КИНЕМАТИКА

Решение задач

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Движение точки М задано уравнениями:

$$x = f_1(t) = 2 \cdot t \qquad y = f_2(t) = t^2$$

x и *y* выражены в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки в момент времени

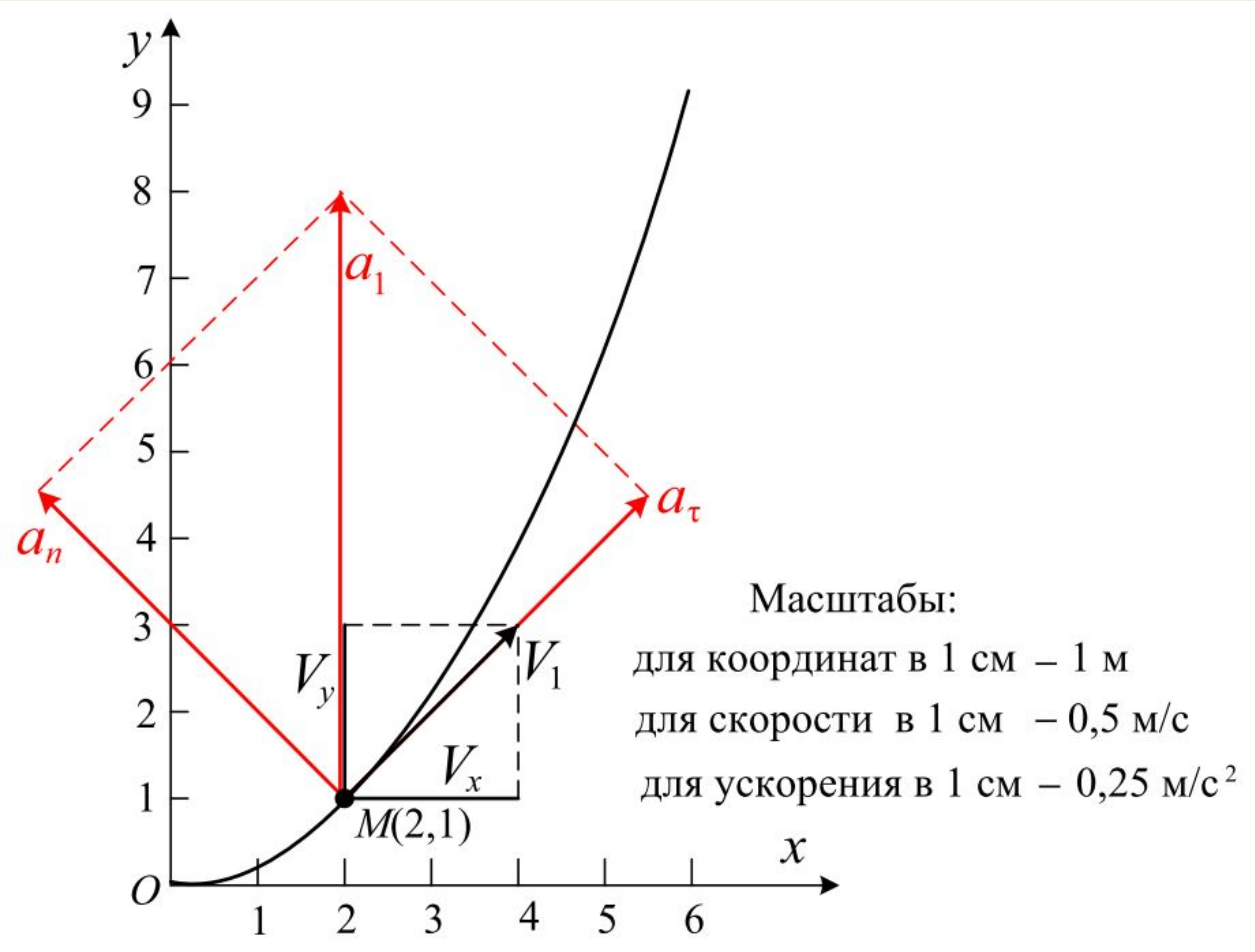
Движение точки, заданное координатным способом, происходит в плоскости *Oxy*.
Для определения уравнения траектории выразим время *t* из уравнения движения вдоль оси *x*.

