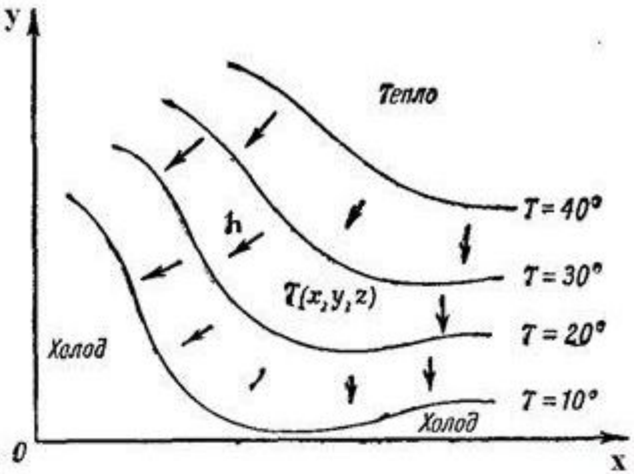
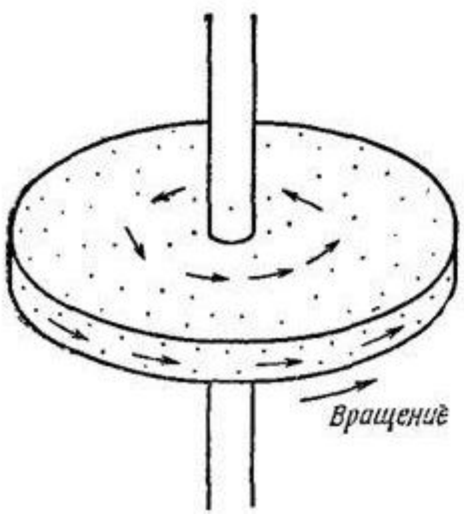
Скалярное поле



Температура Т – это скалярное поле. На рисунке представлены изотермы – линии с равными температурами. Поток тепла от горячей точки к холодной (отмечено стрелками) – это векторное поле

Векторное поле



Пример векторного поля – это скорость атомов во вращающемся теле. Каждый вектор привязан к конкретному атому и имеет разное направление при движении и разное местоположение

$$\overline{grad\ \ u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

$$gradU = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Вычисление градиента скалярной функции

Задана скалярная функция : $f(x,y,z) := x^2 \cdot y \cdot z^3$

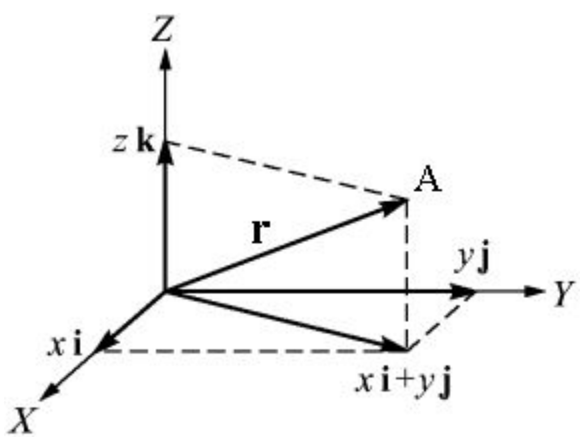
$$Grad(f1, x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f1(x,y,z) \\ \frac{d}{dy} f1(x,y,z) \\ \frac{d}{dz} f1(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Символическое вычисление :

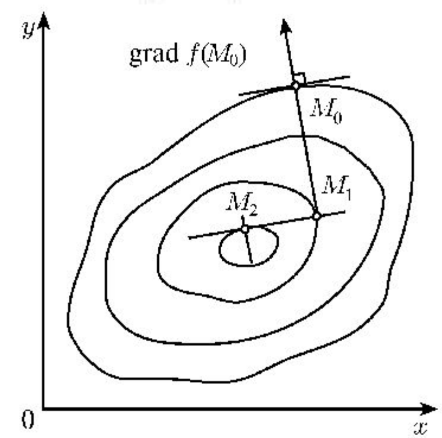
$$Grad(f,x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot y \cdot z^3 \\ x^2 \cdot z^3 \\ 3 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^2 \end{pmatrix}$$

Численное значение в точке (1,2,3):

$$Grad(f,1,2,3) = \begin{pmatrix} 108 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix}$$



Полученный вектор указывает величину и направление максимального возрастания функции .



