-2} - x_m) + a_2(x_{m-2} - x_m)(x_{m-2} - x_{m-1}).$$

$$a_2 = \frac{f(x_m) - 2f(x_{m-1}) + f(x_{m-2})}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_{m-2})}{2!h^2}.$$

Аналогічно, для $x = x_k$ маємо:

$$a_k = \frac{\Delta^k f(x_{m-k})}{k!h^k} (k = 1, 2 \ldots m).$$

Таким чином, маємо :

$$N_m(x) = f(x_m) + \frac{\Delta f(x_{m-1})}{h}(x - x_m) + \frac{\Delta^2 f(x_{m-2})}{2!h^2}(x - x_m)(x - x_{m-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 f(x_{m-3})}{3!h^3}(x - x_m)(x - x_{m-1})(x - x_{m-2}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^m f(x_0)}{m!h^m}(x - x_m)(x - x_{m-1})\ldots(x - x_1).$$

Завдання

Покласти $t = \dfrac{x - x_m}{h}$ *і отримати іншу форму запису другої інтерполяційної формули Ньютона.*

$$N_m(t) = f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-(m-1))}{m!}\Delta^m f(x_0).$$

$$N_m(t) = f(x_n) + t\Delta f(x_{m-1}) + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f(x_{m-2}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{m!}\Delta^m f(x_0).$$

ВИБІР ВУЗЛІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Похибки інтерполяційних формул дорівнюють добутку двох множників, з яких один, $f^{(m+1)}(\xi)$, залежить від властивостей функції і не піддається корегуванню, а величина $\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{m-1})(x - x_m)$ визначається виключно вибором вузлів інтерполяції.

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega_{m+1}(x).$$

Задача про раціональний вибір вузлів інтерполяції x_i (для заданого m) полягає у знаходженні найменшого максимального значення $\omega_{m+1}(x)$.

Вузли задаються:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i, \quad \xi_i = -\cos\frac{2i+1}{2m+2}\pi, \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \; i, j = 0,1,\ldots,n, \;\; i \neq j\,.$$

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}, \; i \neq j \neq k\,.$$

$$f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}) - f(x_j, \ldots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}.$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots.$$

x_0	$f(x_0)$			...	
		$f(x_0,x_1)$		...	
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$	...	
		$f(x_1,x_2)$		...	
x_2	$f(x_2)$			...	
…	…	…	…	...	$f(x_0,x_1,...,x_n)$
			$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$	...	
		$f(x_{n-1},x_n)$		...	
x_n	$f(x_n)$			...	

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (x-x_0)\dots(x-x_{j-1})\ f(x_0, x_1, \dots, x_j) =$$
$$= f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2) + \dots$$
$$\dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

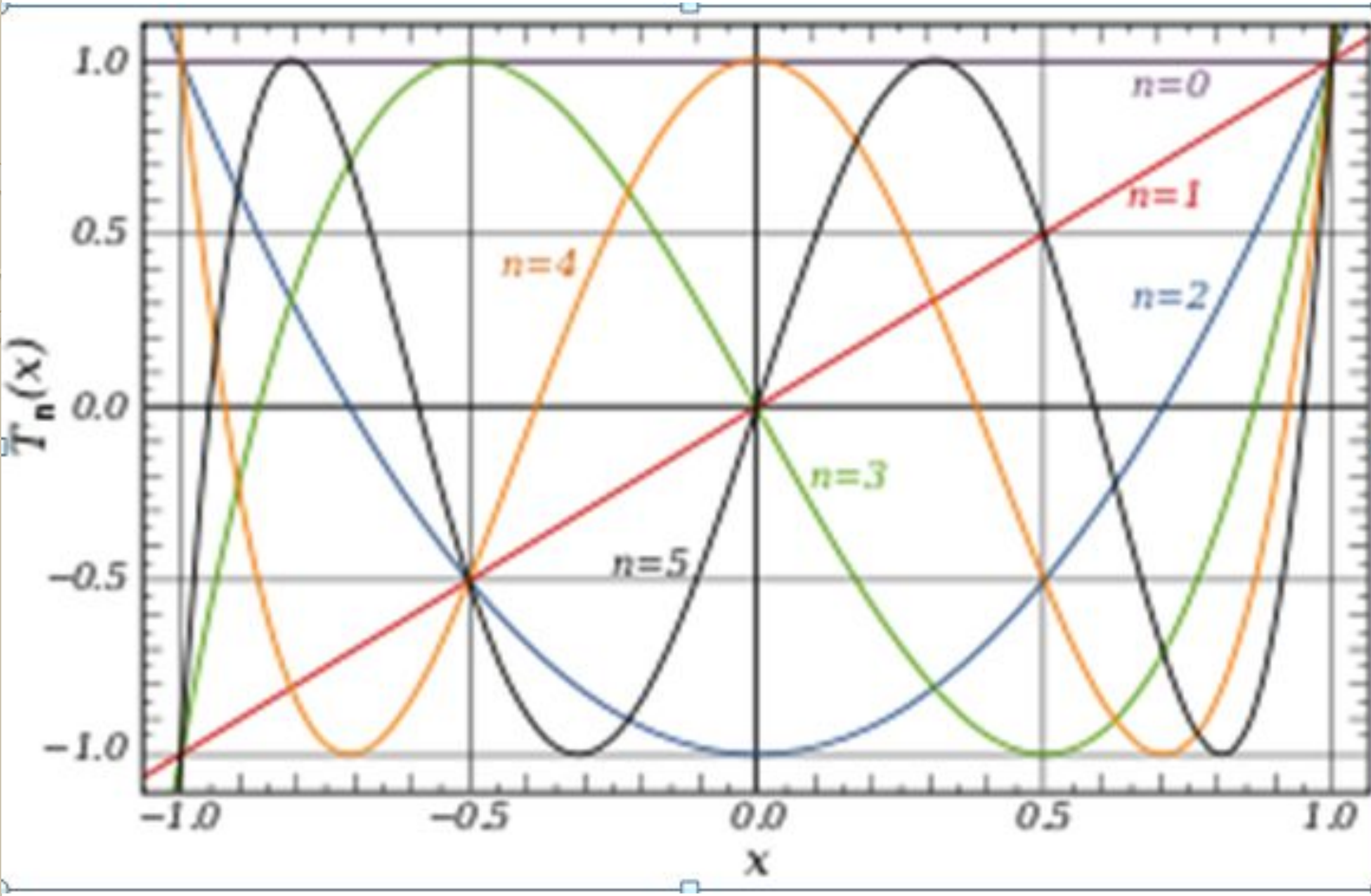
$$L_n(x) = f(x_n) + (x-x_n)f(x_n,x_{n-1}) + (x-x_n)(x-x_{n-1})f(x_n,x_{n-1},x_{n-2}) + \dots$$
$$\dots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)f(x_n,x_{n-1},\dots,x_1,x_0),$$

