№ п/п	Литература
1.	Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа,1990.- 400с
2.	Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1984. - 320с
3.	Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1968. - 512с
4.	Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1965. - 320с
5.	6. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. - М.: Высшая школа, 1966. - 228с
6.	Хечумов Р.А., Кепплер Х., Прокопьев В.И. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: Уч. пособие для технич. вузов. - М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 1994. - 353с
7.	Журавков М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. - Минск: БГУ, 2011.

Напряженное состояние в точке

Основные понятия, допущения и гипотезы. Нагрузки и напряжения. Тензор напряжений. Уравнения равновесия. Главные напряжения.

Основные допущения Теории упругости

1. *Идеально упругое тело* предполагается вполне упругим. Под полной упругостью понимается свойство твердых тел полностью восстанавливать первоначальную форму и объем после устранения внешних физических воздействий.

Первоначальное состояние предполагается таковым, что при отсутствии нагрузок в теле не возникает никаких напряжений. Такое состояние тела называется *естественным*.

Основные допущения Теории упругости

2. *Идеально упругое тело* предполагается *сплошным*, т.е. непрерывное до деформирования, оно остается непрерывным и после деформирования. Любой объем тела, включая микрообъемы, не имеет пустот и разрывов.

Основные допущения Теории упругости

3. *Идеально упругое тело* предполагается *однородным*. Это значит, что во всех точках тела при одних и тех же напряжениях возникают одинаковые деформации.

Предположение об однородности позволяет считать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Основные допущения Теории упругости

4. *Идеально упругое тело* предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям.

Принцип независимости действия сил (суперпозиции)

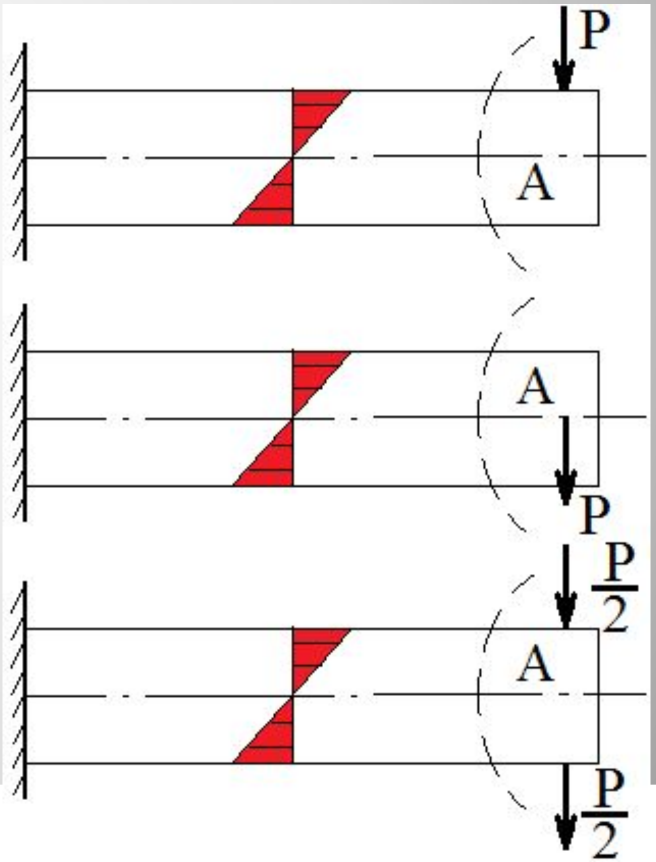
Результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности и не зависит от последовательности их приложения.

Гипотеза Сен-Венана

В сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Эта гипотеза позволяет заменять сложные нагрузки их равнодействующими.

Гипотеза Сен-Венана

Например напряжения в балках (рис.) будут различны в пределах области А. Вне области А во всех трех случаях напряжения мало отличаются.



В классической (линейной) ТУ справедливо следующее:

а) перемещения тела (применительно к строительной механике их называют прогибами) малы по сравнению с линейными размерами тела;

б) относительные удлинения, а также относительные сдвиги, т.е. углы сдвига в материале, пренебрежимо малы по сравнению с единицей;

В классической (линейной) ТУ справедливо следующее:

в) углы поворота (т.е. девиации) малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами.

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно разбить на две группы: *поверхностные* и *объемные*.

Поверхностные силы возникают в результате контакта тел. Они распределены по поверхности тела, например сила давления воды на плотину, сила давления фундамента здания на грунт и т. д.

Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т.е. значением силы, приходящейся на единицу площади поверхности по которой эта сила распределена.

Если размеры плащади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то такой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке.

Такую силу называют сосредоточенной.

Объемные силы действуют в каждой точке тела. К ним относятся собственный вес тела, силы инерции, силы электромагнитного происхождения и т.д.