Для векторного поля введены два оператора первого порядка

$$div\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F}, \quad rot\mathbf{F} = [\nabla\mathbf{F}]$$

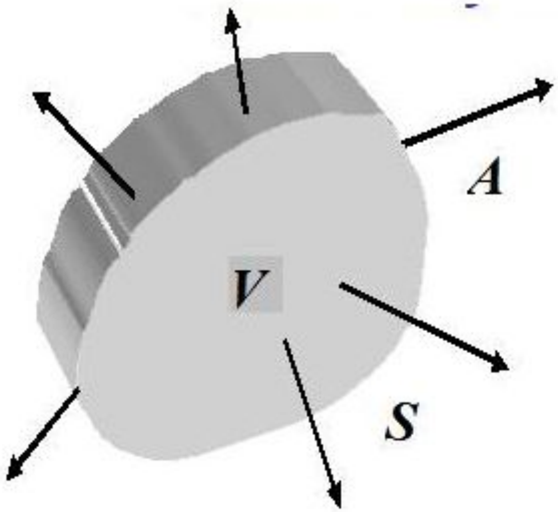
$$\nabla \times \mathbf{U} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{i}U_x + \mathbf{j}U_y + \mathbf{k}U_z) =$$
$$= \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} +$$
$$+ \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{E}} d\vec{\mathrm{S}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

