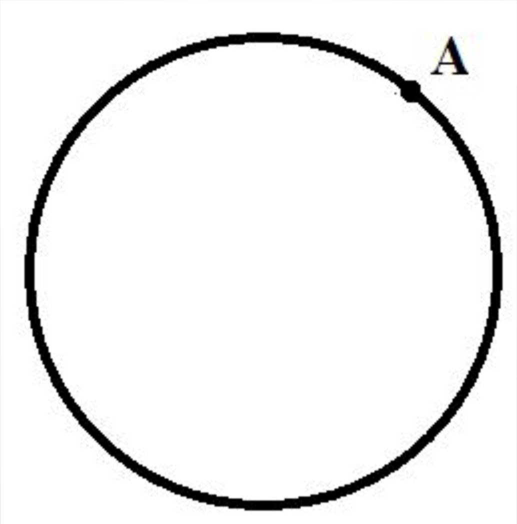
Основные уравнения теории упругости

Геометрические соотношения Коши. Уравнения неразрывности (совместности) деформаций Сен-Венана. Физические уравнения теории упругости. Линейные зависимости между деформациями и напряжениями для анизотропного тела.

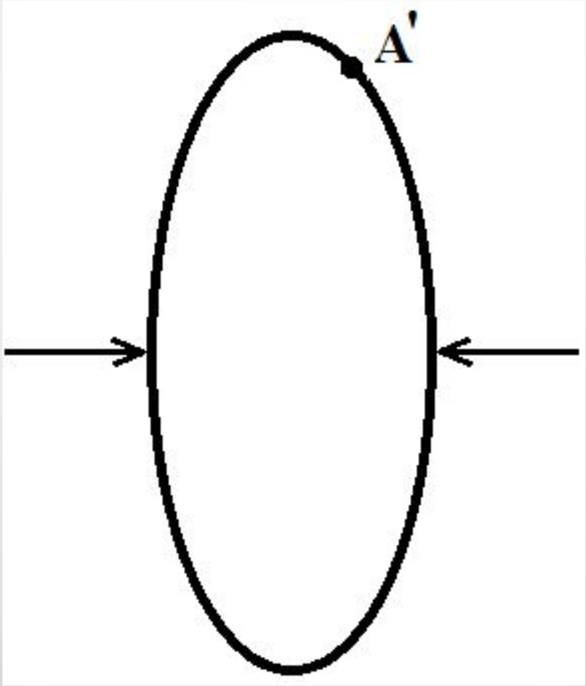
Геометрические соотношения Коши

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве



Геометрические соотношения Коши

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве

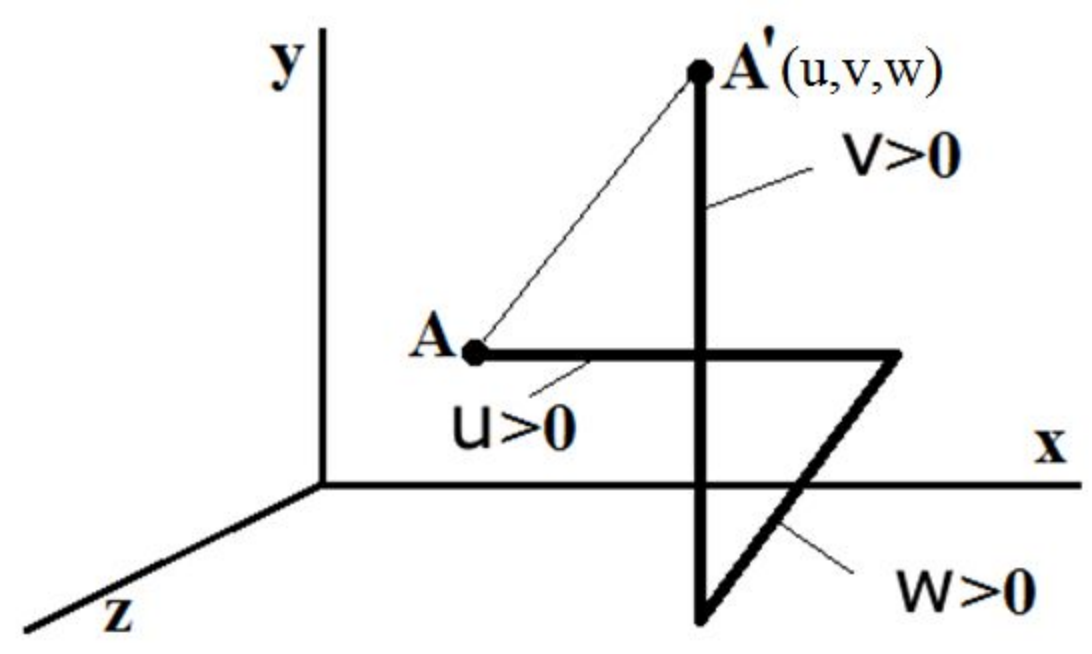


Геометрические соотношения

Геометрически деформация тела характеризуется двумя группами функций.

Первая группа – это компоненты перемещений точек u, v и w, параллельные осям координат x, y и z.

Для точки A тела такие перемещения показаны на рис.



Условимся далее считать u, v и w >0, если они совпадают с положительным направлением соответствующей оси координат, и наоборот.

Три функции $u=u(x, y, z);$

$$v=v(x, y, z);$$

$$w=w(x, y, z)$$

определяют поле перемещений деформируемого тела.

В силу гипотезы о сплошности тела полагаем, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по x, y, z непрерывны.

Вторая группа – это относительные деформации элементарных параллелепипедов dx, dy, dz , на которые мысленно можно расчленить тело. В каждой точке они составляют тензор деформаций

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Шесть различных компонент которого как функции координат x, y, z определяют поле деформаций .

$$T_D = T_D(x, y, z)$$

Геометрические уравнения Коши устанавливают зависимости между перемещениями и деформациями. Для их вывода будем считать функции u, v и w заданными, а через них выразим деформации.

Для определения деформации ε_x рассмотрим отрезок АВ длиной dx.

Обозначим $$\partial_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

- частный дифференциал (линейная часть приращения) функции u при изменении координаты x на x+dx.

В результате получим линейные и угловые деформации в виде (5)

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\\
&\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};\\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Геометрические соотношения (1) носят название **уравнений Коши**.

Уравнения неразрывности деформаций (совместности деформаций) Сен-Венана

Геометрические соотношения Коши (1) связывают 6 составляющих деформаций

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

и три составляющих перемещения u, v, w.

Если заданы три составляющие перемещения, то шесть составляющих деформации определяются из этих уравнений однозначно, т. е. заданным трем составляющим перемещения соответствует единственная система единственная система из 6 составляющих деформации.

Уравнения неразрывности деформаций (совместности деформаций) Сен-Венана

Если же заданы шесть составляющих деформации, то для определения трех составляющих перемещения необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (5) в частных производных.

При произвольном выборе составляющих деформации 6 уравнений с тремя неизвестными не всегда могут быть решены однозначно. Поэтому между шестью составляющими деформации должны существовать определенные зависимости.

Уравнения Сен-Венана

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y};
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

Уравнения Сен-Венана

Представим себе тело разрезанное на малые параллелепипеды. Если каждый из этих параллелепипедов получит произвольные деформации, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное твердое тело: в некоторых точках после деформирования возникнут бесконечно малые разрывы. Уравнения же (2) устанавливают такие зависимости между составляющими деформации, при удовлетворении которых тело после деформирования остается сплошным, и непрерывным.