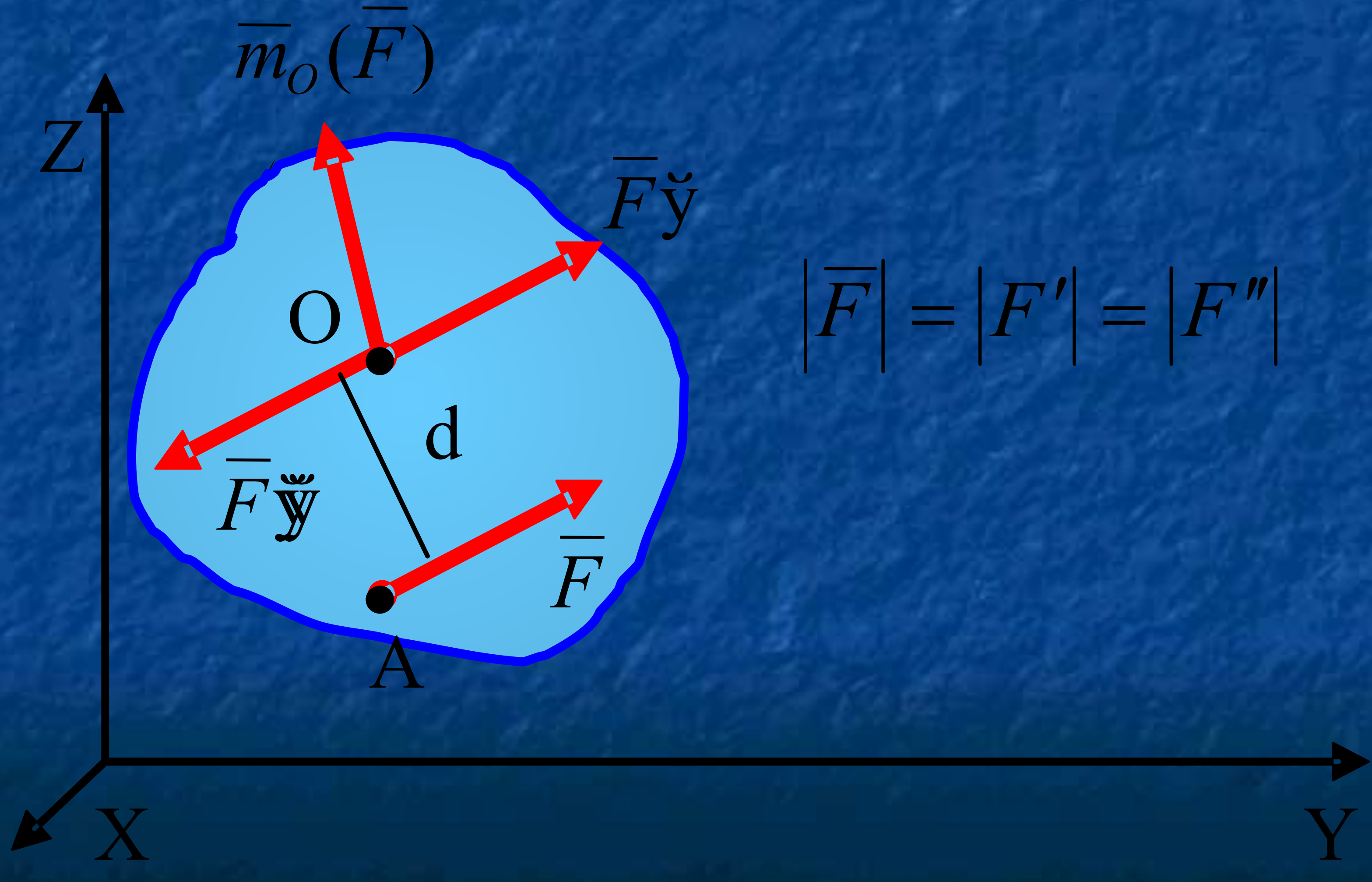
Приведение системы сил к заданному центру

Теорема Пуансо

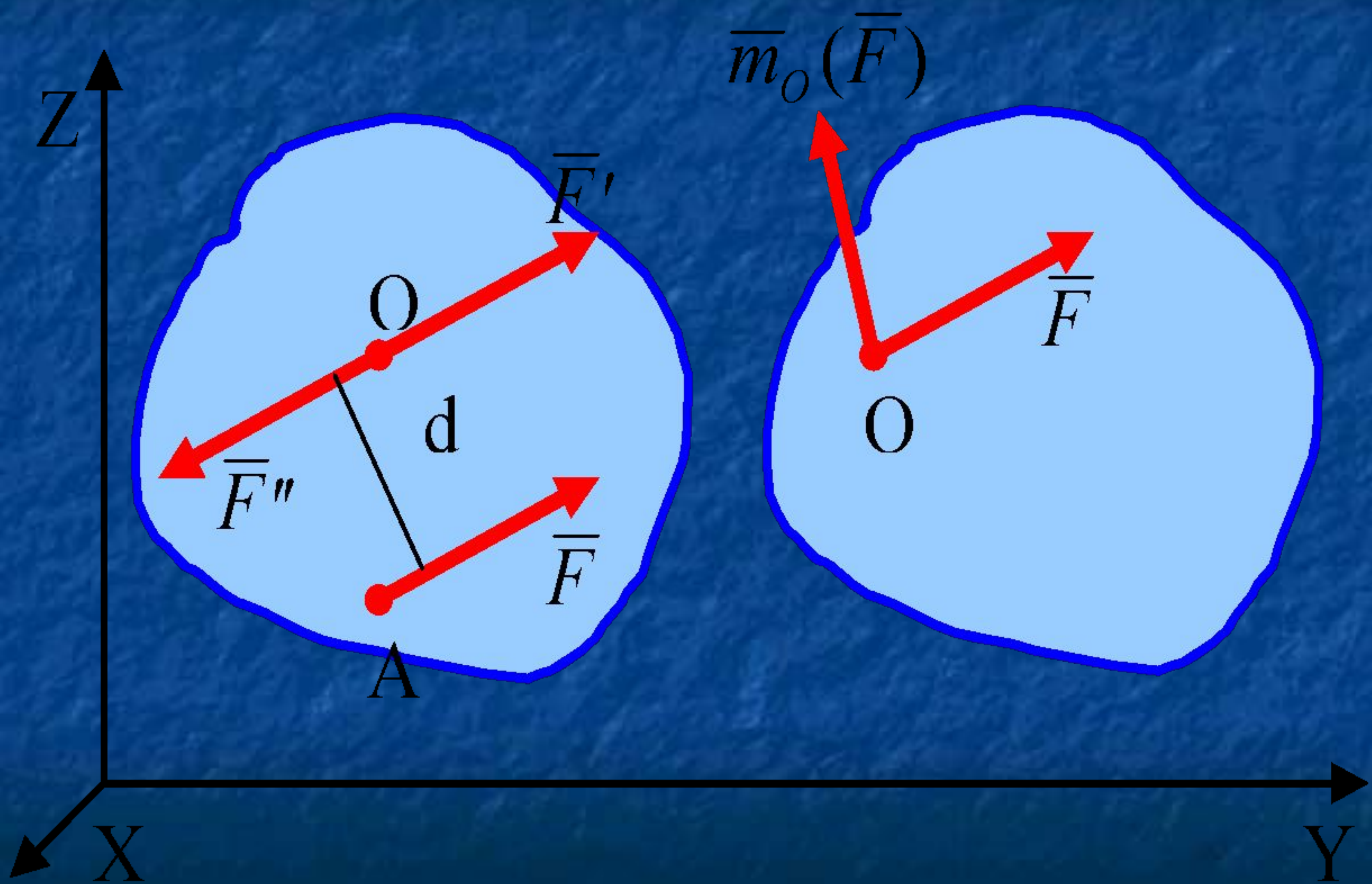
Теорема1 - О параллельном переносе силы (лемма Пуансо):

