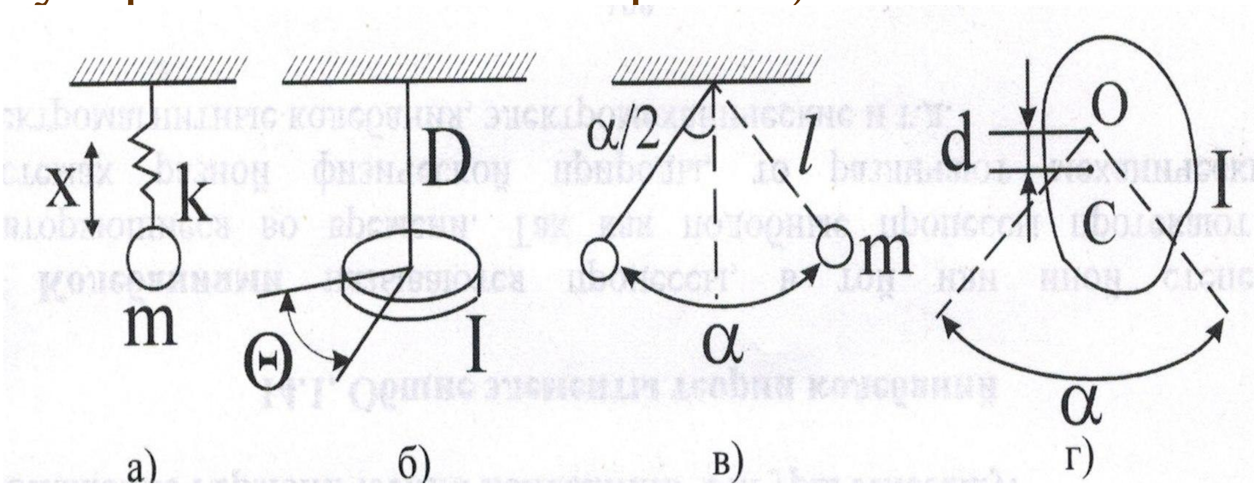
ЛЕКЦИЯ №8
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Механические гармонические колебания (на примере маятников)

Если физическую систему, обладающую состоянием устойчивого равновесия, вывести из этого состояния каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, то возникающие в системе **колебания** вблизи устойчивого равновесия называют **собственными** или **свободными**.

Способную совершать собственные колебания систему называют **осциллятором**. Примером **линейных (одномерный случай) осцилляторов** могут служить маятники (рис.): а) пружинный (груз на пружине); б) крутильный (диск на проволоке); в) математи-ческий (материальная точка на нерастяжимой нити); г) физический (C – центр масс твердого тела, O – точка прохождения оси коле-баний, перпендикулярной плоскости чертежа).



Рассмотрим случай а)– пружинный маятник.

Второй закон Ньютона для колеблющегося тела для одномерного случая можно записать в виде: $m \cdot a_x = F_x = -k \cdot x$ или

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

$$x = X_{max} \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Система, совершающая колебания под действием квазиупругой силы , называется **линейным гармоническим** осциллятором (ЛГО).

Кинетическая энергия материальной точки (колеблющегося тела):

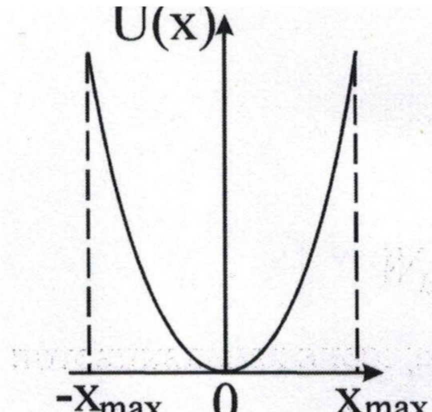
$$W_{\hat{e}} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$$

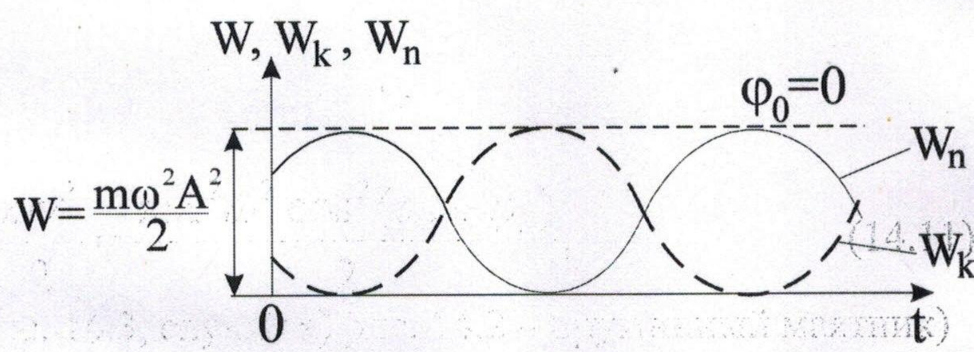
Потенциальная энергия (пружинный маятник):

$$W_{п} = U = -\int_0^x F_x dx = -\int_0^x m a_x dx = -\int_0^x m(-\omega_0^2 x) dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

