Лекция 7

Устойчивость и точность систем управления

Линейная система называется **устойчивой**, если при выведении ее внешними воздействиями из состояния равновесия (покоя) она возвращается в него после прекращения внешних воздействий.

Если после прекращения внешнего воздействия система не возвращается к состоянию равновесия, то она является **неустойчивой**.

1. Анализ устойчивости с помощью алгебраических критериев

Устойчивость системы связана с характером ее собственных колебаний.

Чтобы пояснить это, предположим, что система описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x.$$

или, после преобразования Лапласа,

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m) x(p).$$

где $x(p)$ – входное воздействие.

Устойчивая система возвращается в состояние покоя, если входное воздействие $x(p) \equiv 0$.

Таким образом, для устойчивой системы решение однородного дифференциального уравнения

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) y(p) = 0$$

должно стремиться *к нулю* при t стремящемся к *бесконечности*.

Если найдены корни p_1 , p_2 , ... , p_n *характеристического* уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

то решение однородного уравнения запишется в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, e^{p_k t}$$

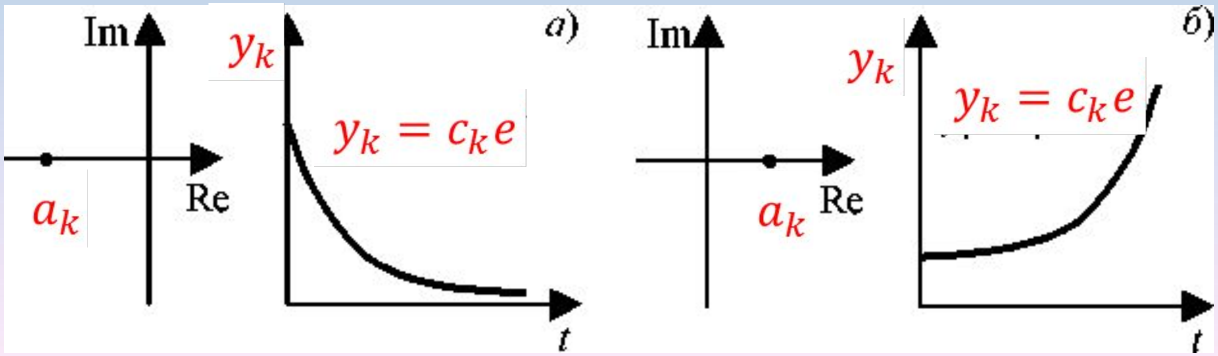
В каких же случаях система устойчива? Предположим, что $p_k = a_k$ – действительный корень.

Ему соответствует слагаемое $c_k e^{p_k t}$.

При $a_k < 0$ это слагаемое будет стремиться *к нулю*, если t стремится к *бесконечности*.

Если же $a_k > 0$, то $y(t) \to \infty$, когда t стремится к бесконечности.

Наконец, в том случае, когда $a_k = 0$, рассматриваемое слагаемое не изменяется и при t стремящемся к бесконечности, $y_k(t) = c_k$.



