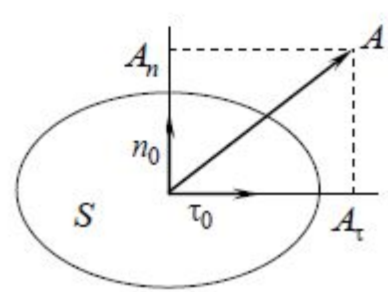
Л 6 Граничные условия для электромагнитного поля.
Основная задача теории электромагнитного поля. Граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля. Уравнения Максвелла в комплексной форме.

Основной задачей теории электромагнитного поля является нахождение его векторов (**E, D, H, B**) в определенной области пространства при заданных условиях, которые отражают предварительные сведения об электромагнитном процессе.
Задача имеет реальное физическое содержание, если эти сведения правильны и если они достаточны. Для определения поля внутри какой-либо области надо иметь некоторые данные о его характере на границе, например, границы между различными диэлектриками, границы между диэлектриками и проводниками, границы, на которых сосредоточены заряды или по которым протекают токи.

Нормальные и тангенциальные составляющие векторов

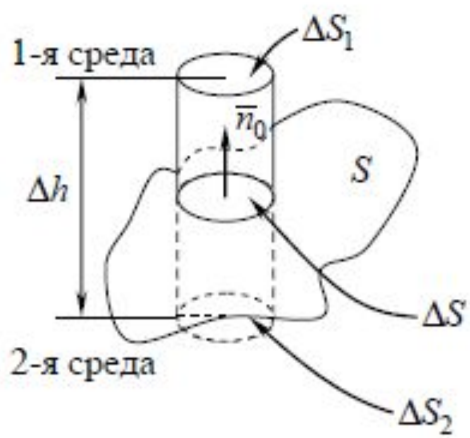
поверхность *S* — граница раздела двух сред,
A — произвольно ориентированный вектор,
начало которого находится в точке на поверхности *S,*
$\boldsymbol{n}_0$ — нормаль к поверхности,
$\boldsymbol{\tau}_0$ — касательный к поверхности *S* единичный вектор
Векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{\tau}_0$ лежат в одной плоскости.



$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}_0 A_n + \boldsymbol{\tau}_0 A_\tau$$

Любой вектор вблизи граничной поверхности может быть представлен в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих.

Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля



уравнение Максвелла $\oint\limits_S \overline{D}d\overline{S} = q$,

где S — вся поверхность цилиндра.

$$\oint\limits_{S_{бок}} \overline{D}d\overline{S} + \oint\limits_{\Delta S_1} \overline{D}_1 d\overline{S} + \oint\limits_{\Delta S_2} \overline{D}_2 d\overline{S} = \oint\limits_V \rho dV.$$

$\Delta h \to 0$ $\quad \oint\limits_{S_{бок}} \overline{D}d\overline{S} \to 0$ $\quad \overline{D}_1\overline{n}_0\Delta S - \overline{D}_2\overline{n}_0\Delta S = q$

q — заряд, сосредоточенный на поверхности ΔS

$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S}$ $\quad q = \sigma\,\Delta S.$ $\quad \overline{D}_1\overline{n}_0 - \overline{D}_2\overline{n}_0 = \sigma$

В векторной форме $\sigma = \overline{n}_0\left(\overline{D}_1 - \overline{D}_2\right).$

Таким образом, нормальная составляющая вектора $\overline{D}$ на границе раздела двух сред терпит разрыв, равный поверхностной плотности заряда.

1. Граница двух идеальных диэлектриков.

$\sigma = 0$ $\quad D_{1n} = D_{2n}$

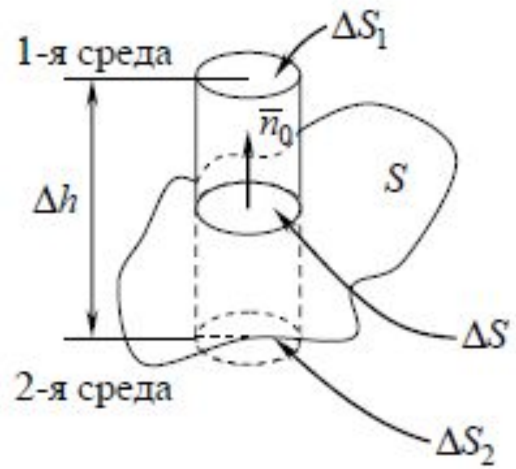
2. Граница «идеальный диэлектрик – идеальный проводник».