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

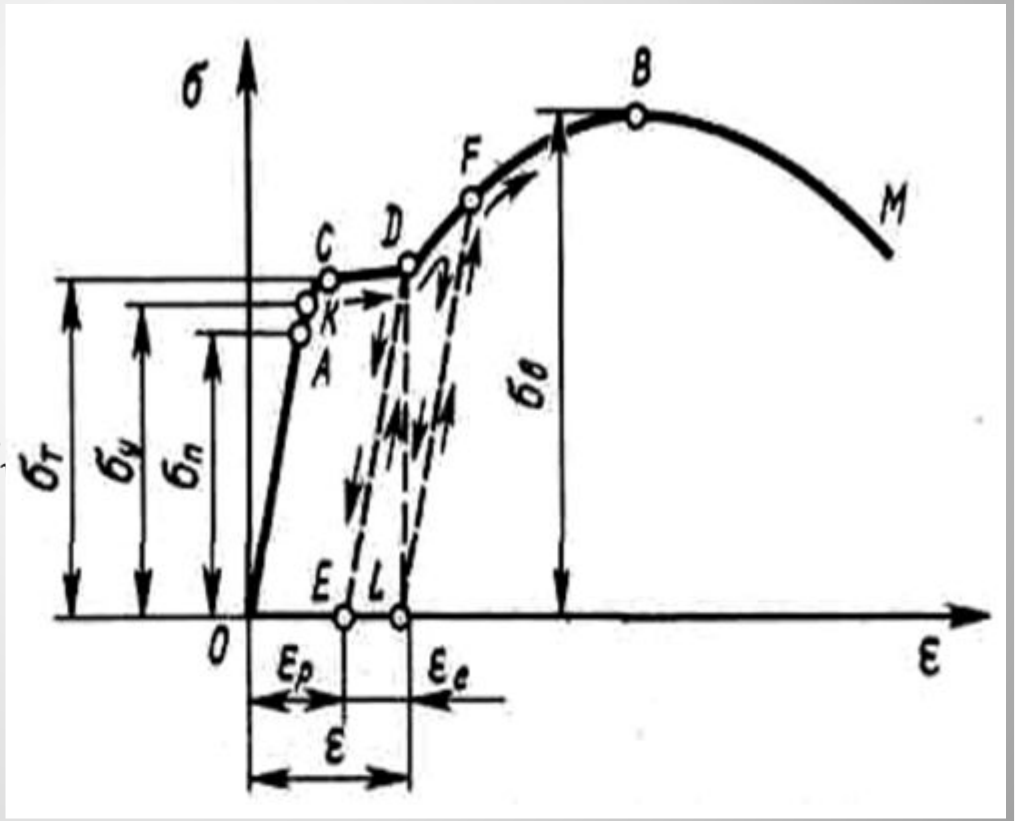
$$\sigma_{\nu} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

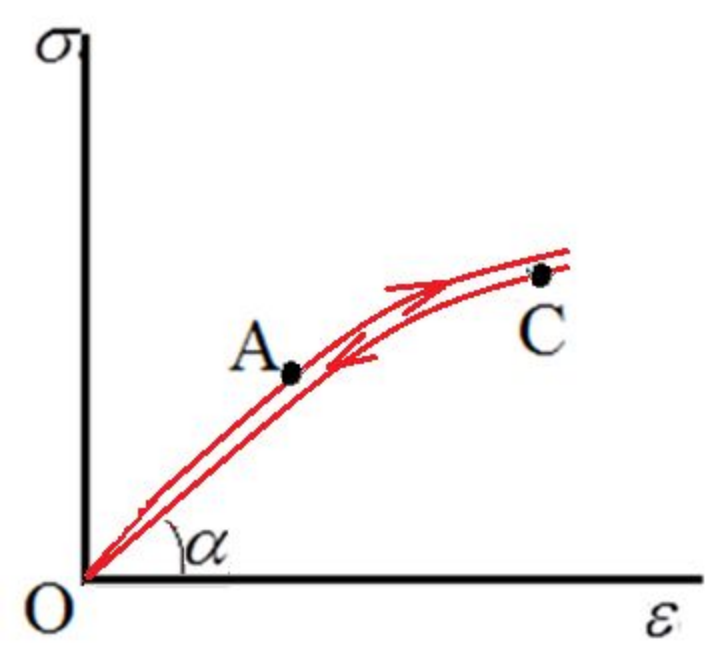
$$\sigma = E\varepsilon$$

Полное напряжение
с нормалью ν:

σ



Если при медленной разгрузке процесс будет протекать по кривой САО, повторяя в обратном направлении (порядке) те же состояния, что и при нагружении, а график процесса возвращается в начальную точку О, то такой материал принято называть ***нелинейно упругим***.