$$t = \frac{x}{2} \geq 0$$

и подставив в уравнение движения по оси *y*, получим

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Следовательно, траекторией точки является ветвь параболы (рисунок 1) при $x \geq 0$.
В момент времени $t = 1$ с точка находится в положении М (2,1)



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
1
2
3
4
5
6
x
a_1
a_n
a_τ
V_y
V_x
V_1
$M(2,1)$
Масштабы:
для координат в 1 см – 1 м
для скорости в 1 см – 0,5 м/с
для ускорения в 1 см – 0,25 м/с^2

Рисунок 1

Вычислим проекции скорости и ускорения точки на декартовые оси при $t = 1$ с

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(2 \cdot t\right)}{dt} = 2 \quad /$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(t^2\right)}{dt} = 2 \cdot t = 2 \cdot 1 = 2 \quad /$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d\left(2\right)}{dt} = 0 \quad /\ ^2$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d\left(2 \cdot t\right)}{dt} = 2 \quad /\ ^2$$

Тогда в декартовой системе координат векторы скорости и ускорения точки равны.
Найдем их модули.

$$V_1 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2\cdot\sqrt{2}\ м/с \qquad a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\ м/с^2$$

Определим направления векторов по формулам

$$\cos\left(\widehat{\overline{V}_1\ \bar{i}}\right) = \frac{V_x}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(\widehat{\vec{V}_1\ \vec{j}}\right) = \frac{V_y}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{a}_1\ \bar{i}}\right) = \frac{a_x}{a_1} = 0 \qquad \cos\left(\widehat{\vec{a}_1\ \vec{j}}\right) = \frac{a_y}{a_1} = 0$$

Следовательно, вектор скорости образует с осями *Ox* и *Oy* углы, равные 45°, а вектор ускорения точки М направлен вдоль оси *Oy*.

Поскольку точка М движется по кривой, то вектор её ускорения

разложим на касательное ускорение и нормальное ускорение. Определим касательное ускорение точки в момент времени 1 с.

$$a_\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{0+4}{2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ м/с^2$$

Вычислим нормальное ускорение точки в этот момент времени

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\ м/с^2$$

Тогда в данном положении точки радиус кривизны траектории равен

$$\rho = \frac{V_1^2}{a_n} = \frac{\left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = 5,64\,м\,/\,с^2$$

ЗАДАЧА РЕШЕНА

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Точка В движется в плоскости xy. Закон движения точки задан уравнениями

$$x = f_1(t) = 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \qquad y = f_2(t) = -4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах. Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения времени *t*

$$x = 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \qquad y = -4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$\left(x = 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right)^2 \qquad y = -4 \cdot \left(1 - \cos^2\right)\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \qquad y = -4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \qquad \frac{y+4}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$x^2 = \frac{y+4}{4}$$

$$x^2 \cdot 4 = y + 4$$

$$4 \cdot x^2 - 4 = y$$

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(6\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\right)' = -6\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{6\cdot\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right) = -\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)$$

$$v_x = -\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{6}\right) = 1,57 \text{ см/с}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left(-4\cdot\sin^2\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\right)' = -4\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{-4\cdot\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)$$

$$v_y = \frac{-4\cdot\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) = -1,81 \text{ см/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{1,57^2 + (-1,81)^2} = 2,396 \approx 2,4 \text{ см/с}$$

Аналогично находим ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(-\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$$

$$a_x = -\frac{\pi^2}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = -1,396 \approx -1,4 \; м / с^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{-4 \cdot \pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)\right)' = -\frac{2 \cdot \pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$$

$$a_y = -\frac{2 \cdot \pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) = -1,095 \; м / с^2$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{(-1,4)^2 + (1,095)^2} = 1,77 см / с^2$$

Определяем касательное ускорение

$$a_\tau м{=}с\,\frac{-1,57\cdot 1,4+1,81\cdot 1,095}{2,4}=-0,11 \quad / \quad {}^2$$

Определяем нормальное ускорение

$$a_n м{=}с\sqrt{a^2-a_\tau{}^2}=\sqrt{1,77^2-\left(-0,11\right)^2}=1,766 \quad / \quad {}^2$$

Определяем радиус кривизны траектории

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{2,4^2}{1,766}=3,262см$$

ЗАДАЧА РЕШЕНА