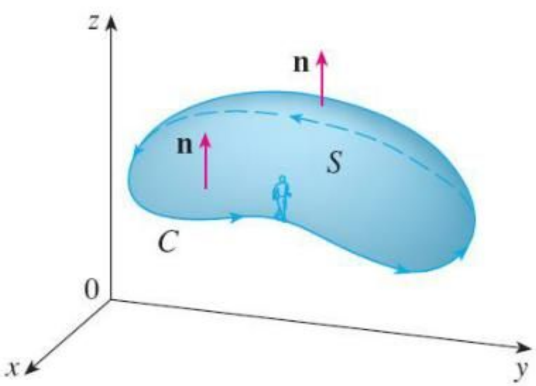
Вихрь (ротор) векторного поля B

$$\mathbf{rot} \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$



Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_V div\vec{A}\,dV$$



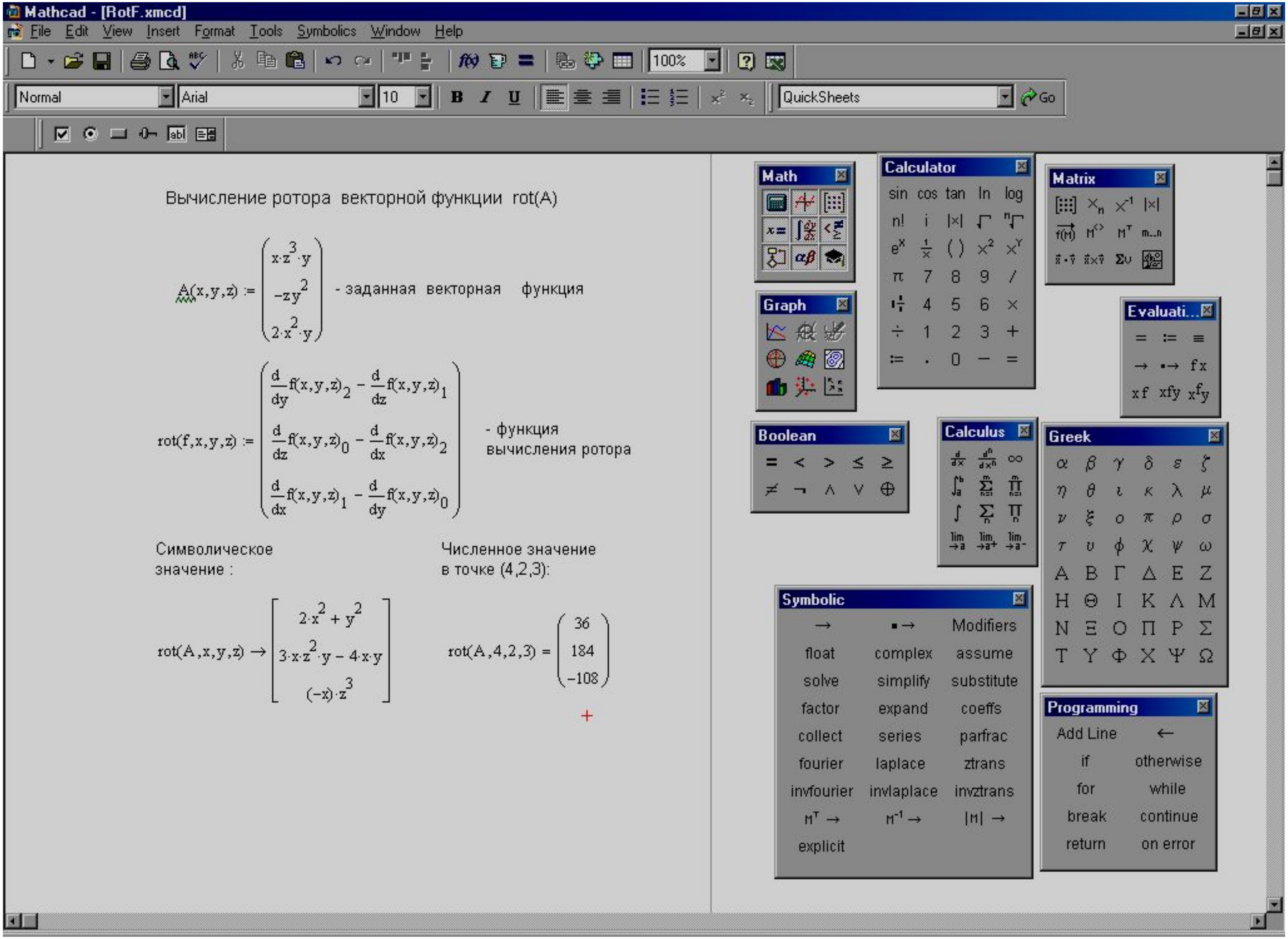
Teorema Stokes

Физический смысл формулы Стокса

- Циркуляция векторного поля вдоль положительного направления контура равна потоку вектора – ротора поля через любую поверхность, натянутую на данный контур:

$$Ц = \oint_{(L)} A\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_{(\sigma)} (\overrightarrow{rotA}\cdot n^0)\,d\sigma$$

(C) (S)


Mathcad - [RotF.xmcd]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Вычисление ротора векторной функции rot(A)
$A(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \cdot z^3 \cdot y \\ -z y^2 \\ 2 \cdot x^2 \cdot y \end{pmatrix}$ - заданная векторная функция
$rot(f,x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy} f(x,y,z)_2 - \frac{d}{dz} f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dz} f(x,y,z)_0 - \frac{d}{dx} f(x,y,z)_2 \\ \frac{d}{dx} f(x,y,z)_1 - \frac{d}{dy} f(x,y,z)_0 \end{pmatrix}$ - функция вычисления ротора
Символическое значение :
Численное значение в точке (4,2,3):
$rot(A,x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot x^2 + y^2 \\ 3 \cdot x \cdot z^2 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y \\ (-x) \cdot z^3 \end{bmatrix}$
$rot(A,4,2,3) = \begin{pmatrix} 36 \\ 184 \\ -108 \end{pmatrix}$
Math
Graph
Calculator
Matrix
Evaluation
Boolean
Calculus
Greek
Symbolic
Programming

Gradient, Divergence and Curl

The Del Operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

- Gradient of a scalar function is a vector quantity. $\nabla f \longrightarrow$ Vector
- Divergence of a vector is a scalar quantity. $\nabla . A$
- Curl of a vector is a vector quantity. $\nabla \times A$
- The Laplacian of a scalar A $\nabla^2 A$

$$grad(div\mathbf{F}) \equiv \nabla(\nabla\mathbf{F})$$

$$div(gradU) \equiv \nabla(\nabla U)$$

$$div(rot\mathbf{F}) \equiv \nabla[\nabla\mathbf{F}]$$

$$rot(gradU) \equiv [\nabla(\nabla U)]$$

$$rot(rot\mathbf{F}) \equiv [\nabla[\nabla\mathbf{F}]]$$

Правило вычисления определителя Δ_3 равносильно правилу треугольников (правилу Саррюса), которое схематически можно записать как

$$\boldsymbol{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ заданы своими координатами, то векторное произведение находится по формуле:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

дивергенция векторного произведения

$$(\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\times\vec{B}]) = (\vec{\nabla}\cdot[\overset{\downarrow}{\vec{A}}\times\vec{B}]) + (\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\times\overset{\downarrow}{\vec{B}}])\,.$$

$$(\vec{\nabla}\cdot[\overset{\downarrow}{\vec{A}}\times\vec{B}]) = (\vec{B}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}]) = (\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A})\,.$$

$$(\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\times\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) = -(\vec{\nabla}\cdot[\overset{\downarrow}{\vec{B}}\times\vec{A}]) = -(\vec{A}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{B}]) = (\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}\,)\,.$$

$$\mathrm{div}\,[\vec{A}\times\vec{B}\,] = (\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B})\,.$$