Поліноми Чебишева першого роду $T_n(x)$ можуть бути визначені за допомогою рекурсивних співвідношень (n>=2)

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.
\end{aligned}
$$



n=0
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
$T_n(x)$
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x

ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Збільшення кількості вузлів інтерполяції з метою зменшення похибки $f(x) - L_m(x)$ не завжди виправдане. Необхідно досліджувати збіжність інтерполяційного процесу. Для цього вводять систему сіток, а саме:

$$S^0 = \{x_0^0\},$$

$$S^1 = \{x_0^1, x_1^1\},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$S^m = \{x_0^m, x_1^m, \ldots, x_m^m\},$$

Теорема Фабера: За будь-якої послідовності сіток S^m знайдеться неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$, що послідовність інтерполяційних поліномів $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$, побудованих на послідовності сіток, не збігатиметься до $f(x)$.

Кусково-поліноміальна інтерполяція

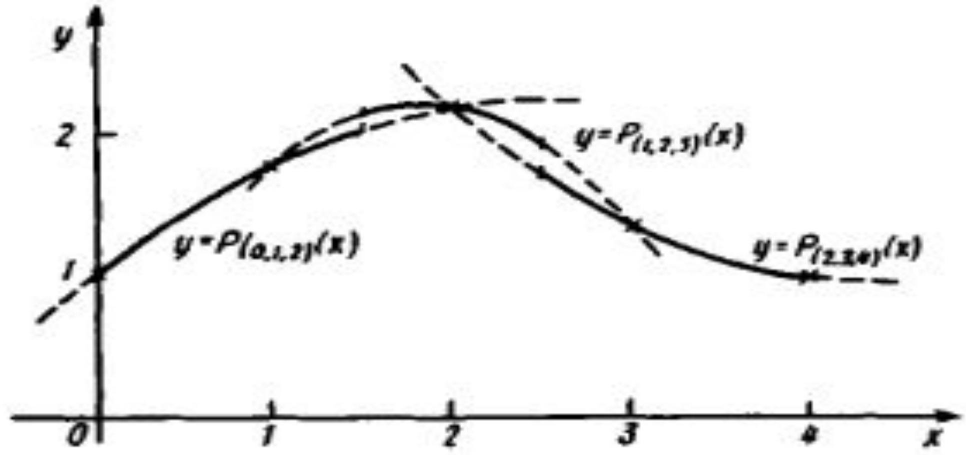
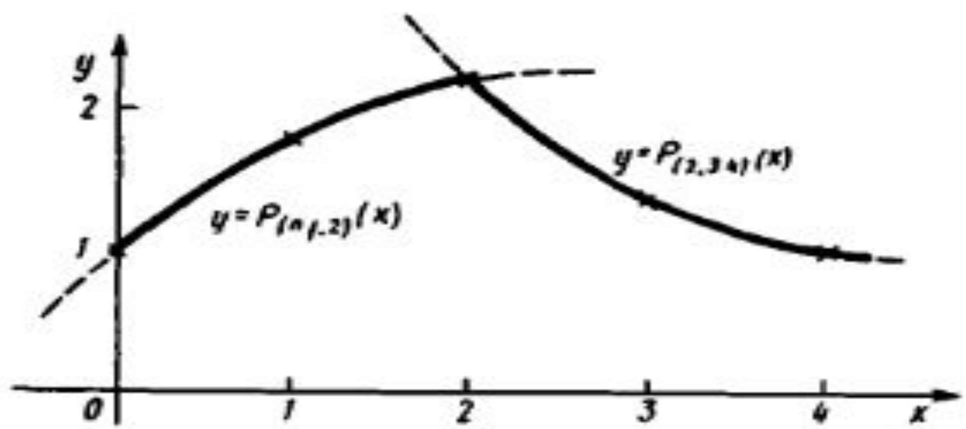