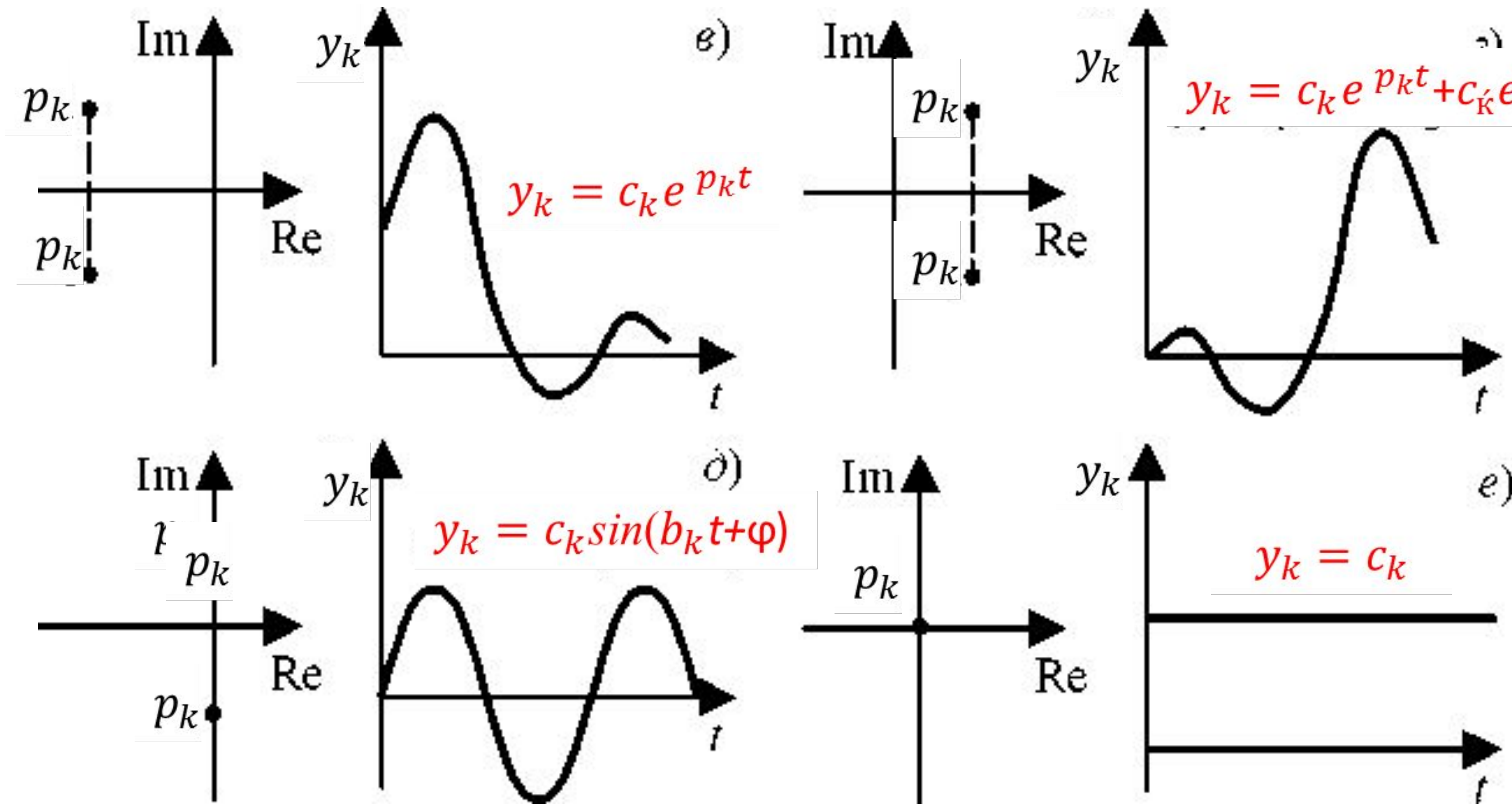
Допустим теперь, что $p_k = a_k + jb_k$ – комплексный корень характеристического уравнения.

Заметим, что в этом случае $\acute{p}_k = a_k - jb_k$ также будет корнем характеристического уравнения.

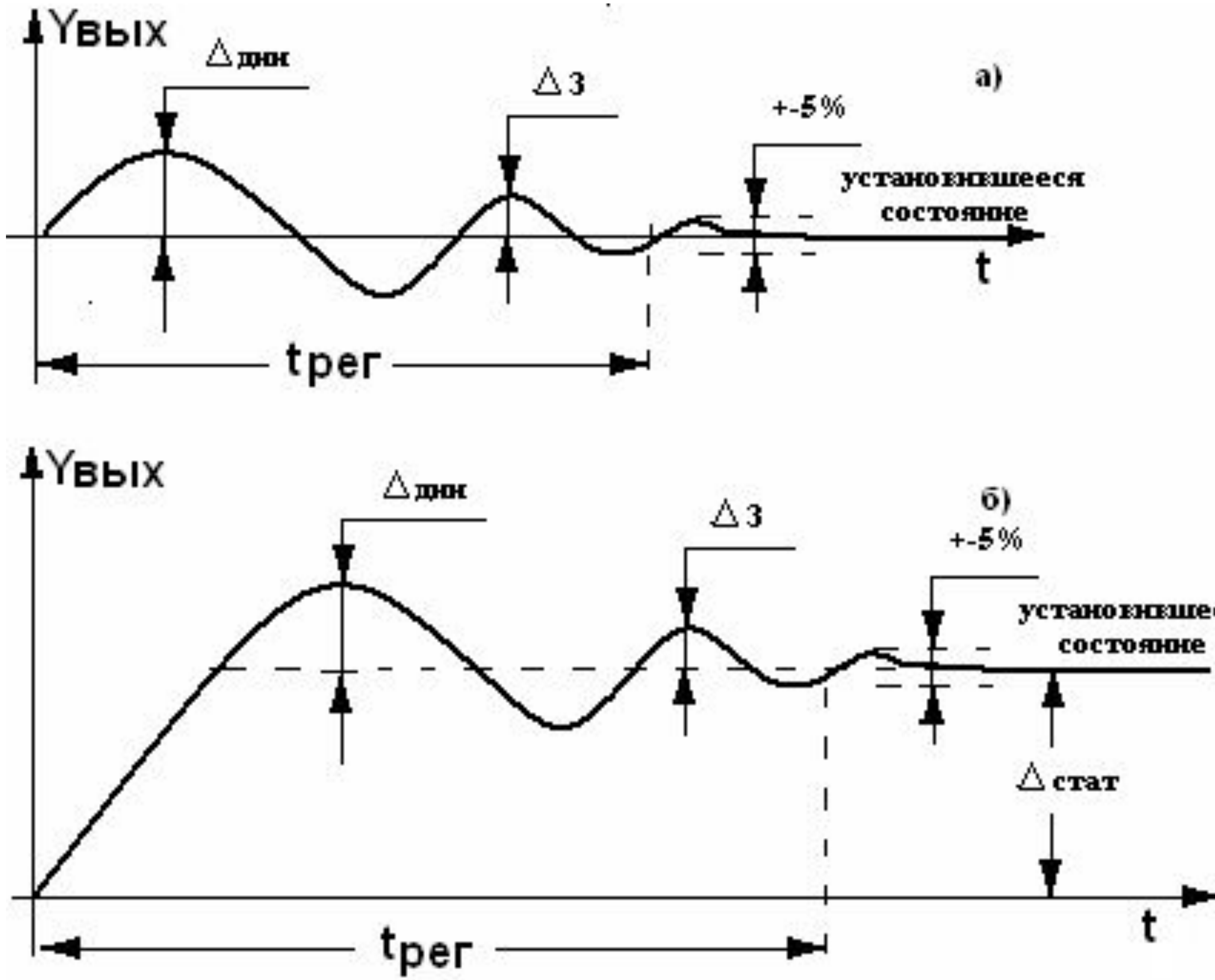
$$y_k = c_k e^{p_k t} + c_{\acute{k}} e^{\acute{p}_k t} = Ce^{a_k t} \sin(b_k t + \varphi)$$