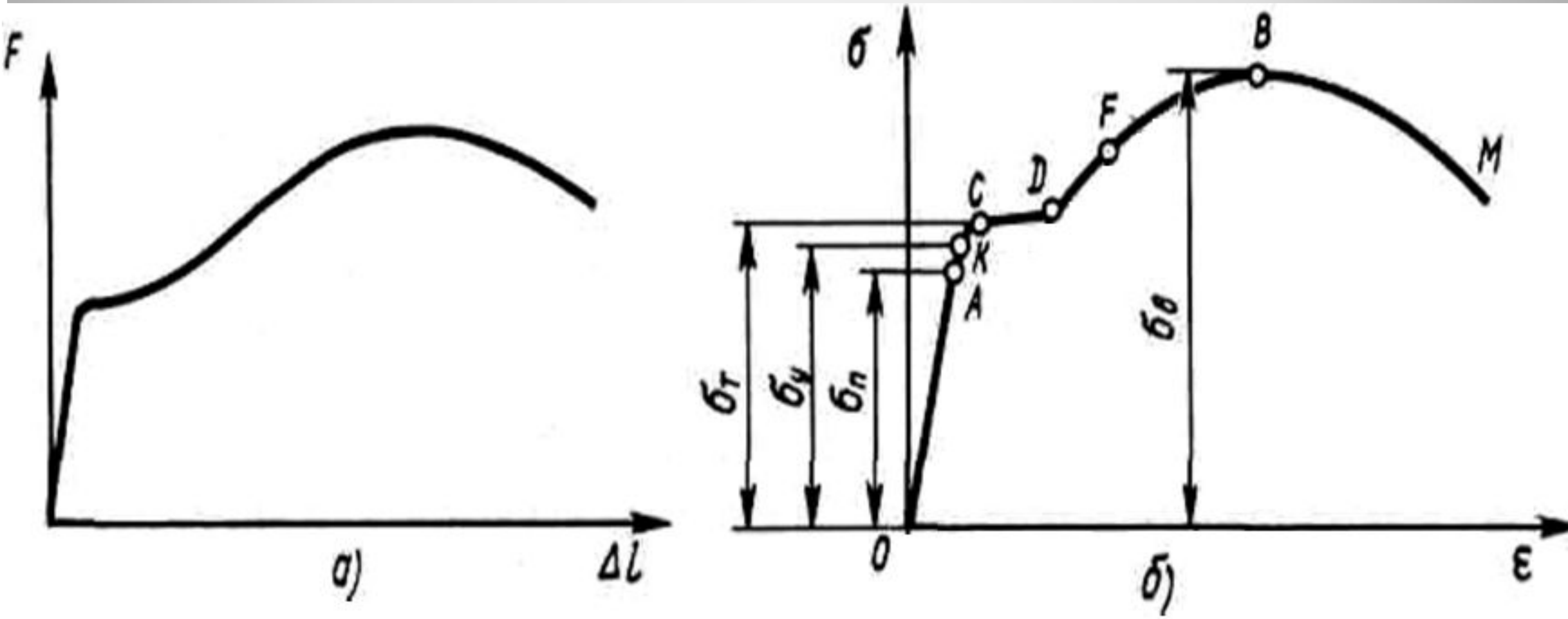
Теория пластичности в отличие от теории упругости рассматривает тела, которые не подчиняются законам упругости либо с самого начала приложения к ним внешних воздействий, либо начиная с некоторой стадии нагружения.

Пластичность – способность материала получать большие остаточные деформации без разрушения.

Хрупкость – способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

Теория ползучести в отличие от теории упругости и пластичности изучает изменение во времени напряжений и деформаций в твердом теле, возникших в результате начального нагружения.

Характеристики прочности материала



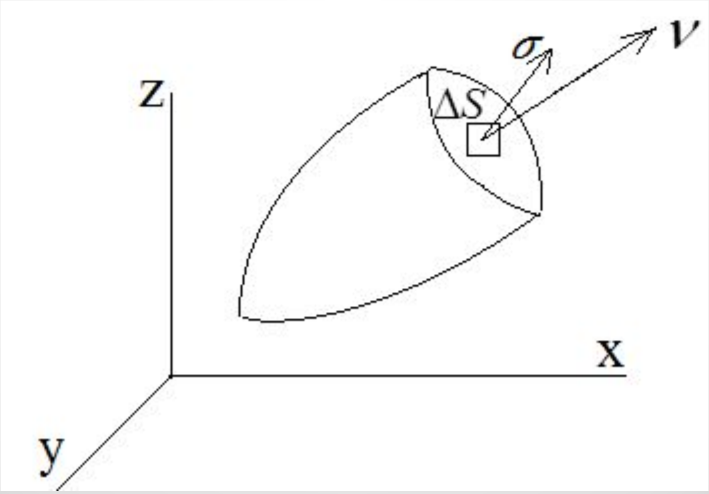
Наибольшее напряжение σ_n называют ***пределом пропорциональности.***

Напряжение σ_y в точке ***К*** называют ***пределом упругости*** материалов.

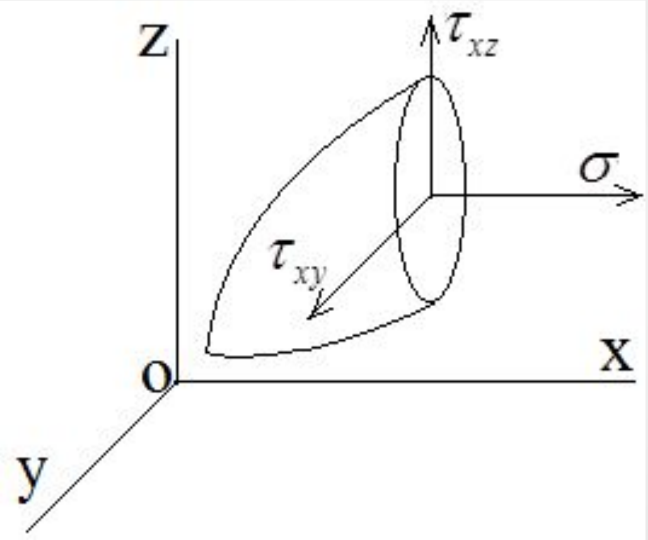
Практически величина предела упругости близка к пределу пропорциональности.

Напряжение σ_τ , при котором в материале появляется заметное удлинение без увеличения напряжения называют ***пределом текучести***.

Рассмотрим твердое тело произвольной формы находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил.



- Если сечение параллельно координатной плоскости (к примеру zoy)



Для напряжения принято следующее правило знаков:

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении (образца).