Рис. 11.6



СПЛАЙНИ

Поліном третього степеня називається кубічним сплайном $S(x)$, що відповідає функції $f(x)$ і заданий на сітці вузлів $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m \equiv b$, якщо задовольняються такі умови:

- на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}], i = 1, m-1$, функція $S(x)$, є поліномом третього степеня:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

- функція $S(x)$, а також її перша і друга похідні наперервні на відрізку $[a, b]$;
- у вузлах інтерполяції $S(x_i) = f(x_i), i = 1, m.$

Доведення існування кубічного сплайна і того, що такий сплайн тільки один, містить спосіб його побудови. Кількість невідомих коефіцієнтів – (4*m -4).*

СЛАР для обчислення коефіцієнтів сплайна:

$$S_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, m;$$

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = 2, m-1;$$

$$S''_1(x_1) = 0,$$

$$S''_m(x_m) = 0.$$

СЛАР з (*4m – 4*) рівнянь має (*4m – 4*) невідомих коефіцієнтів.

Дану СЛАР після перетворень можна звести до СЛАР з тридіагональною матрицею виду:

$$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}-\frac{h}{3}(c_{i+2}+2c_{i+1})=$$

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}-\frac{h}{3}(c_{i+1}+2c_i)+2c_ih+c_{i+1}-c_i, \quad i=1,m-1;$$

де $c_1=0,\ c_m=-3d_mh,$

$$a_i=f(x_i), \quad d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h},$$

$$b_i=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}-\frac{h}{3}(c_{i+2}+2c_{i+1}),$$

Теорема. Нехай функція $f(x) \in C^4[a,b]$. Тоді для кубічного сплайну $S(x)$, побудованого на системі вузлів

$a = x_1 < x_2 < ... < x_m = b,$ справедливі нерівності:

$$\max_{[a,b]} | f(x) - S(x) | \le M_4 h^4,$$

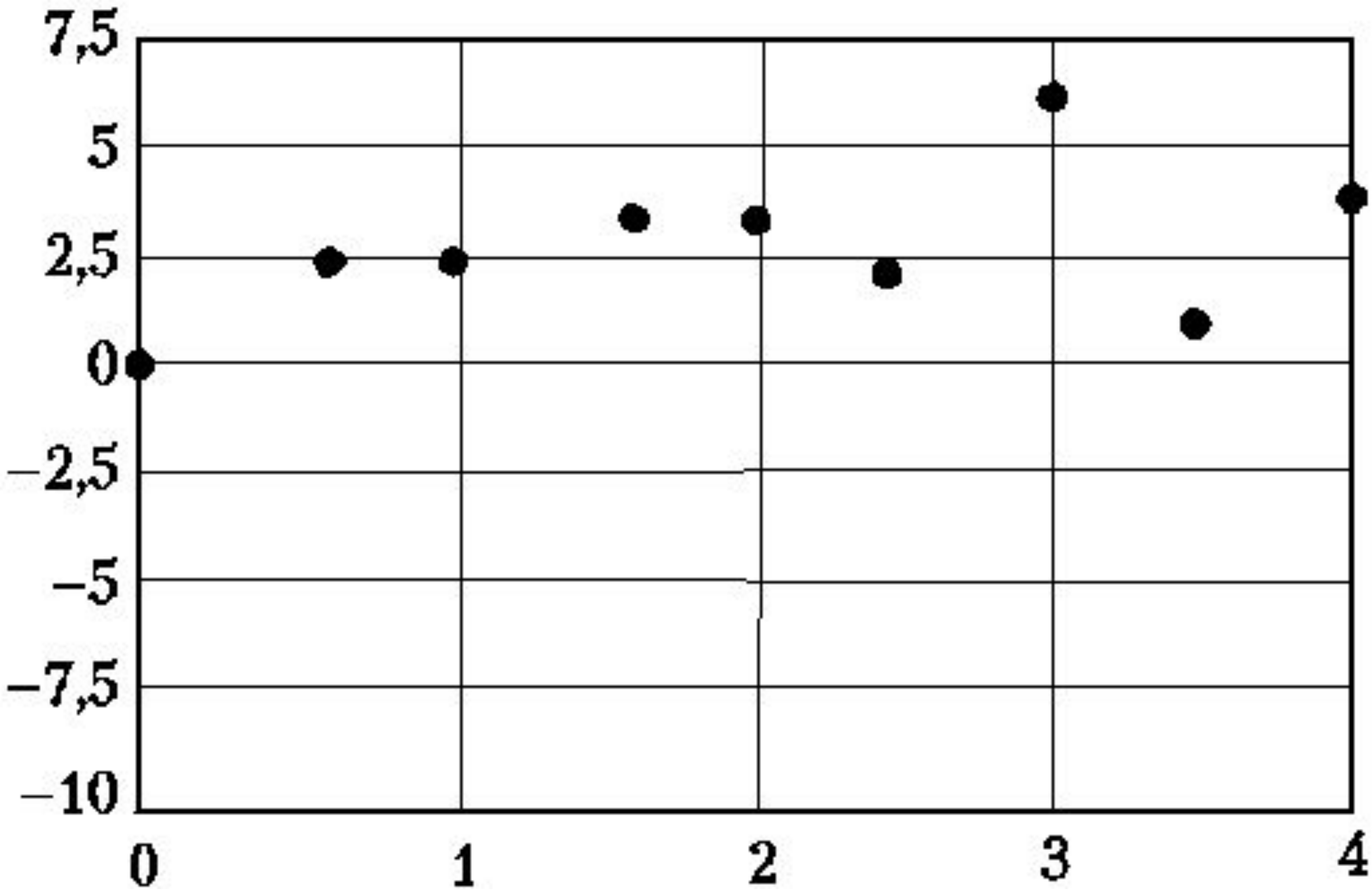
$$\max_{[a,b]} | f'(x) - S'(x) | \le M_4 h^3,$$