- силу $\overline{F}$, не изменяя ее действия на абсолютно твердое тело, можно переносить из данной точки *A* в любую другую точку *O* тела, прибавляя при этом пару с моментом $\overline{m}$ равным моменту переносимой силы относительно точки *O*, в которую переносится сила $\overline{F}$.

Доказательство



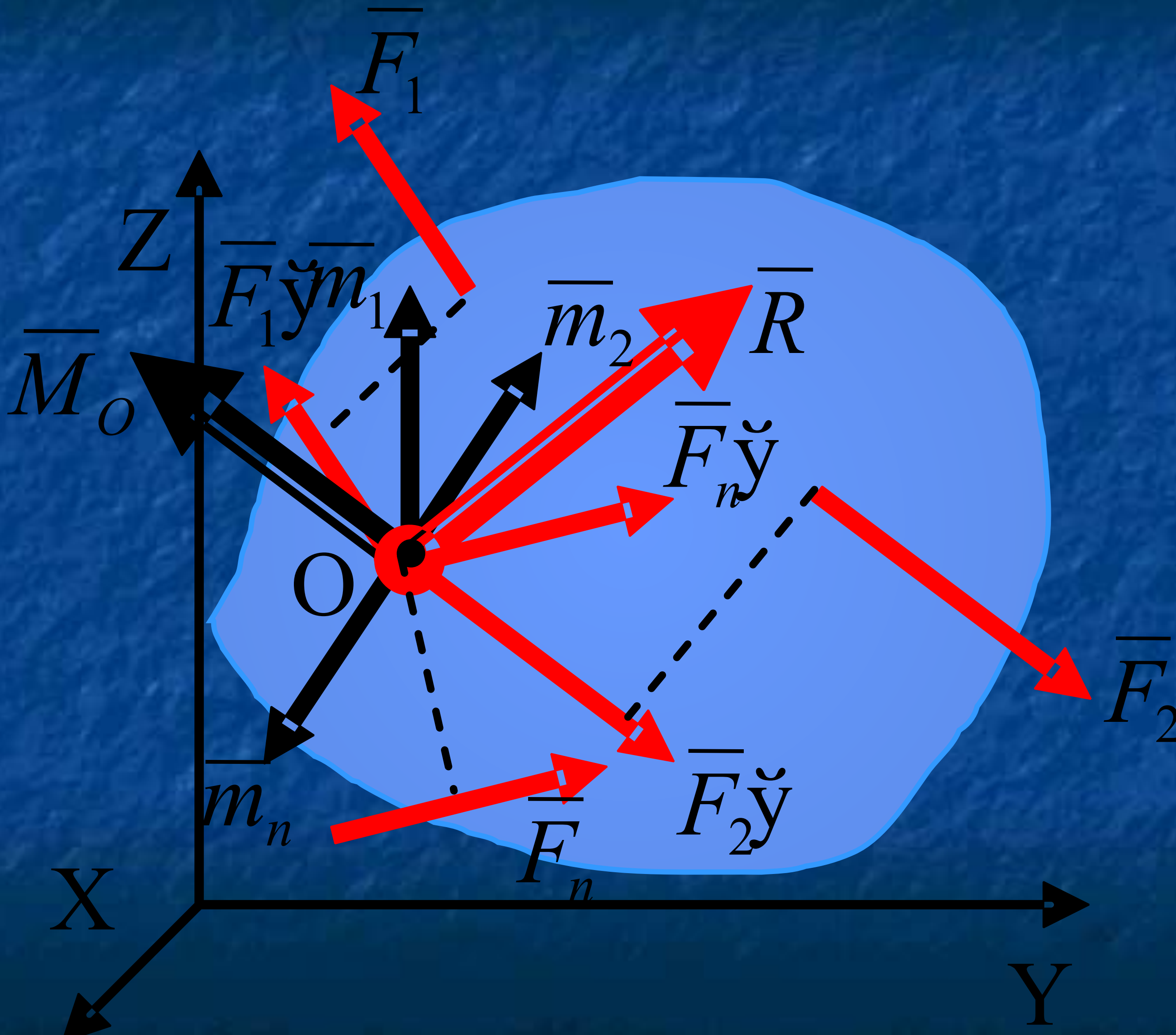
$$\left|\overline{F}\right| = \left|F'\right| = \left|F''\right|$$