Касательное напряжение считается положительным, если на площадке, нормаль к которой совпадает с направлением параллельной ей координатной оси, оно направлено в сторону соответствующей этому направлению положительной координатной оси.

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

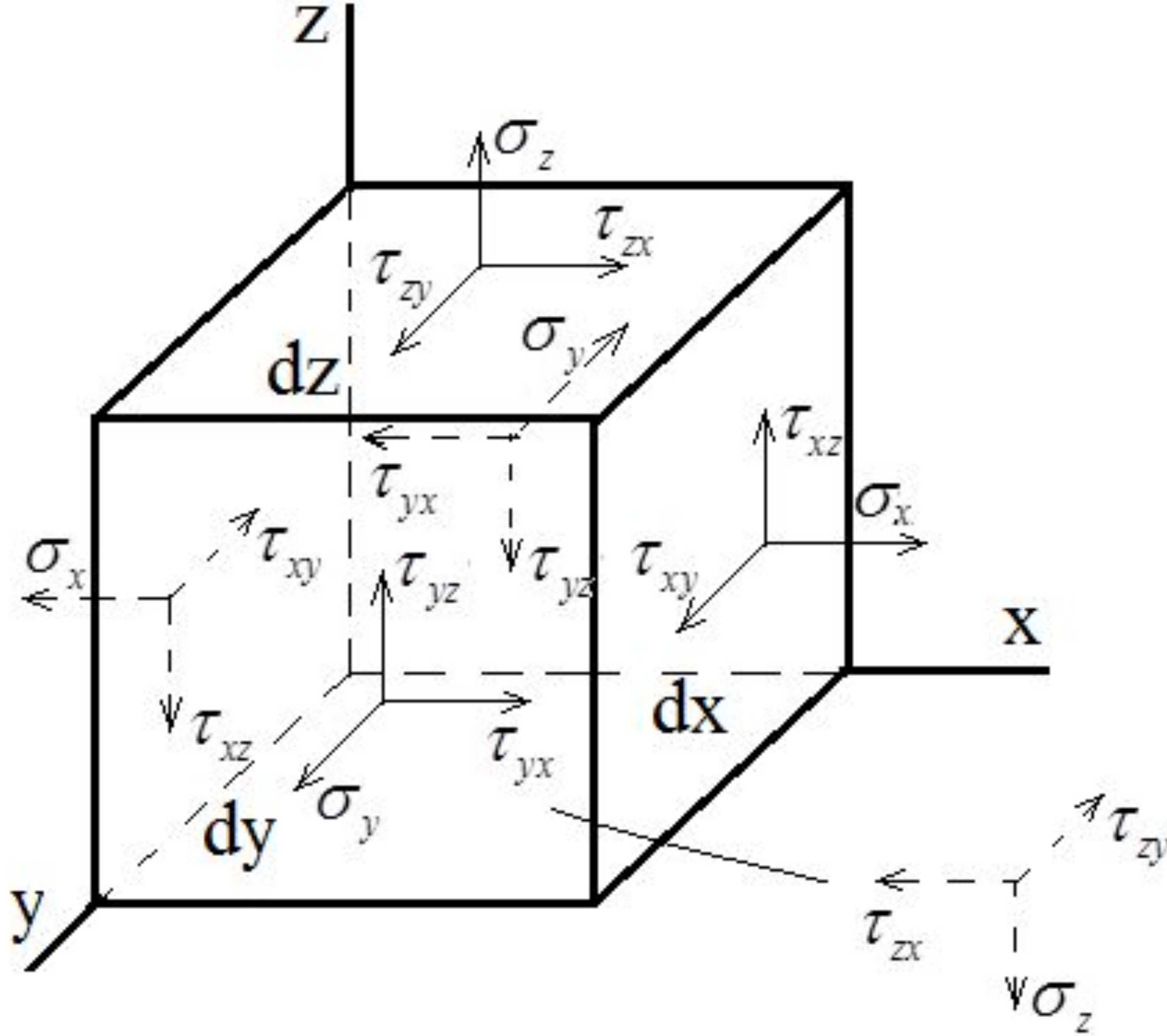
Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$


z
σ_z
τ_{zx}
τ_{zy}
σ_y
dz
τ_{xz}
τ_{yx}
σ_x
τ_{xy}
σ_x
τ_{yz}
τ_{yz}
τ_{xy}
x
dx
τ_{xz}
τ_{yx}
σ_y
dy
τ_{zy}
y
τ_{zx}
σ_z

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Дифференциальные соотношения (2) связывают составляющие объемной силы с составляющими напряжений, эти соотношения получили название уравнений равновесия. Если выполняется (2), то элементарный параллелепипед находится в равновесии под действием внешних сил.