Поле в идеальном проводнике $D_{2n} = 0$

$$D_{1n} = \sigma \text{ или } \sigma = (\overline{n}_0, \overline{D}).$$

Таким образом, для отыскания поверхностной плотности заряда достаточно определить нормальную компоненту вектора электрического смещения на границе с проводником.

Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля



уравнение Максвелла $\oint_S \overline{B}d\overline{S} = 0$.

$$\oint_{S_{бок}} \overline{B}\, d\overline{S} + \oint_{\Delta S_1} \overline{B}_1 d\overline{S} + \oint_{\Delta S_2} \overline{B}_2 d\overline{S} = 0$$

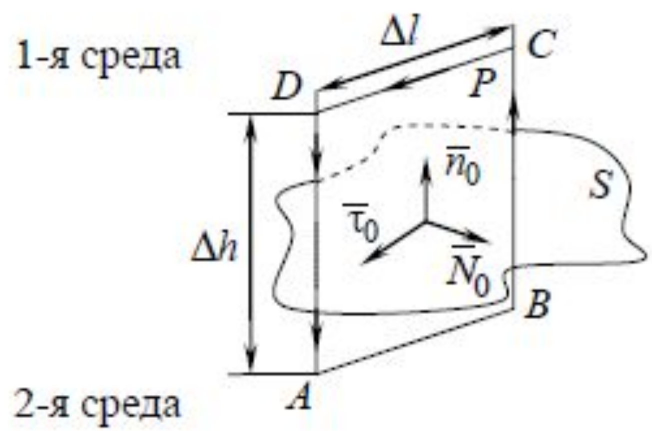
$$\Delta h \to 0 \quad \oint_{S_{бок}} \overline{B}\, d\overline{S} \to 0 \quad \overline{B}_1 \overline{n}_0 \Delta S - \overline{B}_2 \overline{n}_0 \Delta S = 0$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad B_{1n} = \mu_1 H_{1n} \quad B_{2n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \ \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

μ1 и μ2 — абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно.

Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля



уравнение Максвелла: $\oint \bar{H}\,\overline{dl} = I$

$$I = \int_{AB} \bar{H}_2 d\bar{l} + \int_{BC} \bar{H} d\bar{l} + \int_{CD} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{DA} \bar{H} d\bar{l} .$$

размеры контура очень малы и в его пределах поле однородно

$$I = \bar{H}_2(-\bar{\tau}_0)\Delta l + \bar{H}\bar{n}_0\Delta h + \bar{H}_1\bar{\tau}_0\Delta l - \bar{H}\bar{n}_0\Delta h.$$

Устремим $\Delta h \to 0$ $\quad I = \bar{H}_1\bar{\tau}_0\Delta l - \bar{H}_2\bar{\tau}_0\Delta l .$

Поверхностным током будем называть приведенный в движение поверхностный заряд. Плотность поверхностного тока определяется формулой

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l},$$

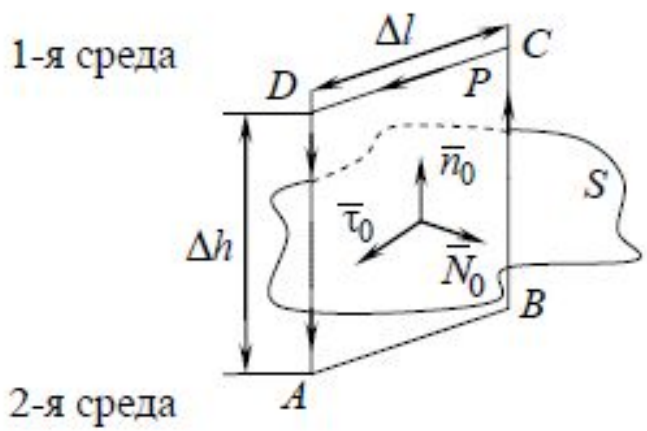
где $\bar{\eta}_0$ — орт, показывающий направление тока;

ΔI — часть тока, пересекающая отрезок Δl .

$$\bar{H}_1\bar{\tau}_0 - \bar{H}_2\bar{\tau}_0 = \eta_N \quad \text{или} \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta_N ,$$

При наличии поверхностного тока на границе раздела тангенциальная составляющая напряженности вектора магнитного поля терпит разрыв, равный его плотности.

Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля



уравнение Максвелла $\oint\limits_l \overline{E}d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int \overline{B}d\overline{S}$.

аналогичные рассуждения приводят к соотношению

$$\overline{E}_1\overline{\tau}_0\Delta l - \overline{E}_2\overline{\tau}_0\Delta l = -\frac{d}{dt}(B\Delta h\Delta l).$$

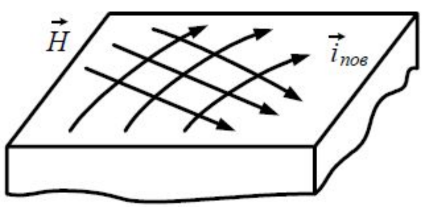
Устремив высоту контура к нулю, получим

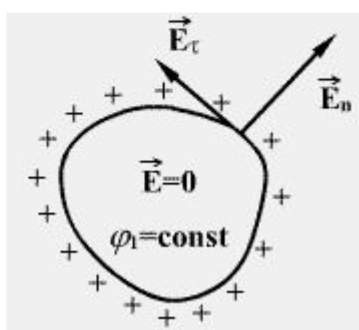
Устремим $\Delta h \to 0$ $\quad E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$.

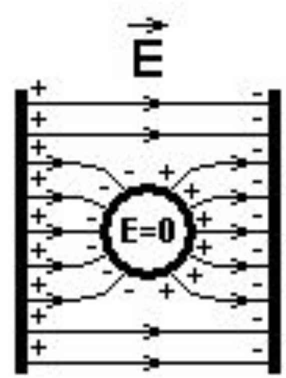
тангенциальная составляющая вектора $\overline{E}$ непрерывна на границе с любой средой.

1. Граница двух идеальных диэлектриков. В этом случае нет свободных зарядов, т.е. $\sigma = 0$, следовательно, $D_{1n} = D_{2n}$.

2. Граница «идеальный диэлектрик – идеальный проводник». Поле в идеальном проводнике равно нулю, значит, $D_{2n} = 0$ и $D_{1n} = \sigma$. $E_{2\tau} = 0$, то $E_{1\tau} = 0$. Значит, линии вектора *E и D* всегда перпендикулярны поверхности идеального проводника. Таким образом, для отыскания поверхностной плотности заряда достаточно определить нормальную компоненту вектора электрического смещения на границе с проводником. $H_{2\tau} = 0$, тогда $H_{1\tau} = \eta N$ на границе с идеальным проводником при наличии магнитного поля всегда возникает поверхностный ток.





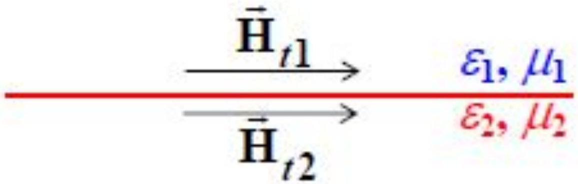


Электростатическкая защита.

Электростатическое поле не проникает внутрь проводника

SUMMARY

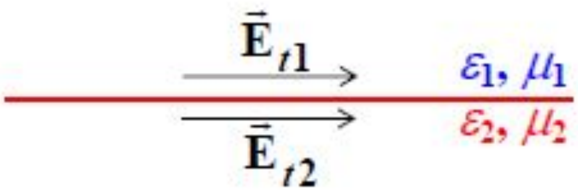
If medium 2 is perfect conductor



$$\vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2}$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{t1} = \vec{J}_s$$

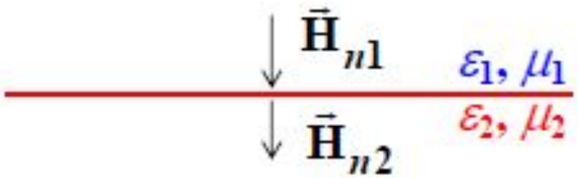
$$\vec{H}_{t2} = 0$$



$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$$

$$\vec{E}_{t1} = 0$$

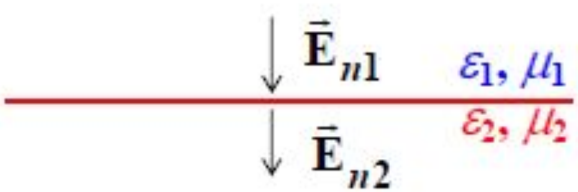
$$\vec{E}_{t2} = 0$$



$$\mu_1 \vec{H}_{n1} = \mu_2 \vec{H}_{n2}$$

$$\vec{H}_{n1} = 0$$

$$\vec{H}_{n2} = 0$$



$$\varepsilon_1 \vec{E}_{n1} = \varepsilon_2 \vec{E}_{n2} + \rho_S$$

$$\vec{E}_{n1} = \rho_S / \varepsilon_1$$

$$\vec{E}_{n2} = 0$$

Монохроматическое поле, метод комплексных амплитуд

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \bar{A} = \bar{A}_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где ω — круговая частота гармонических колебаний; φ — фаза.