$$\max_{[a,b]} | f''(x) - S''(x) | \le M_4 h^2,$$

де

$$M_4 = \max_{[a,b]} | f^{(4)}(x)|, \;\; h == \max_{m} (x_{m+1} - x_m | .$$

Звідси випливає, що при $h \to 0$ послідовність функцій $S^{(k)}(x)$, $k=0,1,2$ (кубічний сплайн та його перші дві похідні) збігається до $f^{(k)}(x)$, відповідно.



7,5
5
2,5
0
–2,5
–5
–7,5
–10
0
1
2
3
4

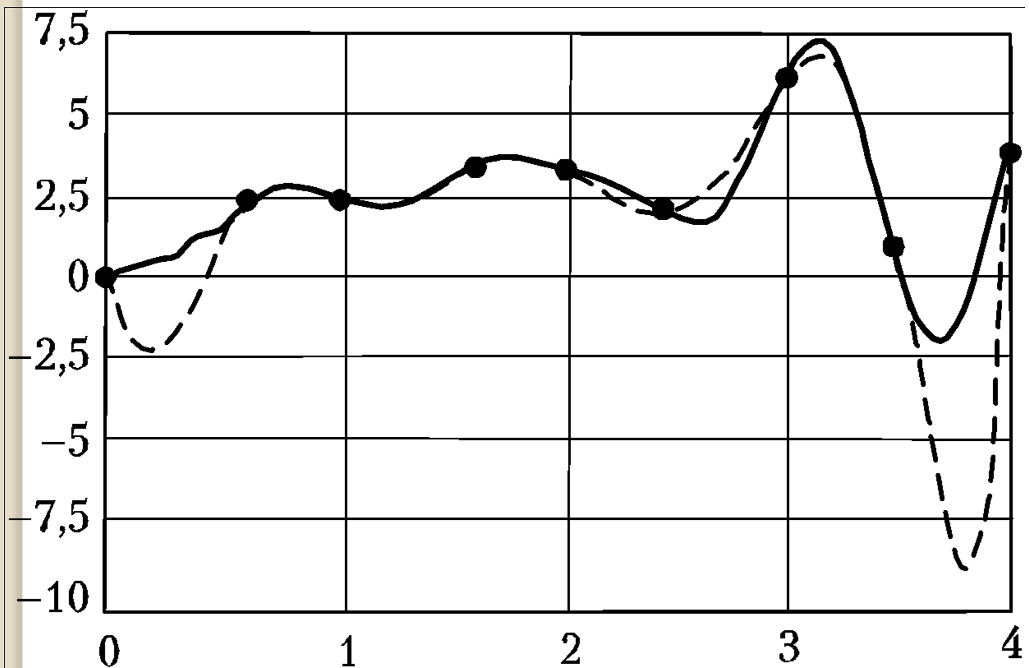
$\{x_i, f(x_i)\} = \{(0,\ 0),\ (0.5, 2),\ (1., \ 2.25),\ (1.5, 3),\ (2, 3.25),$
$(2.5, 3),\ (3,\ 6),\ (3.5, 0.75),\ (4,\ 3.75)\};$

{a[1]= 2, a[2] = 2.25, a[3] = 3,
a[4] = 3.25, a[5] =3, a[6] =6,
a[7] = 0.75, a[8] = 3.75,

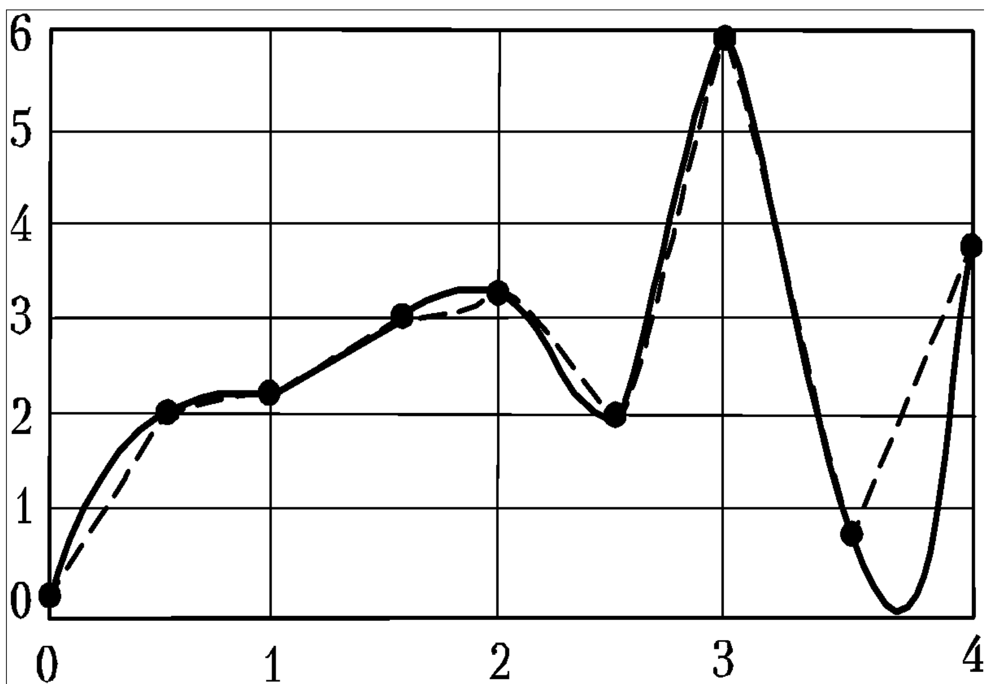
{b[1]= 2.45238, b[2] = 5.54762, b[3] = –3,
b[4] = 4.04762, b[5] = –2.45238,b[6] =4.90476,
b[7] = 16.1429, b[8] = 33.7619,