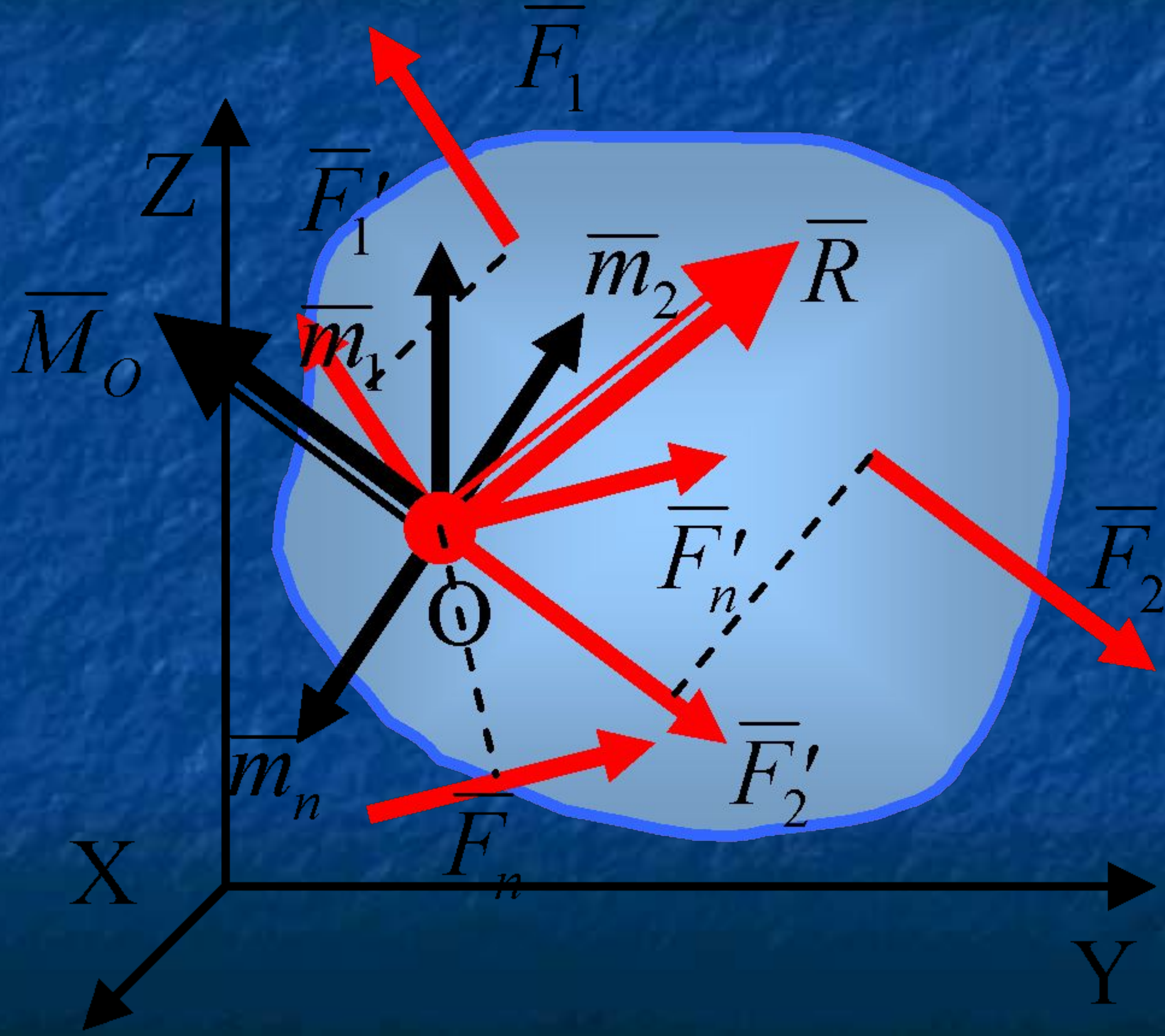

Z
$\overline{m}_O(\overline{F})$
$\overline{F}'$
O
d
$\overline{F}''$
$\overline{F}$
A
$\overline{F}$
O
X
Y

Теорема 2 – О приведении системы сил к заданному центру (теорема Пуансо):

- Любая система сил , действующая на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольному центру *O* заменяется главным вектором системы сил, приложенным в центре *O* и парой сил с моментом , равным главному моменту системы сил относительно центра *O.*

Доказательство





$\overline{F}_1$
Z
$\overline{F}'_1$
$\overline{m}_2$
$\overline{R}$
$\overline{M}_O$
$\overline{m}_1$
$\overline{F}'_n$
$\overline{F}_2$
O
$\overline{m}_n$
$\overline{F}'_2$
$\overline{F}_n$
X
Y

- Используя теорему 1 перенесем все силы в центр O прибавляя пары с моментами равными моментам сил относительно центра O. Сложив все силы и моменты получим в центре O два вектора и равные:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{F}_k ;$$

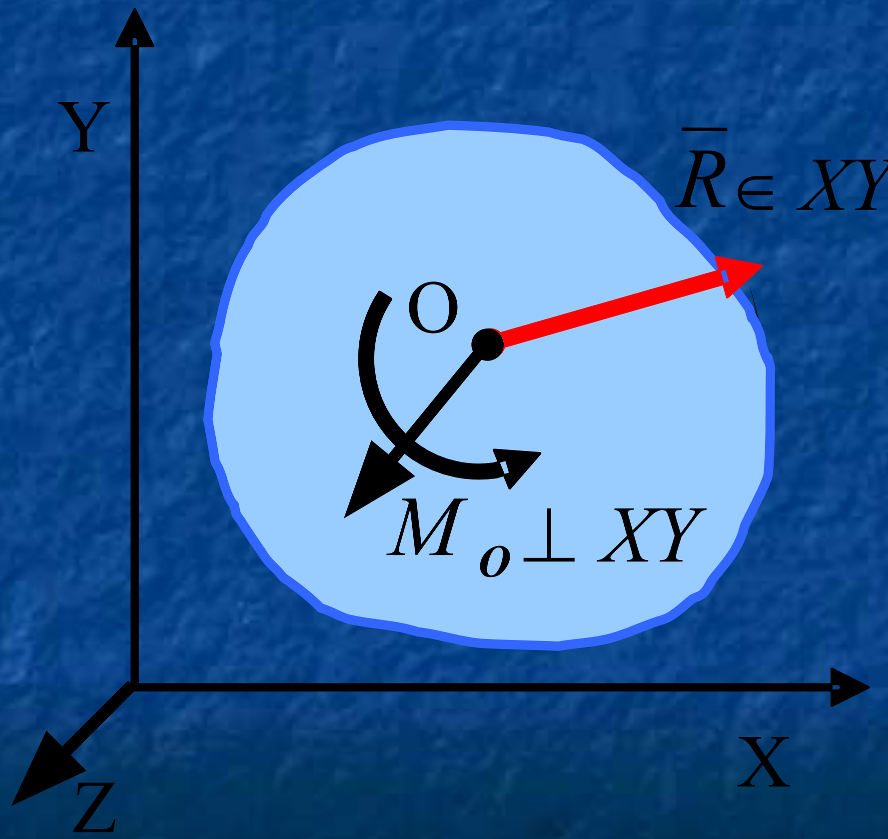
$$\overline{M}_O = \overline{M}_O\left(\overline{F}_1\right) + \overline{M}_O\left(\overline{F}_2\right) + \dots \overline{M}_O\left(\overline{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{M}_O\left(\overline{F}_k\right).$$

Величина главного вектора $\overline{R}$ не зависит от выбора центра O, а значение главного момента $\overline{M}_O$ при изменении положения центра O *может изменяться*.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{F}_k;$$

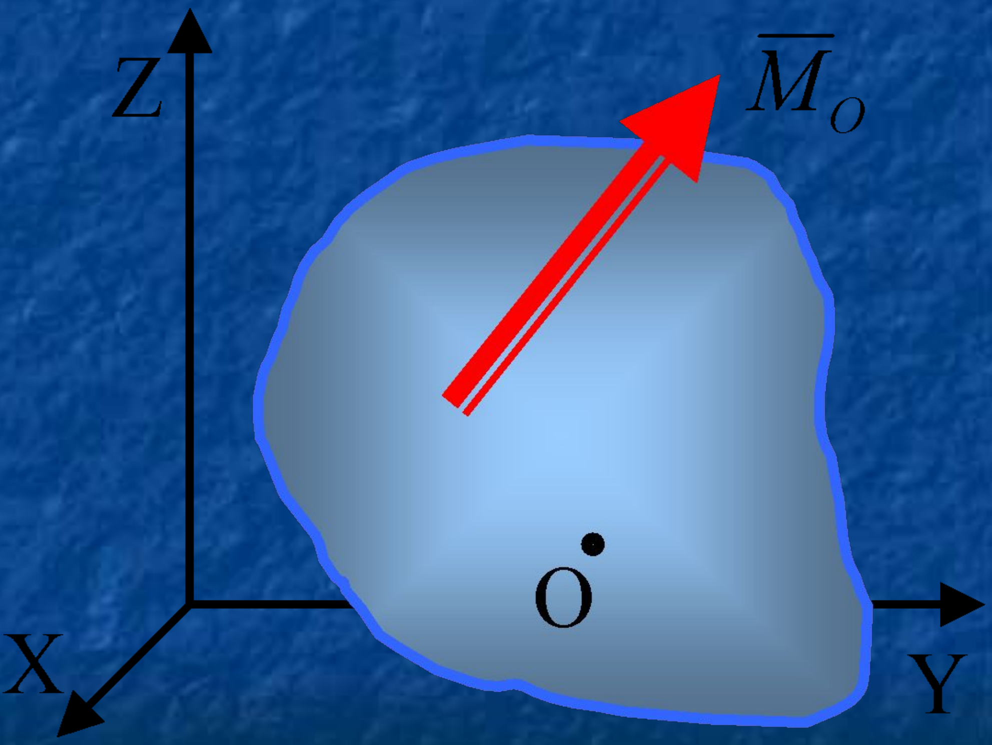
X $$M_O = M_O\left(\overline{F}_1\right) + M_O\left(\overline{F}_2\right) + \ldots M_O\left(\overline{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{k=n} M_O\left(\overline{F}_k\right).$$

