

Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую, кроме упругой силы ($-kx$) и сил сопротивления ($-r \cdot v$), действует добавочная *периодическая сила* F – **вынуждающая сила**.

Для колебаний вдоль оси x запишем:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x \quad (7.1)$$

– **основное уравнение колебательного процесса**, или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x \quad (7.2)$$

где $f_x = F_x/m$ – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону: $f_x = F_0 \cos \omega t$.

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы ω . Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$X = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.3)$$

Задача: найти амплитуду A и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Воспользуемся тем, что скорость на $\pi/2$ опережает смещение, а ускорение на $\pi/2$ опережает скорость:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi / 2).$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi - \pi / 2).$$

Подставим эти уравнения в уравнение (7.2)

$$\omega^2 A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA} \cos \omega t$$

Каждое слагаемое этого уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды:

$A_1 = \omega^2$ – амплитуда ускорения; $A_2 = 2\beta\omega$ – амплитуда скорости; $A_3 = \omega_0^2$ – амплитуда смещения; $A_4 = F_0 / mA$ – амплитуда вынуждающей силы, причем $A_3 > A_1$.

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

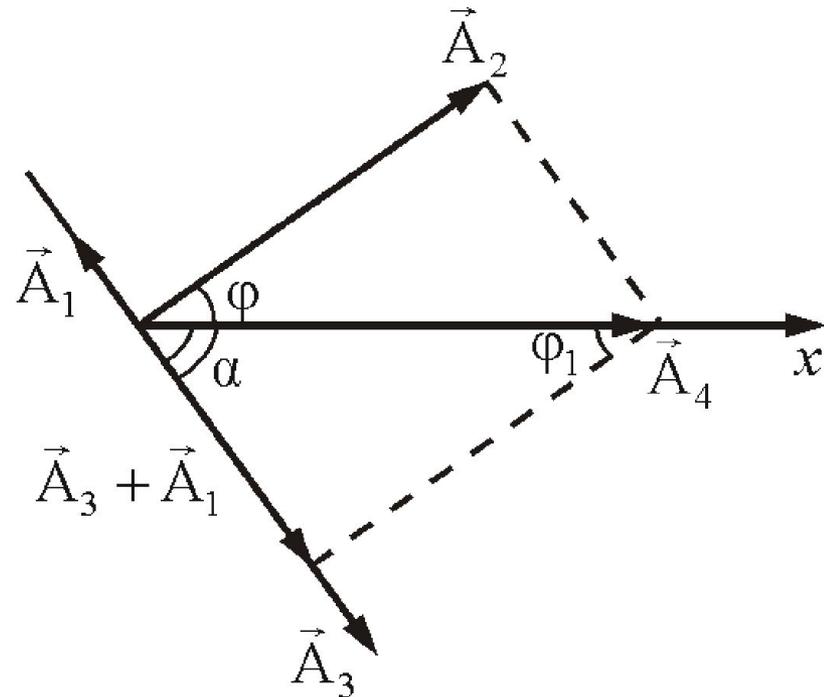
Из рисунка видно, что

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$$

Тогда

$$A = \frac{F_0}{mA_4} = \frac{F_0}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

