Лекция 2-18.
13.3.2. Свойства степенных рядов.

- Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (*)$$

имеющий радиус сходимости R $(R \le \infty)$. Сумма ряда $S(x)$ есть функция определенная внутри интервала сходимости, а также на тех концах интервала, где ряд сходится.

Лемма 1.

- Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке

$$\left[-b,b\right]\subset\left(-R,R\right).$$

- **Доказательство.** Выберем $x_0 : b < x_0 < R.$

  По теореме Абеля ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$ сходится.

  $\forall x \in \left[-b,b\right]$ имеем $x < x_0 \Rightarrow \left|a_n x^n\right| < \left|a_n x_0^n\right|.$

Последнее неравенство означает, что ряд (*) равномерно сходится в $\left[-b,b\right].$

Лемма 2.

- Степенной ряд, составленный из производных ряда (*) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (*).

- **Доказательство.** Допустим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

  Тогда $R_* = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Ряд производных имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \qquad (**)$$

$$R_{**} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

- Если составить ряд из производных ряда (**), то у него тоже радиус сходимости равен R.
- Т. е. все степенные ряды, полученные последовательным дифференцированием ряда (*) имеют одинаковый радиус сходимости и равномерно сходятся в любом интервале, принадлежащим области сходимости.

Свойства степенных рядов.

- 1) Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.
- **Пример.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x).$ Функция $S(x)$ непрерывна всюду, за исключением точки $x = 1.$ Но она является суммой ряда только при $|x| < 1.$
- 2) Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости $\int_a^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$
- 3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в интервале сходимости.

13.4. Разложение функций в степенные ряды.
13.4.1 Ряд Тейлора.

- Сумма степенного ряда непрерывна и бесконечное число раз дифференцируема в интервале сходимости. Рассмотрим обратный вопрос. Когда можно утверждать, что функция $f(x)$ является суммой некоторого ряда?

- Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, где a_n - коэффициенты,

которые нужно определить.

$$f(x_0)=a_0, \qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad f'(x_0)=1!a_1, \dots..,$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\dots, \qquad f^{(n)}(x_0)=n!a_n.$$

- Тогда $a_0=f(x_0),\ a_1=f'(x_0),\dots,a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\dots$

- Следовательно $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$ (**)

Определение.

- Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд (**) относительно разности $(x-x_0)$, коэффициенты которого a_n выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0.
- $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ - коэффициенты Тейлора функции $f(x)$

в точке x_0.

13.4.2. Условие разложимости функций в ряд Тейлора.

- При каких условиях ряд Тейлора для функции $f(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходится и его сумма равна $f(x)$?
- Обозначим $T_n(x)$- многочлен n -й степени (частичная сумма ряда Тейлора)

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

- Остаточный член ряда $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$. Сходимость ряда к функции $f(x)$ означает, что $\lim_{n\to\infty}T_n(x)=f(x)$ или $\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-T_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

- $R_n(x)$ - ошибка аппроксимации функции $f(x)$ многочленом $T_n(x)$.
- Пусть $f(x)$ - многочлен n -й степени. Продифференцируем n раз. Последующие производные равны нулю. Получим формулу Тейлора для многочленов

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Пример.

- Разложить функцию $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ по степеням $(x-1)$ $x_0 = 1$.

$$f(1) = -1,\ f'(1) = \left(1 - 2x + 6x^2\right)\Big|_{x=1} = 5,\ f''(1) = \left(-2 + 12x\right)\Big|_{x=1} = 10,$$

$$f'''(1) = 12.$$

$$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

13.4.3. Остаточный член ряда Тейлора. Формула Тейлора.

- Запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

- Докажем теорему о структуре $R_n(x)$, которая позволит устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при $n\to\infty$, т. е. разлагается $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Теорема.

- Если $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0 , имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для всякой точки, принадлежащей интервалу, остаточный член равен

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

- где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство.

- Запишем остаточный член в виде $R_n(x) = D_{n+1}\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.
- Найдем D_{n+1} такое, чтобы для всякого x, принадлежащего интервалу, выполнялось

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+D_{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Зафиксируем $x = x_1$.
- Тогда $D_{n+1} = \dfrac{f(x_1) - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k}{\dfrac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$.

Докажем, что это выражение равно $f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$

При $n = 0$ из теоремы Лагранжа

$$D_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

- Для других n построим вспомогательную функцию $F(x)$, удовлетворяющую теореме Ролля. Пусть

$$F(x) = f(x_1) - f(x) - f'(x)(x_1 - x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n +$$

$$+D_{n+1}\frac{(x_1 - x)^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad F(x_1) = 0.$$

- При $x = x_0$ заменив D_{n+1} его значением, получим $F(x_0) = 0.$
- Найдем $F'(x)$.

$$F'(x) = -f'(x) - f''(x)(x_1 - x) + f'(x) -$$

$$-\frac{f'''(x)}{2!}(x_1 - x)^2 + f''(x)(x_1 - x) - \ldots -$$

$$\underline{-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_1 - x)^{n-1} + \underline{D_{n+1}\frac{(x_1 - x)^n}{n!}}.$$

- Только подчеркнутые члены не сокращаются.
- Производная $F'(x)$. существует во всех точках интервала. Вынося общий множитель за скобки, получим

$$F'(x)=\frac{(x_1-x)^n}{n!}\left[-f^{(n+1)}(x)+D_{n+1}\right].$$

- Подставим вместо x значение ξ при котором

$$F'(\xi)=\frac{(x_1-\xi)^n}{n!}\left[-f^{(n+1`)}(\xi)+D_{n+1}\right]=0.$$

- Тогда $D_{n+1}=f^{(n+1)}(\xi),$ т. е.

$$R_n(x_1)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ \xi\in(x_0,x_1).$$

- Т. к. x_1 - любая точка интервала, то теорема доказана.

Формула Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

- При выводе формулы предполагалось, что $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-й, где n какое-то число. Другие производные нас не интересовали.

Частные случаи

- 1) $n=0 \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$

  Это формула Лагранжа.

- 2) $n=1 \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

  или $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$

  Это линейная аппроксимация.

- Т. к. ξ - неизвестна, то $R_n(x)$ нужно только оценить.

Пусть в интервале, где формула Тейлора справедлива,

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_{n+1}.$$

Тогда для всякого x принадлежащего интервалу

$$\left|R_n(x)\right| < M_{n+1}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Доказательство.

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{\left(x-x_0\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\left|x-x_0\right|^{n+1} < M_{n+1}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$