- **Для плоской системы сил** главный вектор $\overline{R}$ лежит в плоскости действия сил, а главный момент $\overline{M}_O$ перпендикулярен этой плоскости. Поэтому главный момент плоской системы сил относительно центра *O* определяется как сумма алгебраических моментов сил относительно центра *O* и изображается на плоскости дуговой стрелкой.



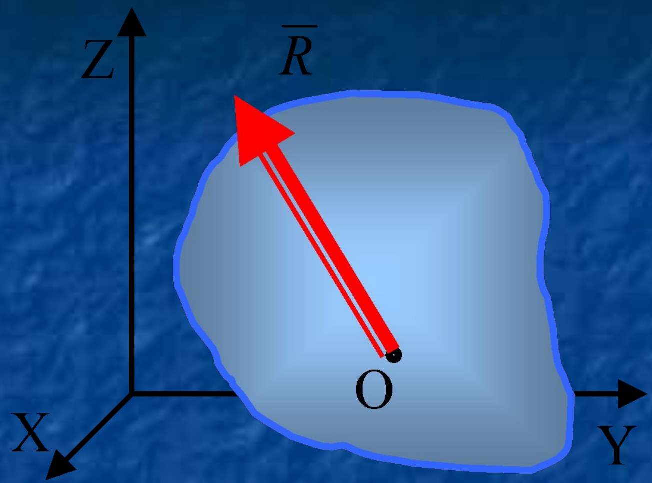
Частные случаи приведения системы сил:

- $\overline{R} = 0; \overline{M}_O \neq 0$ система сил приводится к одной паре, лежащей в плоскости действия сил с моментом $\overline{M}_O$ (причем это свободный вектор).



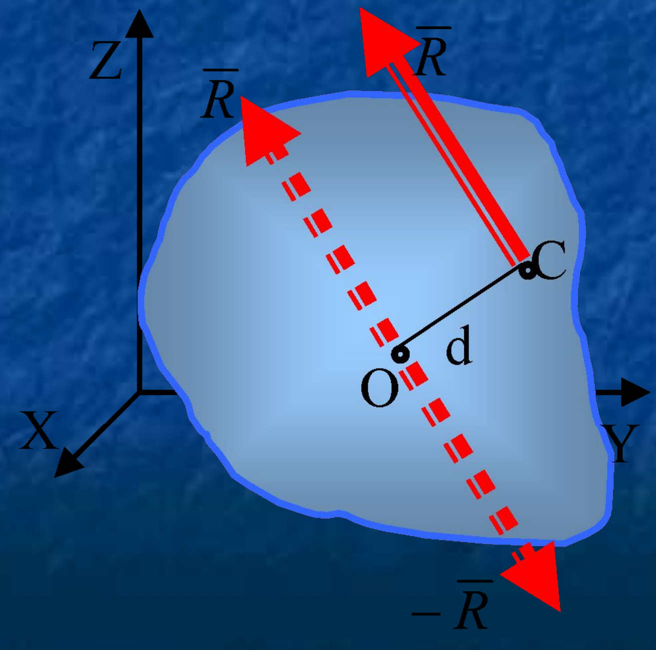
$$\overline{R} \neq 0; \overline{M}_O = 0$$

- система сил приводится к равнодействующей , приложенной в центре *O*.



$$\overline{R} \neq 0; \overline{M}_O \neq 0$$

- система сил приводится к равнодействующей , проходящей через точку *C*, положение которой определяется равенством



$$OC = d = M_O / R; OC \perp \overline{R}$$

$$\overline{R} = 0; \overline{M}_O = 0$$

система сил уравновешена.

Теорема: Для равновесия **любой** системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно **любого** центра (точки) были равны нулю.

РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

- Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил имеют вид

$$\overline{R} = 0; \overline{M}_O = O$$

- Из этих *векторных* уравнений следуют ***три формы аналитических условий равновесия.***

Основная форма условий равновесия

- для сил, лежащих в плоскости *OXY*:

$$\sum F_{kX} = 0; \sum F_{kY} = 0; \sum m_O(\overline{F}_k) = 0.$$

- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на каждую из координатных осей и сумма моментов сил относительно ***любой точки***, лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю.

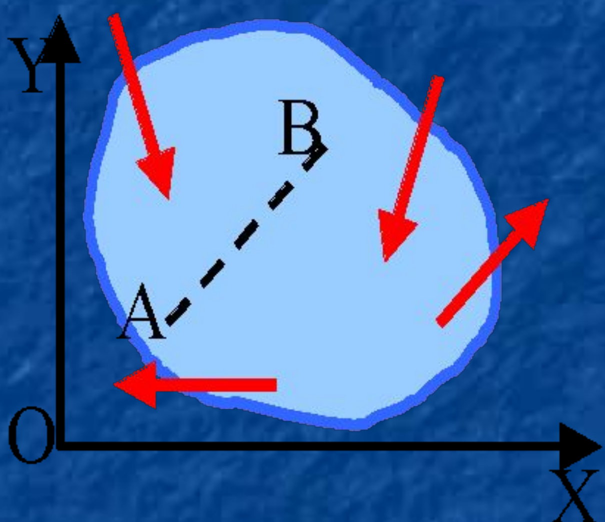
Вторая форма условий равновесия:

$$\sum F_{kX} = 0; \sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \sum m_B(\overline{F}_k) = 0,$$

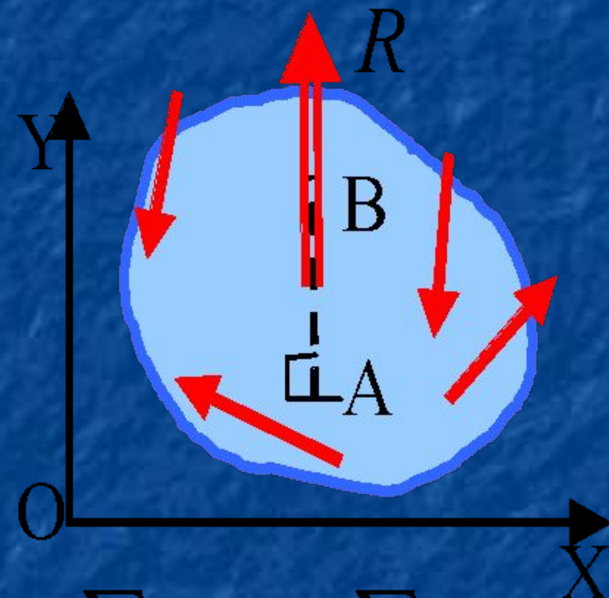
$$OX \text{ не} \perp AB.$$

- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух точек *A* и *B* и сумма их проекций на ось *OX*, **не перпендикулярную** прямой *AB*, были равны нулю.