c[1] = 2.28719×10^{-17}, c[2] = 6.19048,
c[3]= –7.80952, c[4] = 2.38095, c[5]= –9.42857,
c[6]= –19.0476, c[7]=13.5238, c[8]= –79.5238,

d[1]= 3.09524, d[2]= –13.1905, d[3]=12.9048,
d[4]= –8.28571, d[5]= 4.61905, d[6]= 35.3333,
d[7]= –60.0476, d[8]= 119.286



Результати інтерполяції функції поліномом Лагранжа (пунктирна лінія) і кубічним сплайном (суцільна лінія)



Результати інтерполяції функції лінійним сплайном (пунктирна лінія) і кубічним сплайном (суцільна лінія)

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Міра відхилення заданих значень від обраної функції у заданих $m+1$ точках $(x_i,\ f(x_i)),\ i = 0, 1, 2, ..., m$:

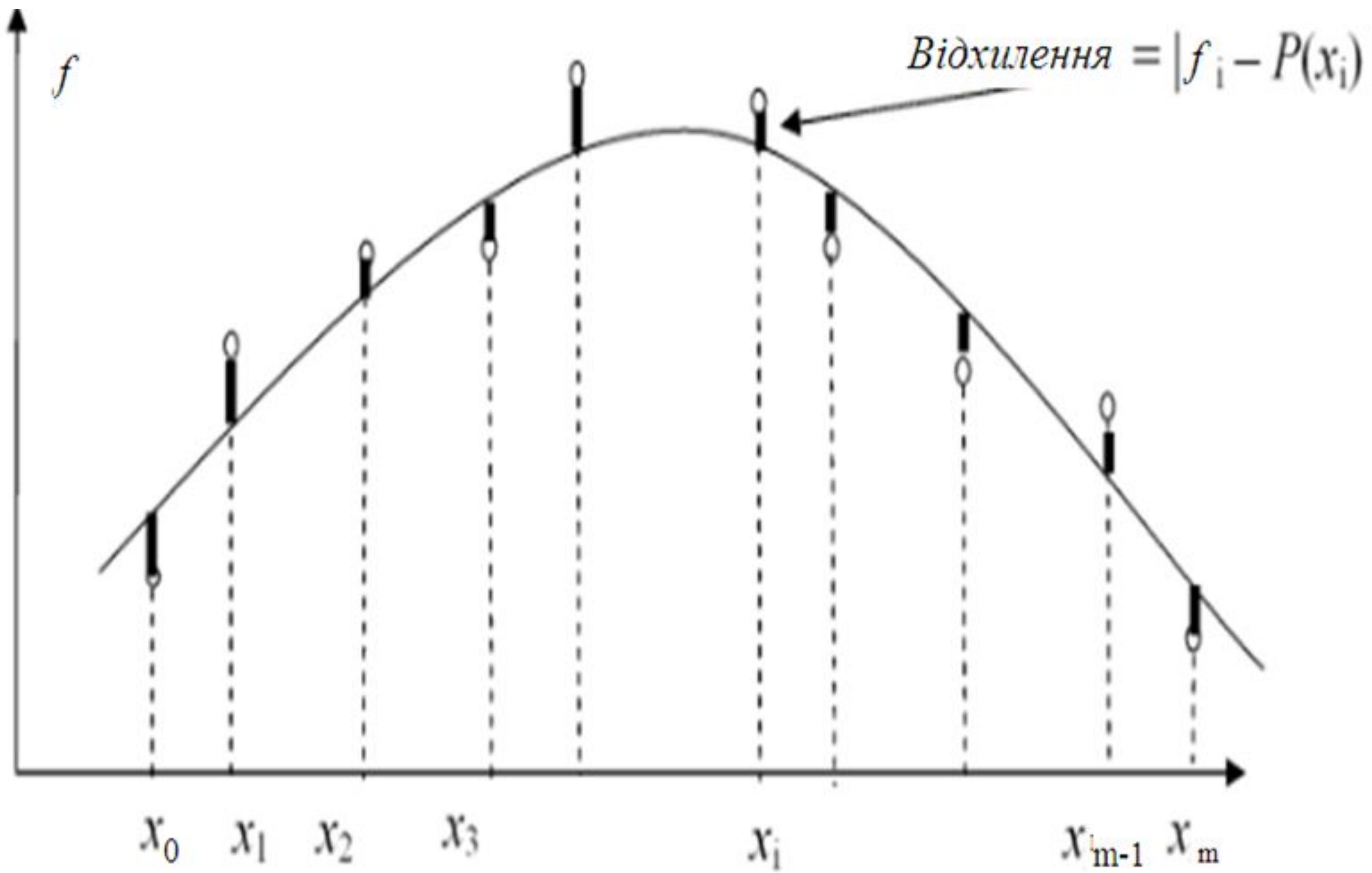
$$I = \sum_{i=0}^{m} (f(x_i) - P_k(x_i))^2 \to \min.$$

повинна бути мінімальною.