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Условия на поверхности

$$P_{vx} = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{zx} l_3;$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3;$$

$$P_{vz} = \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3.$$

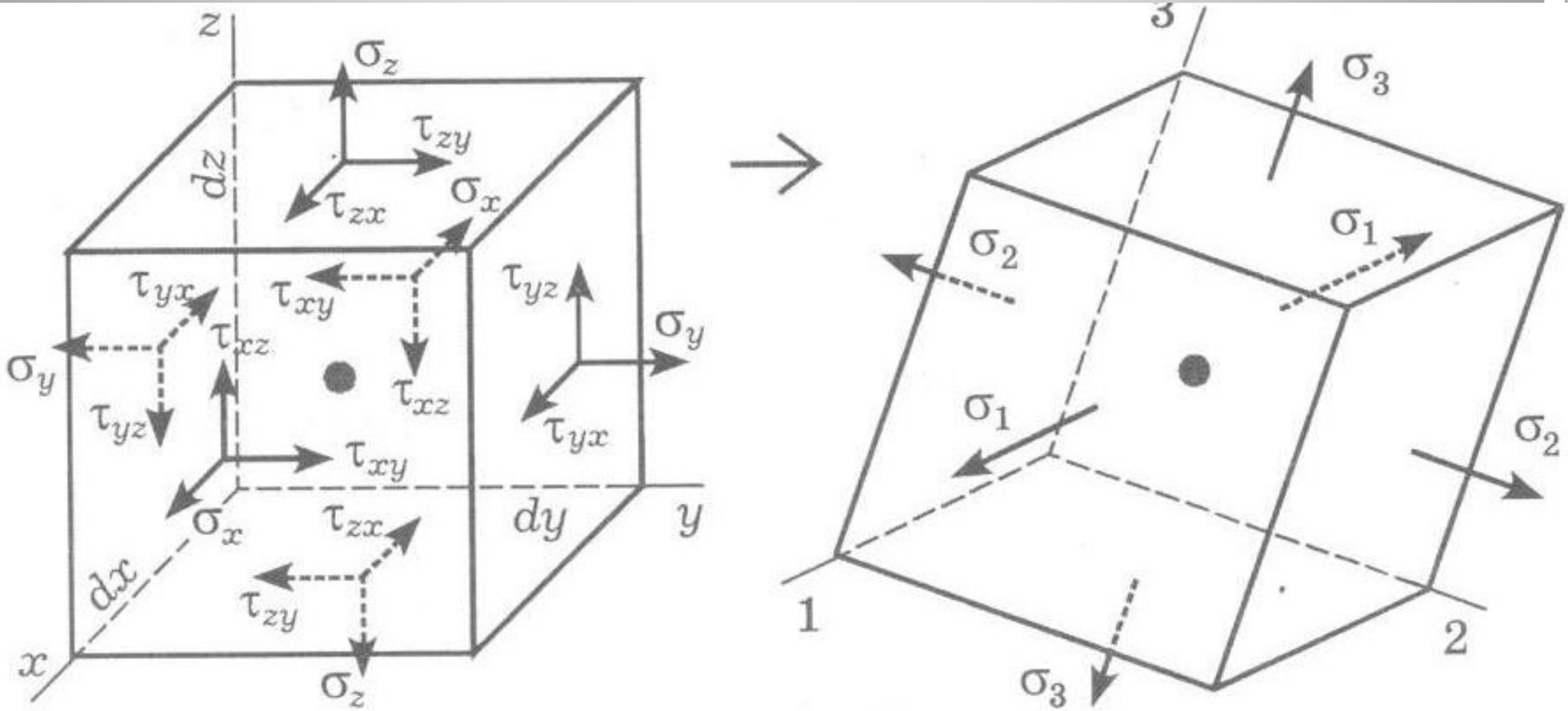
$$\cos(x,v) = l_1;$$

$$\cos(y,v) = l_2;$$

$$\cos(z,v) = l_3.$$

Главные оси и главные значения тензора напряжений

Возьмем вырезанный ранее элементарный параллелепипед с «впаянной» декартовой системой координат и начнем его мысленно вращать вокруг рассматриваемой точки. Значения тензора напряжений на его гранях будут изменяться.



z
σ_z
τ_{zy}
dz
τ_{zx}
σ_x
τ_{yx}
τ_{xy}
τ_{yz}
σ_y
τ_{xz}
σ_y
τ_{xz}
τ_{yz}
τ_{xy}
τ_{yx}
σ_x
τ_{zx}
dy
y
dx
τ_{zy}
x
σ_z
3
σ_3
σ_1
σ_2
σ_1
σ_2
1
2
σ_3

Главные оси и главные значения тензора напряжений

Доказано, что существует хотя бы одно такое положение параллелепипеда, при котором касательные напряжения на его гранях равны нулю, а нормальные напряжения экстремальны.

Главные оси и главные значения тензора напряжений

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle F}{\triangle S}.$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

Если все главные напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называется объемным (трехосным).

Когда одно из них равно нулю, то напряженное состояние – плоское (двухосное).