AB не $\perp$ *OX*



$AB \perp OX$



$$\sum m_A = 0; \sum m_B = 0; \sum F_X = 0,$$

но $\overline{R} \neq 0$, *система не уравновешена*!

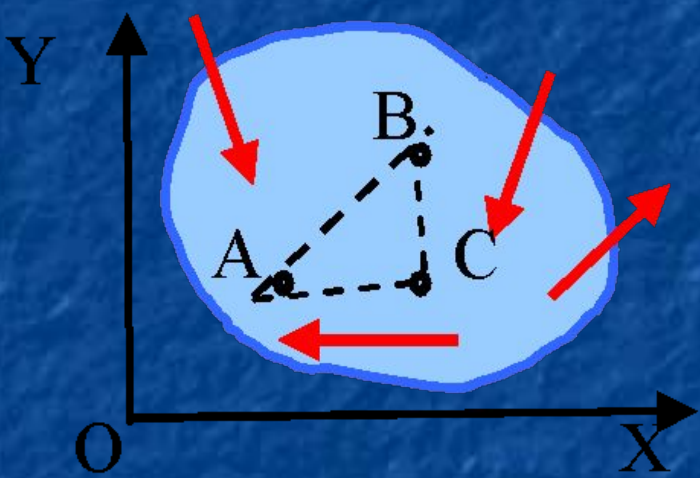
Третья форма условий равновесия

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \sum m_C(\bar{F}_k) = 0,$$

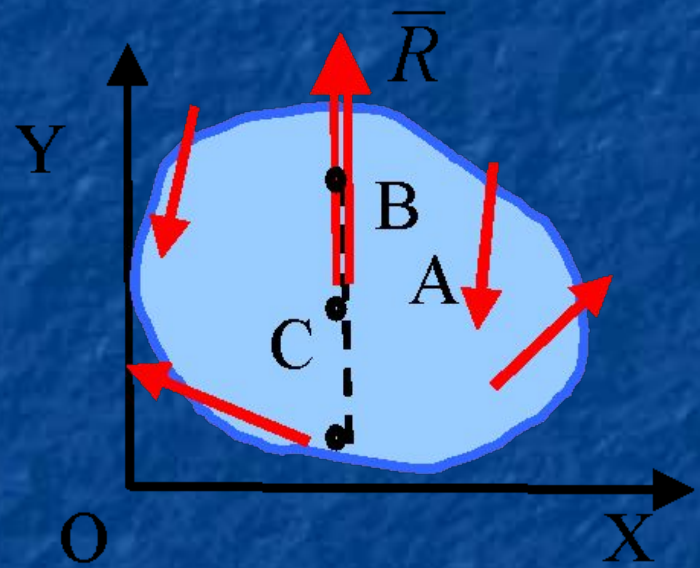
$$\textit{точки } A, B, C \textit{ не лежат на одной прямой.}$$

- Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех точек *A*, *B* и *C*, ***не лежащих на одной прямой,*** были равны нулю.

A, B, C *не лежат на одной прямой*



A, B, C *лежат на одной прямой*



$$\sum m_A = 0; \sum m_B = 0; \sum m_C = 0,$$

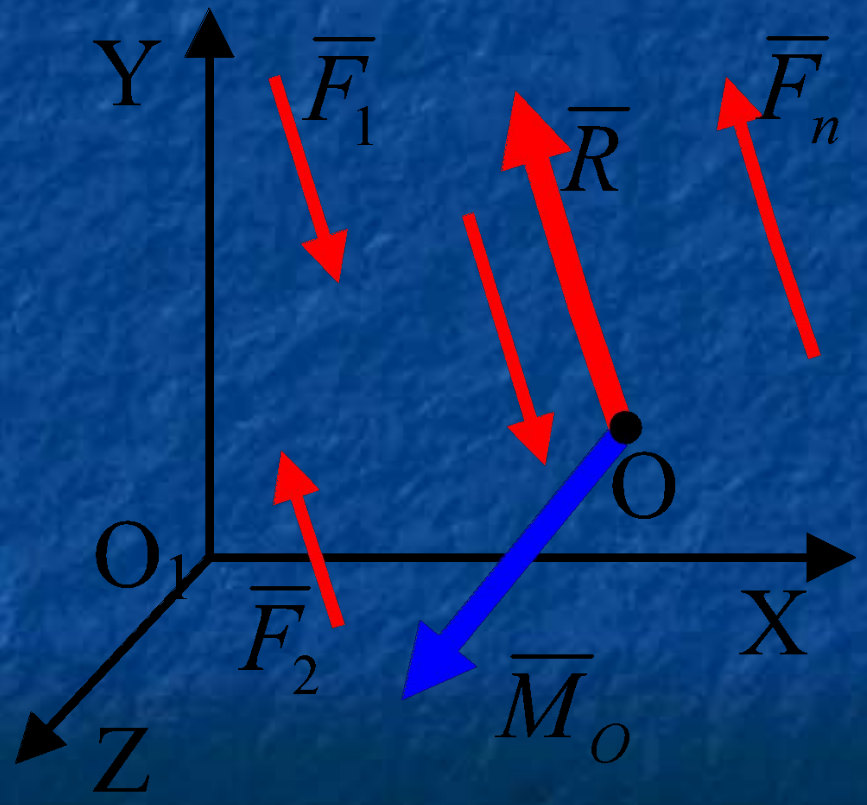
но $\overline{R} \neq 0$, *система не уравновешена*!

- ***Для проверки решения задачи***

на равновесие плоской системы сил составляют сумму моментов всех сил относительно других точек или строят в масштабе многоугольник всех сил, действующих на тело. Если проверочное уравнение обращается в тождество, а многоугольник сил замкнут, то задача решена верно.