Задамо

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k, \quad k < m,$$

$$I = \sum_{i=0}^{m} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_k x_i^k - f(x_i)]^2 \to \min.$$


Відхилення $= |f_i - P(x_i)|$
f
x_0
x_1
x_2
x_3
x_i
x_{m-1}
x_m

Необхідно, щоб для всіх коефіцієнтів виконувалась умова:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, i = 0, m.$$

Почнемо з a_0

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{m}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i{}^2 + ... + a_k x_i{}^k - f(x_i)]1 = 0.$$

Далі продовжимо для всіх a_i

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{m}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i{}^2 + ... + a_k x_i{}^k - f(x_i)]\, x^j{}_i = 0,$$

$$j = 1, k.$$

У результаті отримуємо СЛАР виду:

$$\begin{bmatrix} k+1 & \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x^2{}_i & \ldots & \sum_{i=0}^{m} x^k{}_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i & \sum_{i=0}^{m} x^2{}_i & \sum_{i=0}^{m} x^3{}_i & \ldots & \sum_{i=0}^{m} x^{k+1}{}_i \\ \sum_{i=0}^{m} x^2{}_i & \sum_{i=0}^{m} x^3{}_i & \sum_{i=0}^{m} x^4{}_i & \ldots & \sum_{i=0}^{m} x^{k+2}{}_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=0}^{m} x^k{}_i & \sum_{i=0}^{m} x^{k+1}{}_i & \sum_{i=0}^{m} x^{k+2}{}_i & \ldots & \sum_{i=0}^{m} x^{2k}{}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)x_i \\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)x^2{}_i \\ \ldots \\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)x^k{}_i \end{bmatrix}.$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x,$$

$$(n+1)a_0 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i\right] a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$\left[\sum_{i=0}^{n} x_i\right] a_0 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right] a_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i.$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

$$(n+1)a_0 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i\right] a_1 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right] a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$\left[\sum_{i=0}^{n} x_i\right] a_0 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right] a_1 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right] a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i,$$

$$\left[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right] a_0 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right] a_1 + \left[\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right] a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2.$$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y	0.21	0.23	0.31	0.29	0.42	0.35	0.58	0.61	0.59	0.66

$$\sum_{i=0}^{9} x_i = 4.5,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^2 = 2.85,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^3 = 2.025,\ \sum_{i=0}^{9} x_i^4 = 1.5333,\ \sum_{i=0}^{9} y_i = 4.25,$$

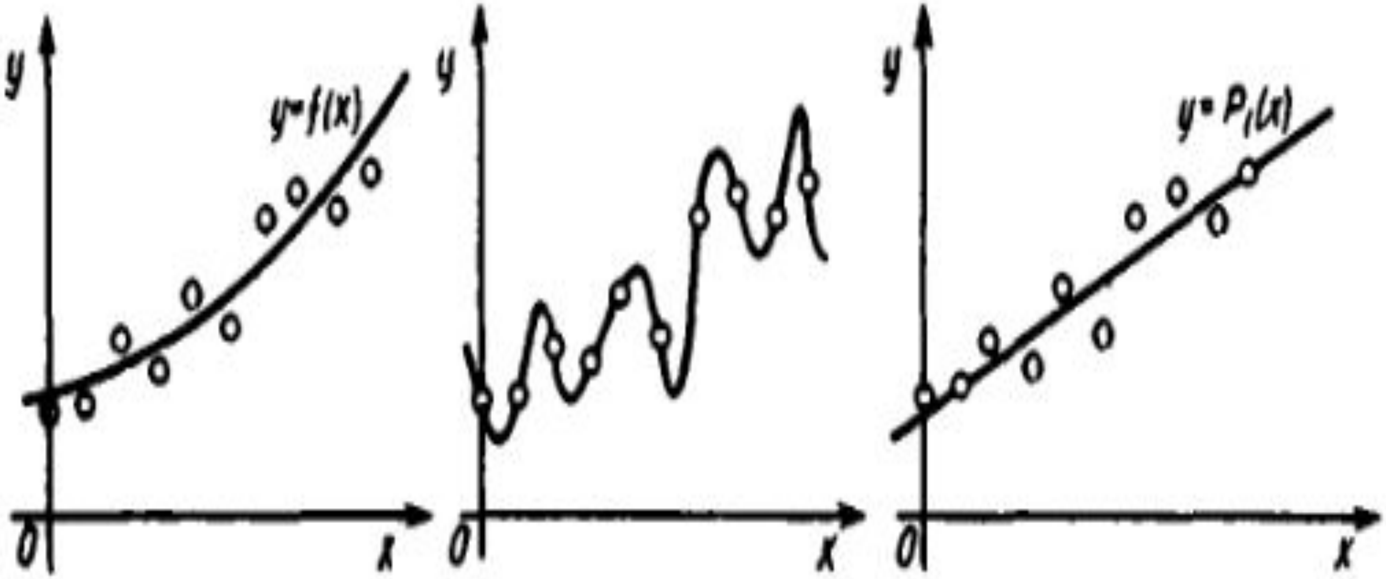
$$\sum_{i=0}^{9} y_i x_i = 2.356,\ \sum_{i=0}^{9} y_i x_i^2 = 1.6154.$$