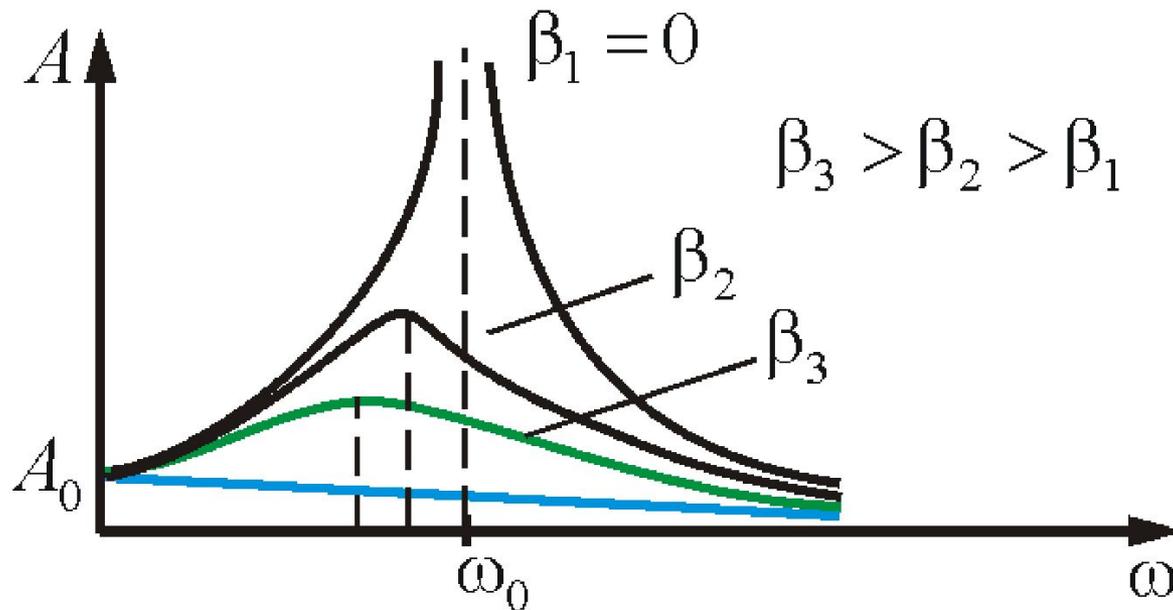


Таким образом, $A \sim F_0/m$ и $\sim 1/\beta$.

При постоянных F_0 , m и β амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы ω и свободных незатухающих колебаний системы ω_0 .

Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}.$$



г) физический маятник

Физический маятник – твердое тело, которое может совершать колебания под действием собственной силы тяжести mg вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой осью качания. Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс. Как правило, силой трения в подвесе маятника пренебрегают и момент относительно оси качания маятника создает только его сила тяжести mg .

При отклонении маятника на угол α момент, создаваемый силой тяжести равен:

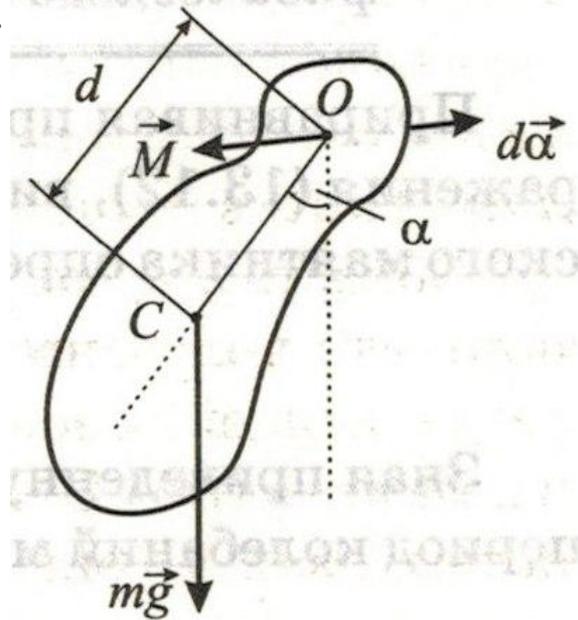
$$M = mgd \sin \alpha .$$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (для тела с моментом инерции J , вращающегося вокруг неподвижной оси в отсутствие трения):

$$M = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -mgd \cdot \sin \alpha .$$

При малых $\alpha \rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgd}{J} \cdot \alpha = 0$$



Сравнивая с уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний: $d^2x/dt^2 + \omega^2x = 0$, имеем для физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Предельным случаем физического маятника является математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Вся масса сосредоточена в центре масс тела. При этом $d=l$ - длина маятника и момент инерции $J = ml^2$. Тогда

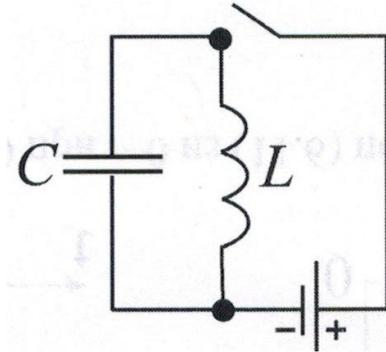
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник, называется приведенной длиной физического маятника. Точка O_1 , находящаяся на расстоянии l_{np} от точки подвеса O маятника, называется **центром качания** физического маятника. Точки O и O_1 обладают свойством взаимности, т.е. при перемене их ролей длина и период маятника останутся прежними.

Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Простейшим колебательным контуром является замкнутая цепь, состоящая из емкости C и катушки индуктивности L .