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

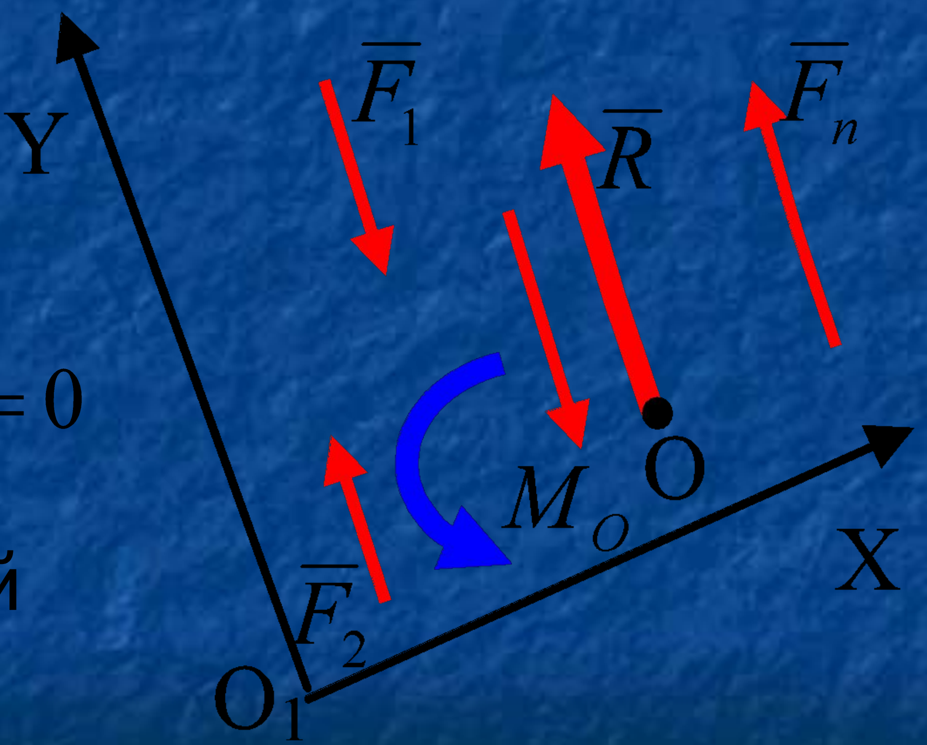
- Пусть все силы лежат в плоскости O_1XY. При приведении этой системы сил к произвольному центру (точке) O получим главный вектор $\overline{R}$ // $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, приложенный в точке O, и пару сил с моментом $\overline{M}_O$ // O_1Z.



плоской системы параллельных сил.

- Расположим ось O_1Y параллельно силам $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, тогда вектор $\overline{M}_O$ перпендикулярен плоскости O_1XY и его можно считать величиной алгебраической

Из условия $\overline{R} = 0; M_O = 0$ следуют две формы аналитических условий равновесия плоской системы параллельных сил.



Основная форма условий равновесия

- Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось *O1Y*, параллельную им, и сумма их моментов относительно ***любой*** точки *O*, лежащей в плоскости действия сил *O1XY*, были равны нулю.

$$\sum F_{kY} = 0; \sum M_O = 0$$

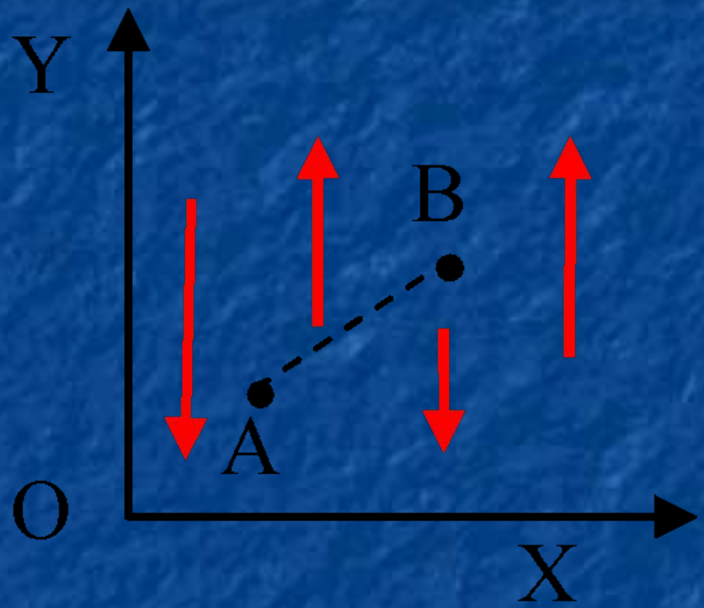
$$\text{точка } O \text{ любая в плоскости } O_1XY$$

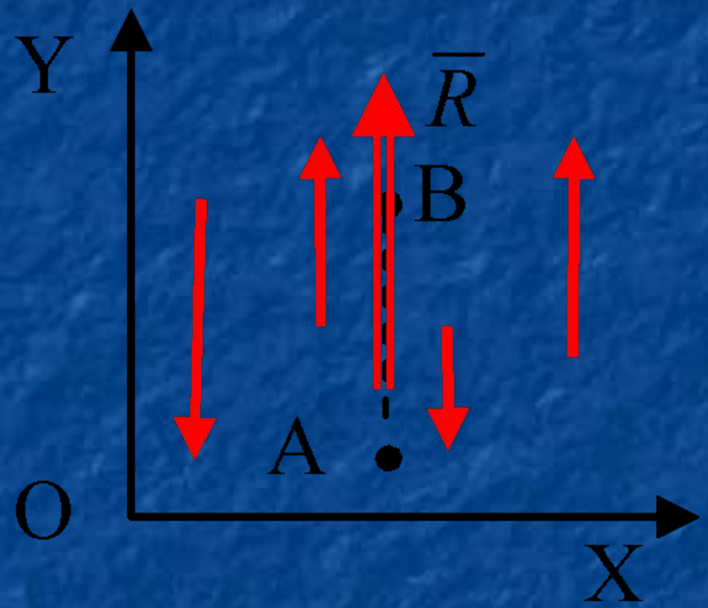
Вторая форма условий равновесия:

- Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых двух точек *А* и *В* (причем прямая **АВ *не параллельна силам***), были равны нулю