$$\begin{aligned} 10a_0 + 4.5a_1 &= 4.25, \\ 4.5a_0 + 2.85a_1 &= 2.356. \end{aligned}$$

$$f(x) \approx 0.183 + 0.536x.$$

$$\begin{aligned} 10a_0 + 4.5a_1 + 2.85a_2 &= 4.25, \\ 4.5a_0 + 2.85a_1 + 2.025a_2 &= 2.356, \\ 2.85a_0 + 2.025a_1 + 1.5333a_2 &= 1.6154, \end{aligned}$$

$$a_0 \approx 0.194,\ a_1 \approx 0.452,\ a_2 \approx 0.0947$$



а) б) в)

$$y=\sqrt{x}, \quad x\in[0,1]. \qquad P=ax+b,$$

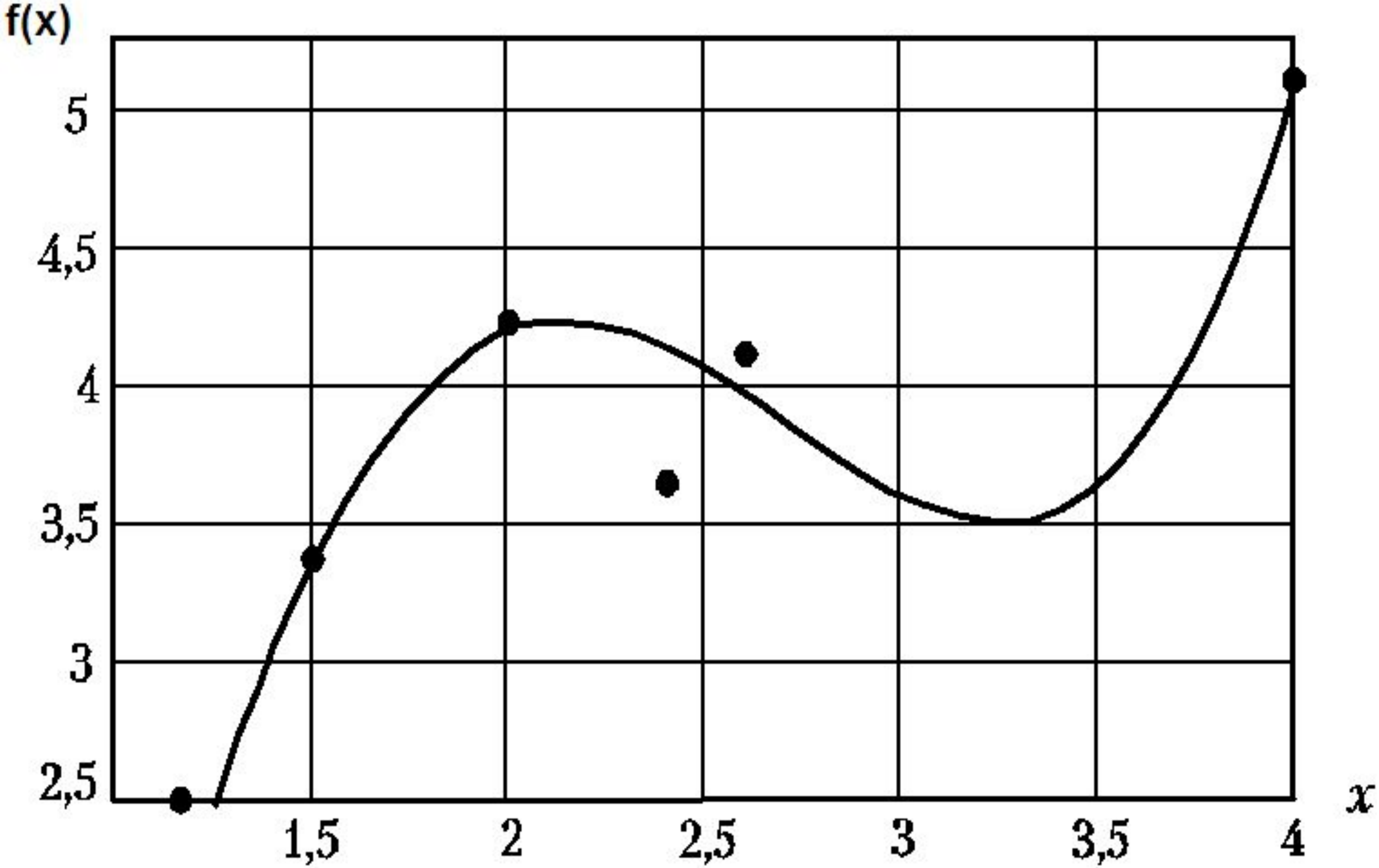
$$\varphi(a,b)=\int_0^1\left(\sqrt{x}-ax-b\right)^2dx.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-2\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-ax-b\right)dx=0,$$