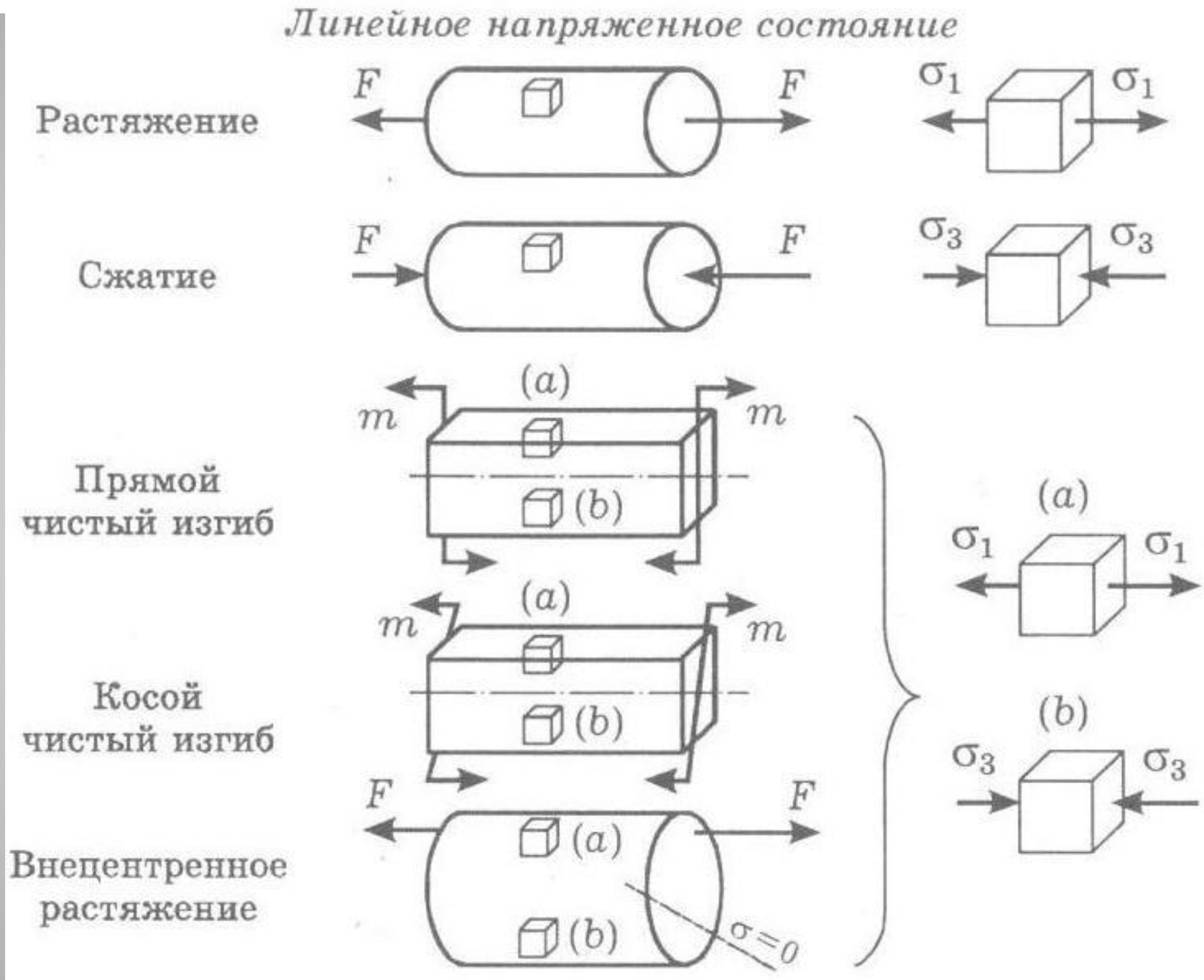
Если одновременно равны нулю два главных напряжения линейное (одноосное) напряженное состояние.

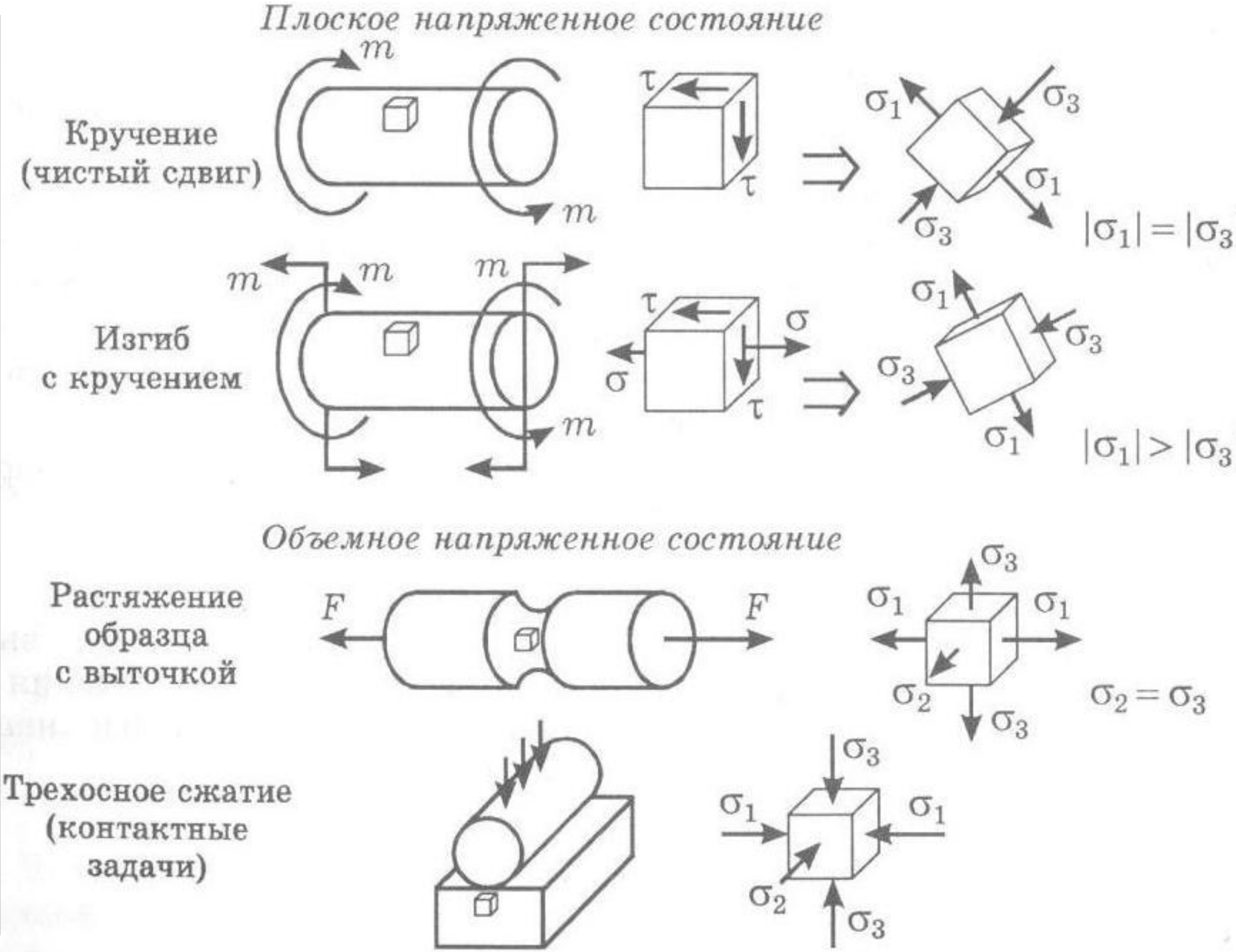
Большое значение имеет знак главных напряжений.