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0;$$

АВ не параллньна силам

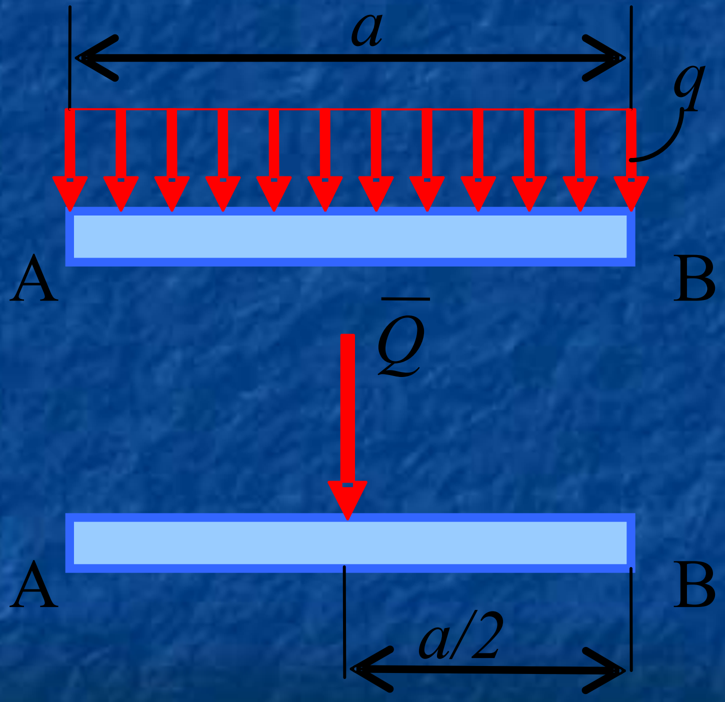




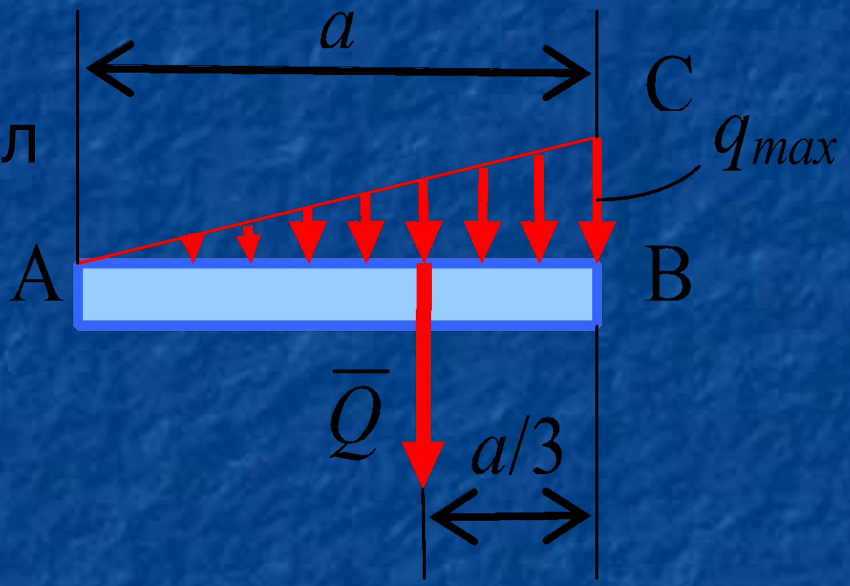
$$\overline{R} \neq 0, a \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$$

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ

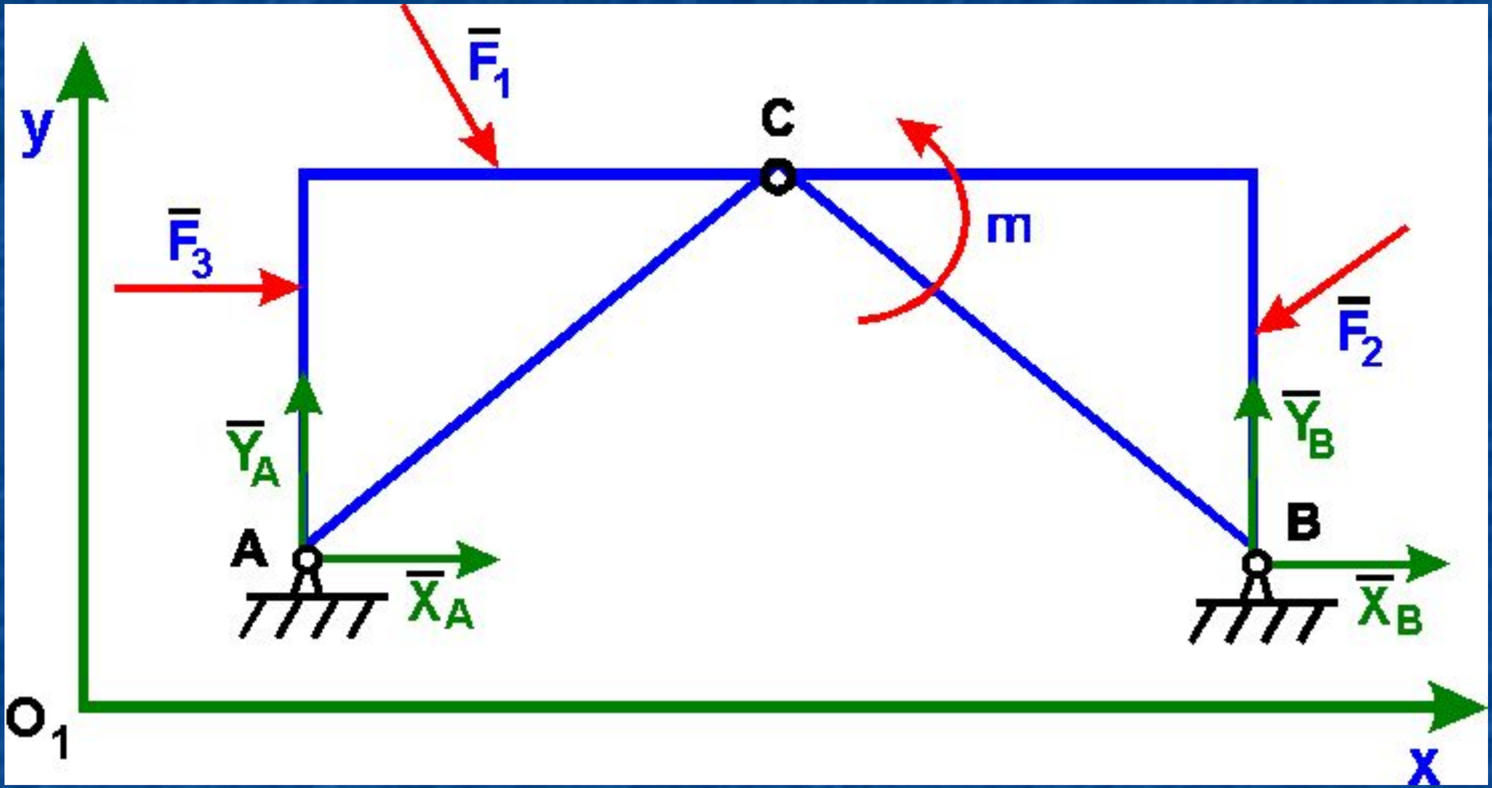
- ***равномерно распределенная*** вдоль прямой нагрузка. Это система параллельных сил, которая характеризуется постоянной ***интенсивностью*** *q* - значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного участка *AB* длиной *a*. Размерность распределенной нагрузки [*q*] = Н/м.
- При статических расчетах эту систему параллельных сил заменяют равнодействующей , приложенной в середине отрезка *AB*, ее модуль равен *Q* = *q*×*a*.