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \psi_m \left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right),$$

$$\dot{\bar{A}} = \bar{A}_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \bar{A}_m \left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right).$$

$$\psi = \mathrm{Re}\,\dot{\psi} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \mathrm{Re}\,\dot{\bar{A}}.$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}\dot{\bar{A}} = j\omega\dot{\bar{A}}$. $\dot{\psi} = \dot{\psi}_m e^{j\omega t}$ и $\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{A}}_m e^{j\omega n}$, где $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{j\varphi}$ и $\dot{\bar{A}}_m = \bar{A}_m e^{j\varphi}$ — комплексные амплитуды.

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_m e^{j\varpi t}, \ \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_m e^{j\varpi t},$$

где $\left.\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_m &= \bar{E}_m e^{-jkz}, \\ \dot{\bar{H}}_m &= \bar{H}_m e^{-jkz} \end{aligned}\right\}$ — комплексные амплитуды векторов поля.

Теперь можем записать:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \sigma\bar{E} + \varepsilon\frac{d\bar{E}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\dot{\bar{H}} = \sigma\dot{\bar{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\bar{E}};$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\mu\frac{d\bar{H}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}} = -j\mu\omega\dot{\bar{E}}.$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\bar{E}}_m;$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_m = -j\omega\mu\dot{\bar{H}}_m.$$

$\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega} = \dot{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Обозначим $\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = \dfrac{\sigma}{\omega}$, тогда $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$.

$\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg}\Delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь.

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\bar{E}}_m;$$

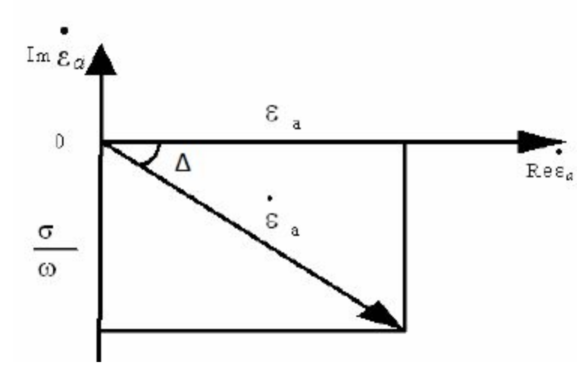
$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_m = -j\omega\mu\dot{\bar{H}}_m.$$

$\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega} = \dot{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Обозначим $\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = \dfrac{\sigma}{\omega}$, тогда $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$.

$\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg}\Delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь.

$\dot{\mu} = \mu' - j\mu''$, $\dfrac{\mu''}{\mu'} = \operatorname{tg}\Delta_м$ — потери на перемагничивание.



Уравнения Максвелла

для комплексных векторов —

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{\bar{E}},$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -j\omega\dot{\mu}\dot{\bar{H}};$$

для комплексных амплитуд —

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_m = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{\bar{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_m = -j\omega\dot{\mu}\dot{\bar{H}}_m.$$

$$\operatorname{div} \dot{\bar{E}} = 0;$$

$$\operatorname{div} \dot{\bar{H}} = 0.$$

$$\operatorname{div}\bar{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t};\quad \operatorname{div}\dot{\bar{j}} = -j\omega\dot{\rho};\quad \dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega}\operatorname{div}\dot{\bar{j}};$$

$$\dot{\bar{j}} = \sigma\dot{\bar{E}};$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{j\omega}\operatorname{div}\dot{\bar{E}};\quad \operatorname{div}\dot{\bar{D}} = \dot{\rho};$$

$$\operatorname{div}\dot{\varepsilon}\dot{\bar{E}} + \frac{\sigma}{j\omega}\operatorname{div}\dot{\bar{E}} = 0;\quad \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\operatorname{div}\dot{\bar{E}} = 0.$$

Так как выражение в скобках не может равняться нулю, $\operatorname{div}\dot{\bar{E}} = 0$.