При этом, если $a_k < 0$, то в системе имеются затухающие колебания. При $a_k > 0$ – колебания возрастающей амплитуды, а при $a_k = 0$ - колебания постоянной амплитуды c_k.

Таким образом, система *устойчива,* если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.


в)
Im
Re
p_k
p_k
y_k
$y_k = c_k e^{p_k t}$
t
г)
Im
Re
p_k
p_k
y_k
$y_k = c_k e^{p_k t} + c_{\acute{k}} e^{\acute{p}_k t}$
t
д)
Im
Re
p_k
p_k
y_k
$y_k = c_k sin(b_k t + φ)$
t
е)
Im
Re
p_k
y_k
$y_k = c_k$
t

2. Оценка точности управления

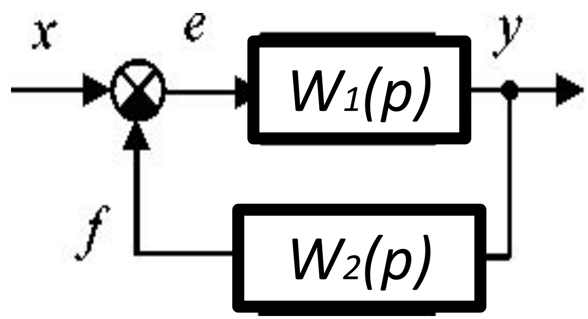


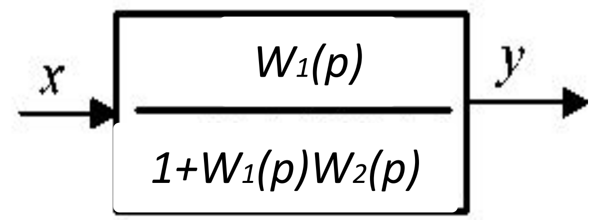
Точность - статическая ошибка определится непосредственно через уравнение ПФ. Для установившегося режима производные дифференциаль-ного уравнения обращаются в нуль, поэтому приравняв нулю в определённом уравнении опе-ратор Лапласа ($p = 0$), получим выражение для статической ошибки. Если $e\ (\infty) = 0$, то САР является *астатической*, если $e\ (\infty) \neq 0$, то – *статической*.

$e = x - f,$

$f = W_2(p) \cdot y,$

$y = W_1(p) \cdot e,$





$$e = x - W_2(p) \cdot W_1(p) \cdot e,$$

$$e = \frac{1}{1 - W_2(p) \cdot W_1(p)} x.$$

$$e\ (\infty) = \lim_{t \to \infty} E\ (t).$$