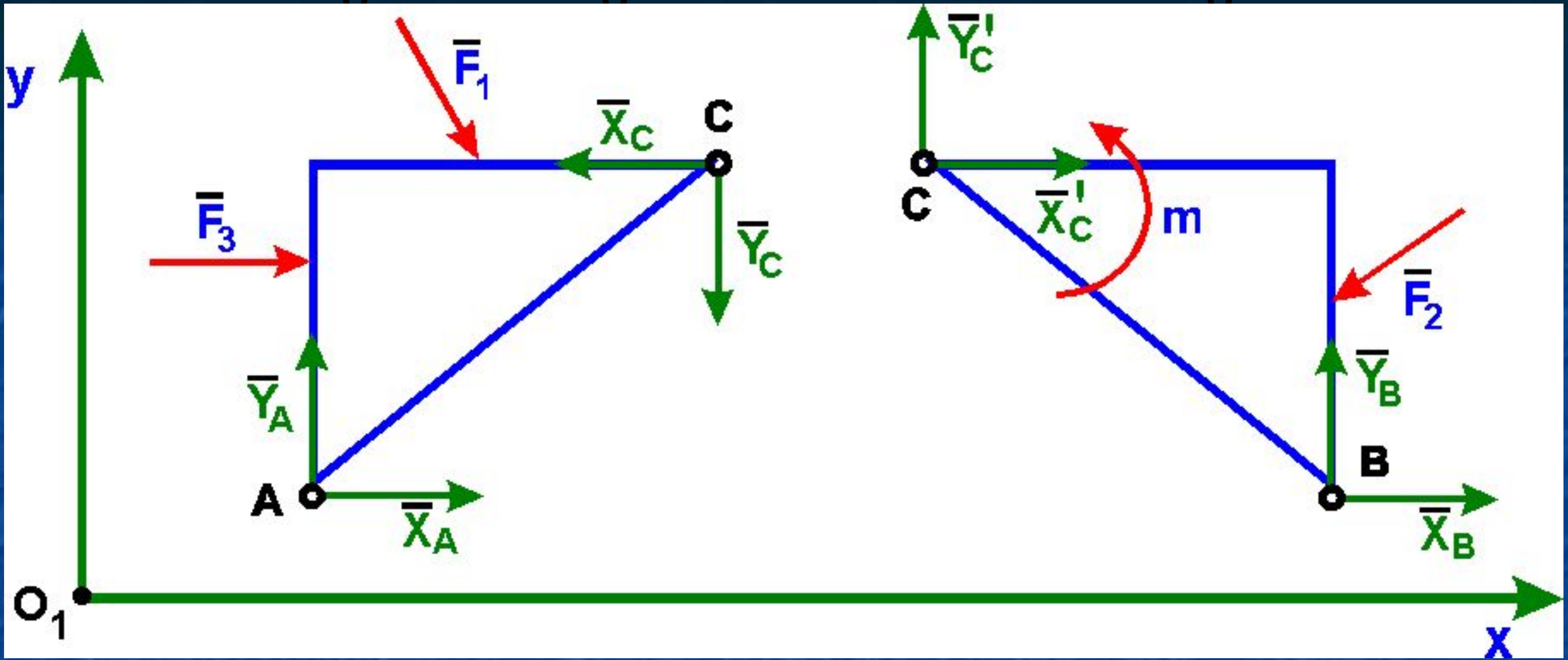
- ***Неравномерно распределенная нагрузка.***
- Параллельные силы увеличиваются от нуля до *qmax* по линейному закону. Равнодействующая таких сил по модулю равна площади треугольника *ABC*, *Q = 0,5×qmax×a.*
- Линия действия равнодействующей силы проходит через центр тяжести треугольника, т. е. на расстоянии *a*/3 от точки *B*.



РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ



Связи между частями конструкции называются *внутренними (шарнир С)*,
скрепляющие конструкцию с другими телами, - *внешними (шарниры А и В)*.



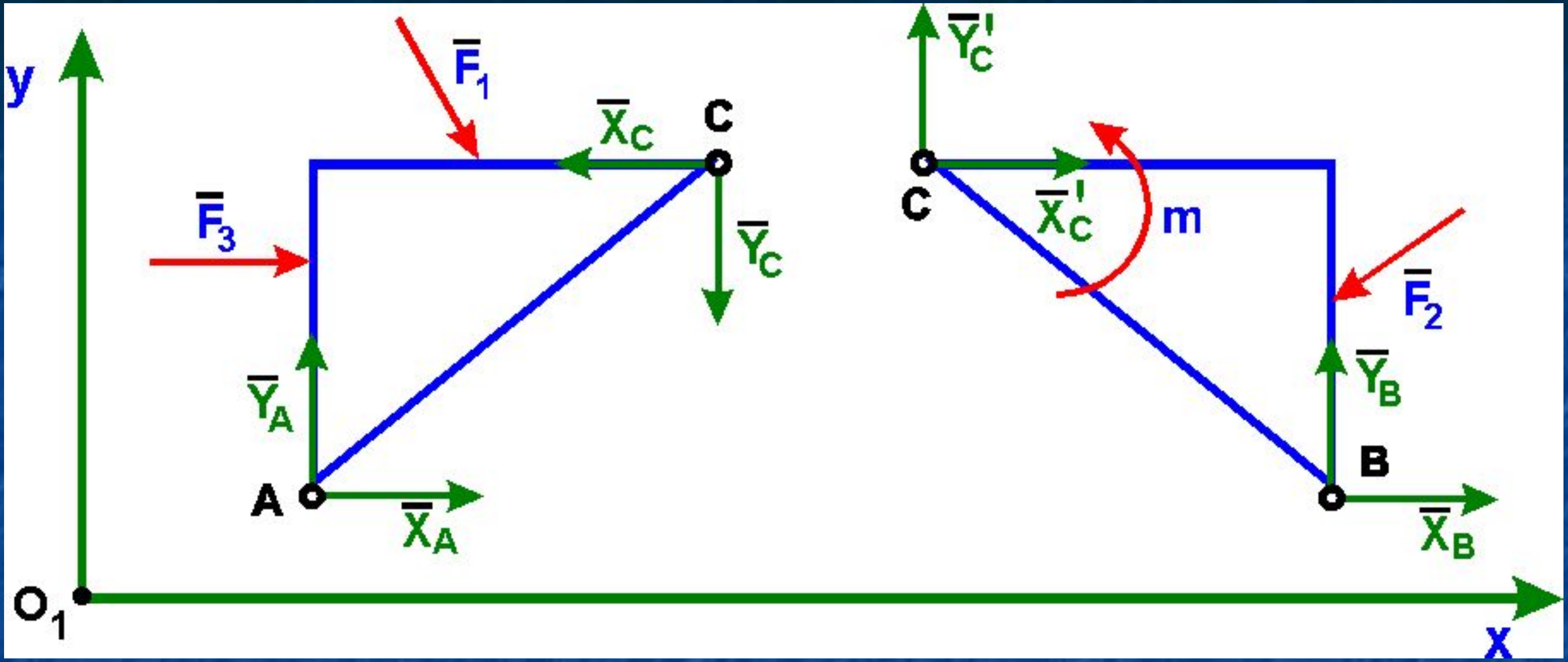
- Для определения внутренних и внешних реакций связей трех шарнирной арки расчленим конструкцию по соединительному шарниру *С* на две части и рассмотрим равновесие каждой из частей в отдельности.

- При действии на трех шарнирную арку заданной произвольной плоской системы сил для каждой части можно записать по три уравнения равновесия:
для*AC* для*CB*

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(F_k) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_B(F_k) = 0. \end{cases}$$

Статически определимые системы тел

- ***Системы тел (тело)***, для которых ***число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия***, называются **статически определимыми**. Если ***число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия*** (на одно, два и т.д.), то системы тел называются **статически неопределимыми** (соответственно один, два и т.д. раза). Такие задачи невозможно решить методами статики.



$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(F_k) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_B(F_k) = 0. \end{cases}$$