Практически все материалы по-разному разрушаются в зависимости от того, являются ли напряжения растягивающими или сжимающими.

Большинство материалов способны воспринимать весьма большие напряжения при всестороннем сжатии, в то время как одноосное растяжение вызывает разрушение при весьма низких напряжениях.

Ниже приведены виды напряженного состояния для некоторых типов сопротивления брусьев.


Линейное напряженное состояние
Растяжение
F
F
σ1
σ1
Сжатие
F
F
σ3
σ3
(a)
m
m
Прямой
чистый изгиб
(b)
(a)
σ1
σ1
(a)
m
m
Косой
чистый изгиб
(b)
(b)
σ3
σ3
F
F
(a)
Внецентренное
растяжение
(b)
σ=0


Плоское напряженное состояние
Кручение
(чистый сдвиг)
m
τ
σ1
σ3
|σ1| = |σ3|
Изгиб
с кручением
σ
|σ1| > |σ3|
Объемное напряженное состояние
Растяжение
образца
с выточкой
F
σ2
σ2 = σ3
Трехосное сжатие
(контактные
задачи)

Рисунок

Инварианты напряженного состояния

Кубическое уравнение относительно нормального напряжения на главной площадке

Интенсивность внутренних сил называется *напряжением.*

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

(2)

Здесь коэффициенты $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \qquad (*)$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{xy} \sigma_z \end{pmatrix}$$

Если вокруг заданной точки вырезать несколько элементарных параллелепипедов с различными направлением граней и подставить значения составляющих напряжений для каждого из параллелепипедов в уравнение (2), то для всех параллелепипедов должны получиться одни и те же значения главных напряжений. Т. о., корни уравнения (2) не зависят от выбора координатной системы и коэффициенты уравнения должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей, т.е. они являются ***инвариантами***.

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

В теории напряжений инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного состояния в точке; составляющие же напряжений, как связанные с осями координат, являются вспомогательными.

Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\bar{\sigma}_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta S}.$$

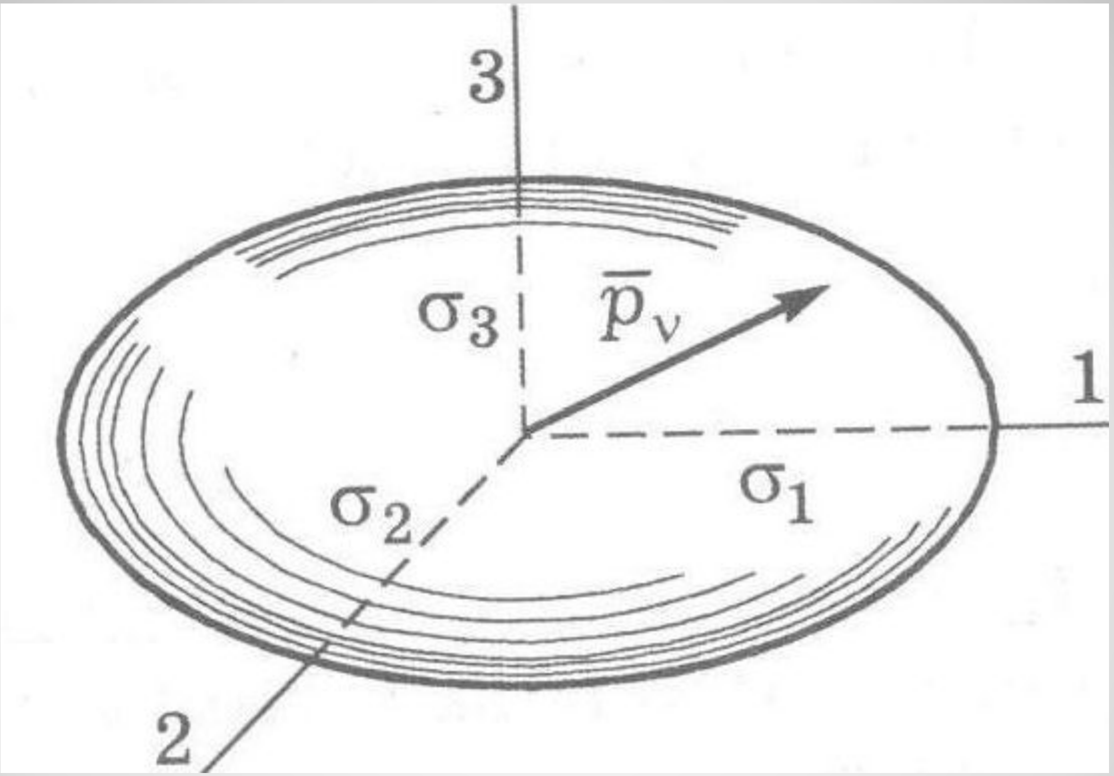
$$\sigma_0 = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) / 3$$