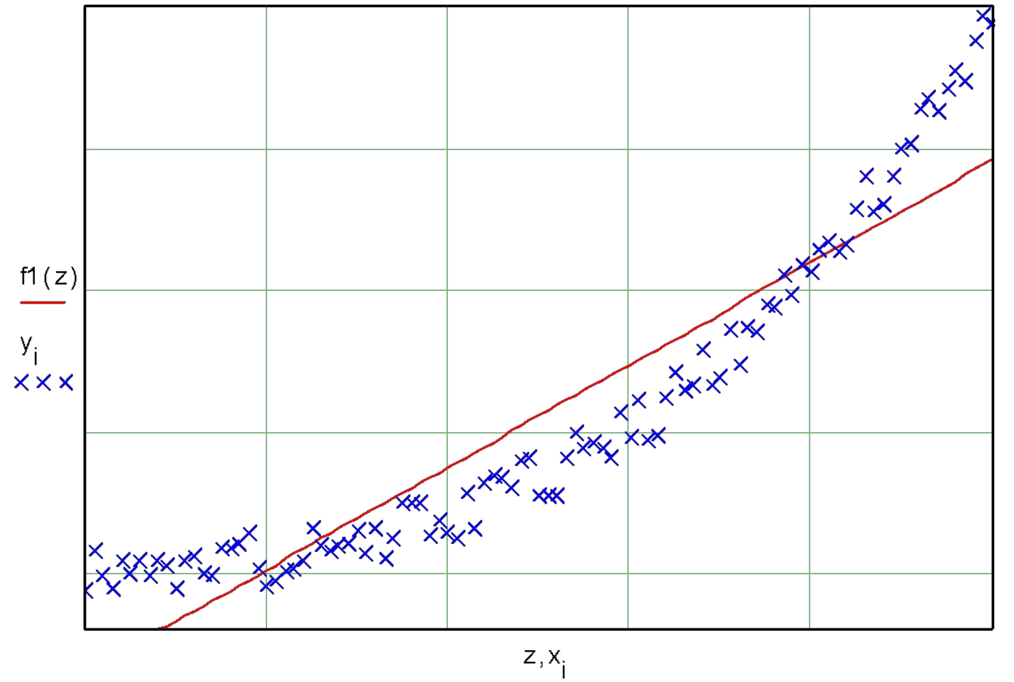
$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}=-2\int_0^1\left(\sqrt{x}-ax-b\right)dx=0.$$

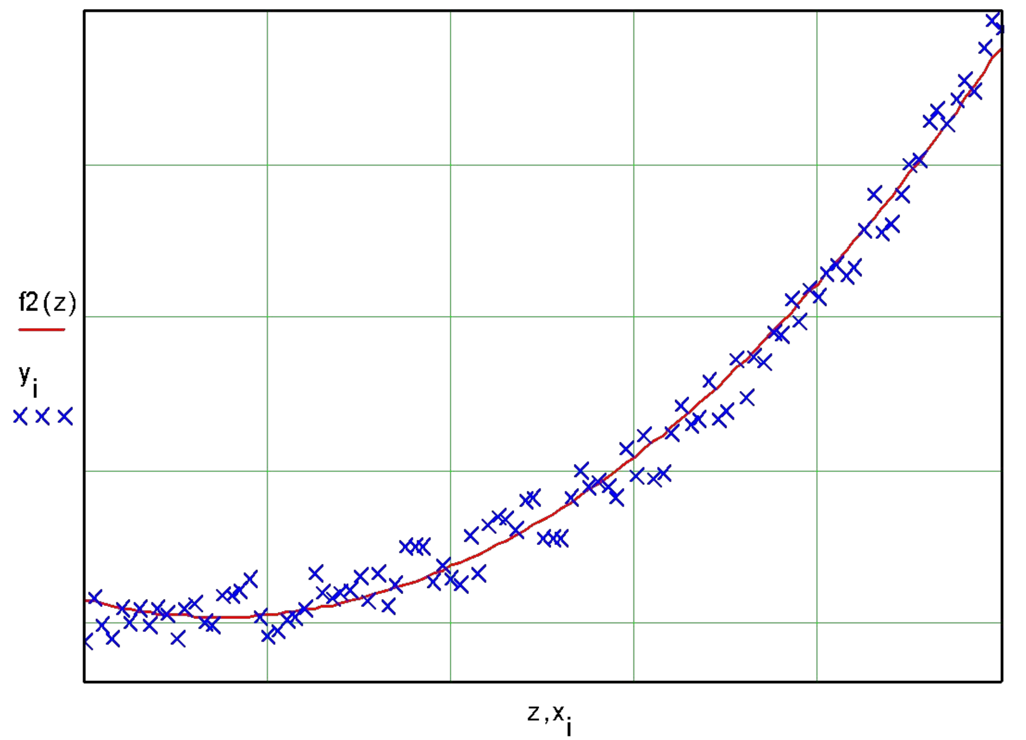
$$a=0.8, \qquad b=\frac{4}{15}.$$

$$P_1(x)=0.8x+\frac{4}{15}$$



$f(x) = -35.417 + 59.0875\,x - 28.1038\,x^2 + 4.11221\,x^3$


f1(z)
y_i
z, x_i


f2(z)
y_i
z, x_i