По закону Ома для замкнутой цепи: *сумма падений напряжений на проводниках сопротивлением R и на конденсаторе U_c равна ЭДС самоиндукции в контуре*



$$IR + U_c = IR + Q/C = \varepsilon_{si} = -L(dI/dt).$$

$$I = dQ/dt \rightarrow dI/dt = d^2Q/dt^2,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (R \rightarrow 0) \rightarrow d^2Q/dt^2 + \omega^2 Q = 0$$

$$\omega = 1/\sqrt{LC},$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{LC}.$$

$$Q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ и } I = dQ/dt = \omega Q_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W = W_{эл} + W_{магн} = (1/2) \cdot (LI^2 + CU^2)$$

Сложение гармонических колебаний.

Фигуры Лиссажу

Сложение колебаний – нахождение значения результирующих колебаний системы при ее участии в нескольких колебательных процессах. Различают сложение **сонаправленных** и **взаимноперпендикулярных** колебаний.

Используем метод векторных диаграмм.

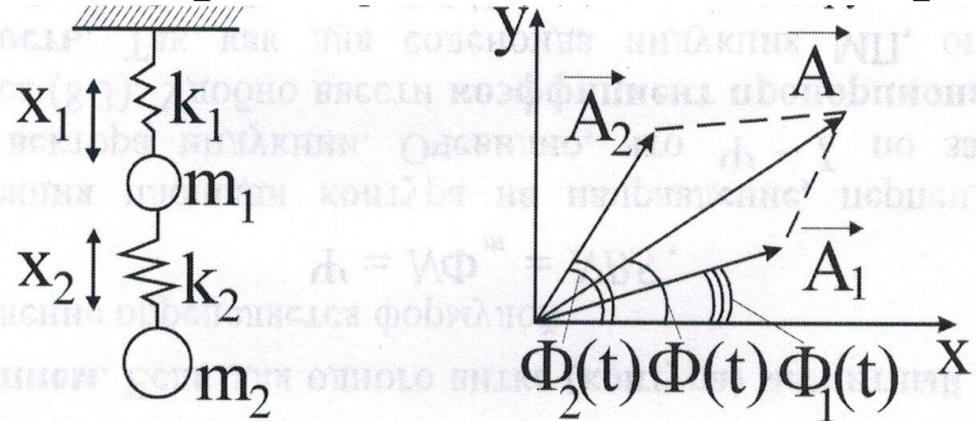
$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \sin \Phi_1(t)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \sin \Phi_2(t)$$

Результирующее колебание: $x = x_1 + x_2 = A \sin \Phi(t)$, где амплитуда

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\operatorname{tg} \hat{O}(t) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin \hat{O}_1(t) + A_2 \sin \hat{O}_2(t)}{A_1 \cos \hat{O}_1(t) + A_2 \cos \hat{O}_2(t)}$$



Когерентными называются колебания, разность фаз которых во времени постоянна; т.к. $\Phi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1) = const$, то это выполняется при $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, тогда $x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \phi_0)$, где амплитуда A и фаза Φ результирующего колебания. Тогда в зависимости от значения $(\phi_2 - \phi_1)$ результирующая амплитуда A изменяется в пределах от $A = |A_1 - A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, до $A = |A_1 + A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ ($m \rightarrow$ целые числа).

При $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ колебания называются **синфазными** (в одной фазе), а при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ – **противофазными**.

При $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующий вектор A будет изменяться по длине и вращаться с переменной скоростью. При сложении колебаний с близкими частотами ($\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega$) возникают, так называемые, **биения**, тогда $x_1 = x_m \cos \omega t$, $x_2 = x_m \cos(\omega t + \Delta\omega t)$.

$$\begin{aligned}
 x(t) = x_1 + x_2 &= 2x_m \cos \frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2} \cos \frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} = \\
 &= 2x_m \cos \omega t \cos \frac{\Delta\omega t}{2} = \bar{x}_m \cos \omega t
 \end{aligned}$$

$$[2\omega t \gg \Delta\omega; \cos(-\Delta\omega t) = \cos(\Delta\omega t)]$$

$$\bar{x}_m = 2x_m \left| \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right| \quad x(t) = \bar{x}_m \cos \omega t$$

Косинус берется по модулю, так как функция четная и поэтому частота биений $\omega_b = \Delta\omega$, а не $\Delta\omega/2$.

Период биений равен половине периода модуляции:

$$T_b = T_{\text{мод}}/2 = 2\pi/(\Delta\omega)$$