дивергенции произведения скалярного и векторного полей

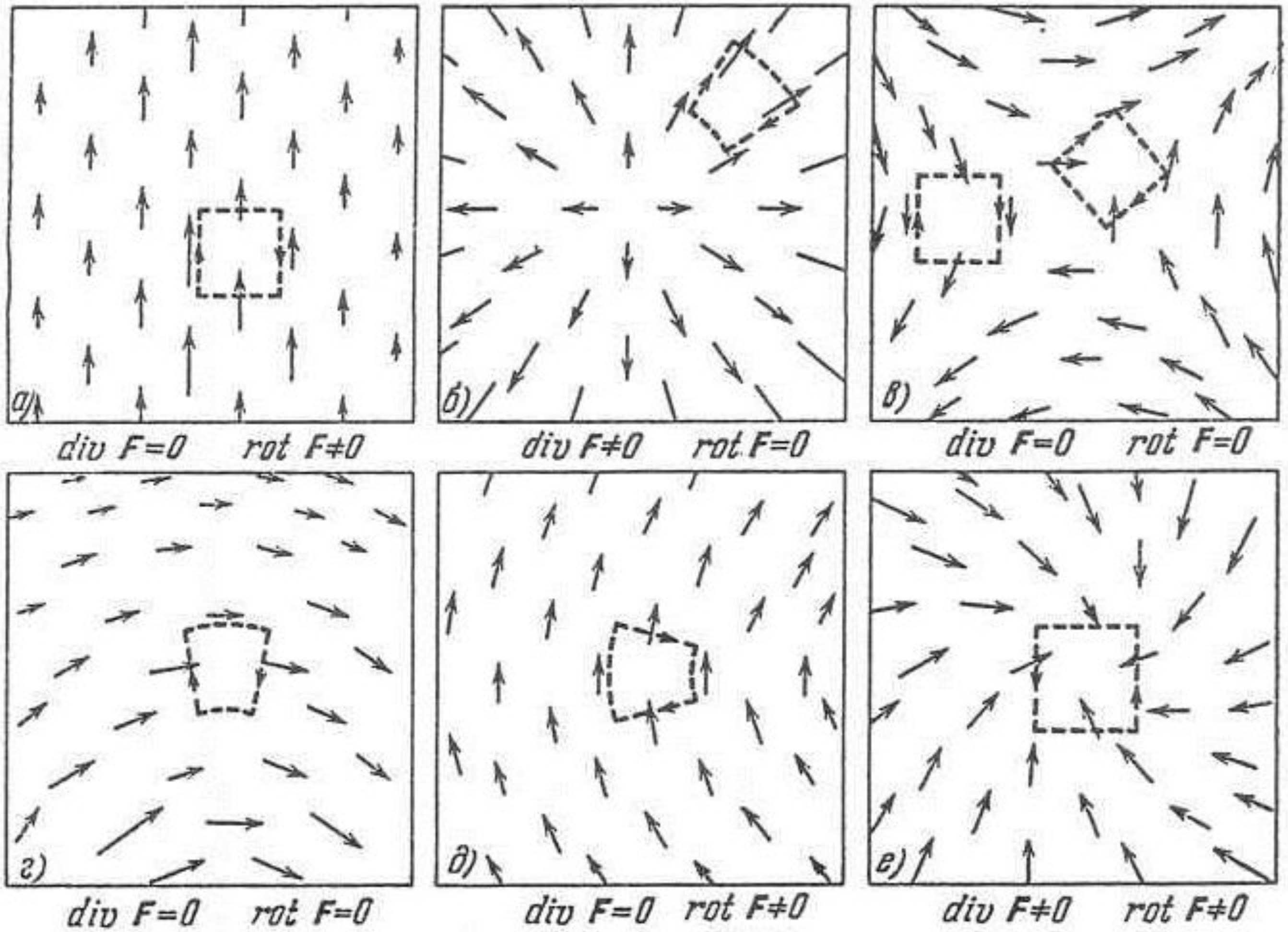
$$\mathrm{div}\,(U\,\vec{A}) = (\vec{\nabla}\cdot U\vec{A}\,)\,.$$

$$(\vec{\nabla}\cdot U\vec{A}\,) = (\vec{\nabla}\cdot\overset{\downarrow}{U}\,\vec{A}\,) + (\vec{\nabla}\cdot U\,\overset{\downarrow}{\vec{A}}\,)\,.$$

$$(\vec{\nabla}\cdot U\vec{A}\,) = (\vec{\nabla}U\cdot\vec{A}\,) + U(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,)\,.$$

$$\mathrm{div}(U\vec{A}) = (\vec{\nabla}\cdot U\vec{A}) = (\vec{A}\cdot\mathrm{grad}U) + U\mathrm{div}\vec{A}\,.$$

Значения дивергенции и ротора векторного поля в выделенной области



http://studbooks.net/2395482/matematika_himiya_fizika/operator_laplasa