$$T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 00 \\ 0\sigma_0 0 \\ 00\sigma_0 \end{pmatrix}$$

- Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*.

Полное напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν:

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}.$$



3
σ_3
$\overline{p}_\nu$
1
σ_1
σ_2
2

Три полуоси эллипсоида напряжений равны по длине трем главным напряжениям. В случае напряженного состояния, описываемого шаровым тензором (3), все три главных напряжения равны между собой и эллипсоид напряжений обращается в шар.

Шаровой тензор можно представить в виде:

$$T_\sigma^0 = \sigma_0 T_1$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$$

Вычитая из тензора напряжений (1) шаровой тензор (3), получаем новый тензор, называемый *девиатором напряжений*:

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Т.о., тензор напряжений в каждой точке может быть представлен в виде суммы двух тензоров: шарового тензора напряжений и девиатора напряжений, т. е.

$$T_\sigma = \sigma_0 T_1 + D_\sigma \quad (5)$$

Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор имеет большое принципиальное значение при исследовании поведения упругих и пластических тел под нагрузкой.

Шаровой тензор $\sigma_0 T_1$ выделяет из напряженного состояния равномерное всестороннее растяжение (сжатие), при котором изменяется лишь объем данного элемента тела без изменения формы.

Девиатор напряжений D_σ характеризует состояние сдвига, при котором изменяется форма элемента без изменения его объема. Девиатор напряжений указывает отклонение (девиацию) рассматриваемого напряженного состояния от всестороннего растяжения (сжатия) или отклонение приобретенной формы тела от первоначальной.

По аналогии с инвариантами тензора напряжений вводятся инварианты девиатора напряжений.

Второй из них играет существенную роль в теории пластичности, где обычно рассматривают величину, пропорциональную квадратному корню из него и называемую интенсивностью касательных напряжений.

(6)

$$\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

Интенсивность касательных напряжений

$$\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

Она представляет собой касательное напряжение на октаэдрических площадках, т.е. площадках равно наклоненных ко всем трем главным напряжениям.

Вместо (6) часто рассматривают пропорциональную ей величину,

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

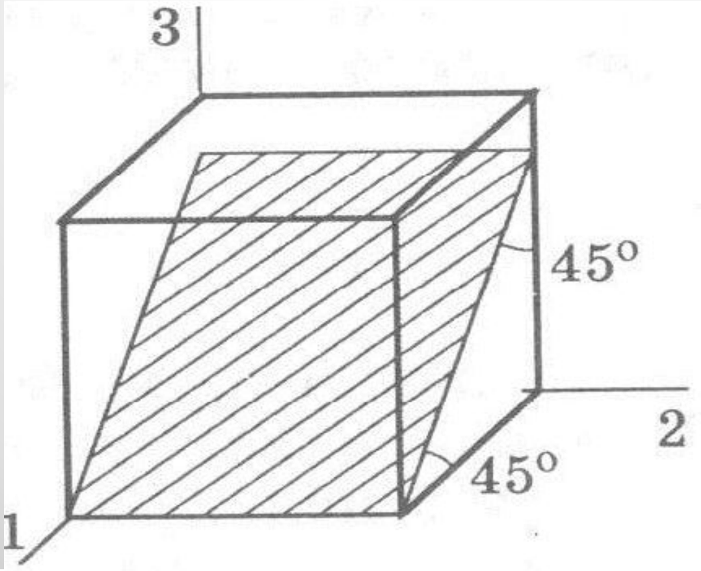
называемую *интенсивностью напряжений*

В теории пластичности необходимо знать величину наибольших касательных напряжений.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) . \qquad (7)$$

Площадка с максимальным касательным напряжением равнонаклонена к площадкам на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений и параллельна оси 2.

Следовательно, площадка с максимальным касательным напряжением равнонаклонена к площадкам на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений и параллельна оси 2.



Введем необходимое для дальнейшего изложения понятие *направляющего тензора напряжений*. Под ним будем подразумевать девиатор напряжений, каждый компонент которого разделен на интенсивность касательных напряжений:

$$\overline{D_\sigma} = \frac{D_\sigma}{\tau_i} \qquad (8)$$

$$\overline{D_\sigma} = \frac{D_\sigma}{\tau_i} \qquad (8)$$

Направляющий тензор напряжений (8) определяет только главные направления напряжений и соотношение между компонентами тензора напряжений, но не определяет их значения, так как компоненты направляющего тензора напряжений – величины безразмерные.