Полная механическая энергия:

$$W = W_{к} + W_{п} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$





Классическая колеблющаяся точка не может выйти за границы отрезка $[-x_{max};+x_{max}]$, т.е. находится в потенциальной яме параболической формы.

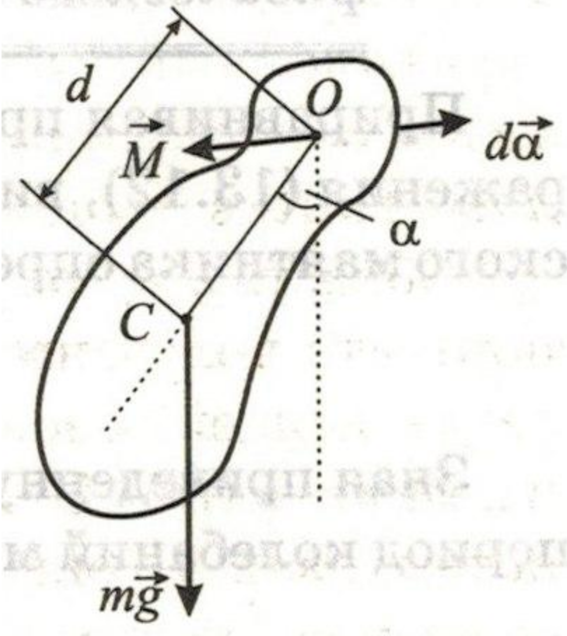
Колебания W_k и W_n совершаются со сдвигом по фазе на π и, следовательно, **полная механическая энергия материальной точки при свободных незатухающих гармонических колебаниях не изменяется со временем** (const).

г) физический маятник

Физический маятник – твердое тело, которое может совершать колебания под действием собственной силы тяжести ***mg*** вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой осью качания. Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс. Как правило, силой трения в подвесе маятника пренебрегают и момент относительно оси качания маятника создает только его сила тяжести ***mg***.

При отклонении маятника на угол α момент, создаваемый силой тяжести равен:

$$M = mgd\, \sin\alpha\ .$$



Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (для тела с моментом инерции I, вращающегося вокруг неподвижной оси в отсутствие трения):

$$M = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -mgd \cdot \sin\alpha .$$

При малых α → sinα ≈ α →

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{mgd}{J} \cdot \alpha = 0$$

Сравнивая с уравнением свободных незатухающих гармонических колебаний: $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, имеем для физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

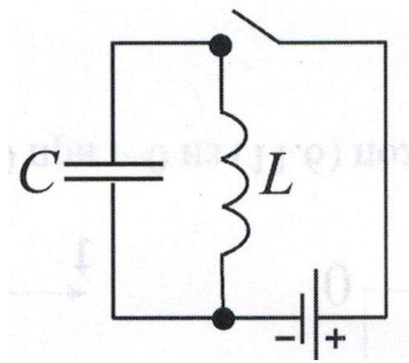
Предельным случаем физического маятника является математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Вся масса сосредоточена в центре масс тела. При этом ***d=l*** – длина маятника и момент инерции $\boldsymbol{J = ml^2}$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник, называется ***приведенной длиной физического маятника.*** Точка O_1, находящаяся на расстоянии $l_{пр}$ от точки подвеса О маятника, называется **центром качания** физического маятника. Точки О и O_1 обладают свойством взаимности, т.е. при перемене их ролей длина и период маятника останутся прежними.

Свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре

Простейшим колебательным контуром является замкнутая цепь, состоящая из емкости *C* и катушки индуктивности *L*.



По закону Ома для замкнутой цепи: *сумма падений напряжений на проводниках сопротивлением R и на конденсаторе U_c равна ЭДС самоиндукции в контуре*

$$IR + U_c = IR + Q/C = \varepsilon_{si} = -L(dI/dt).$$

$$I = dQ/dt \rightarrow dI/dt = d^2Q/dt^2,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (R\rightarrow 0) \quad \rightarrow \quad d^2Q/dt^2 + \omega^2 Q = 0$$

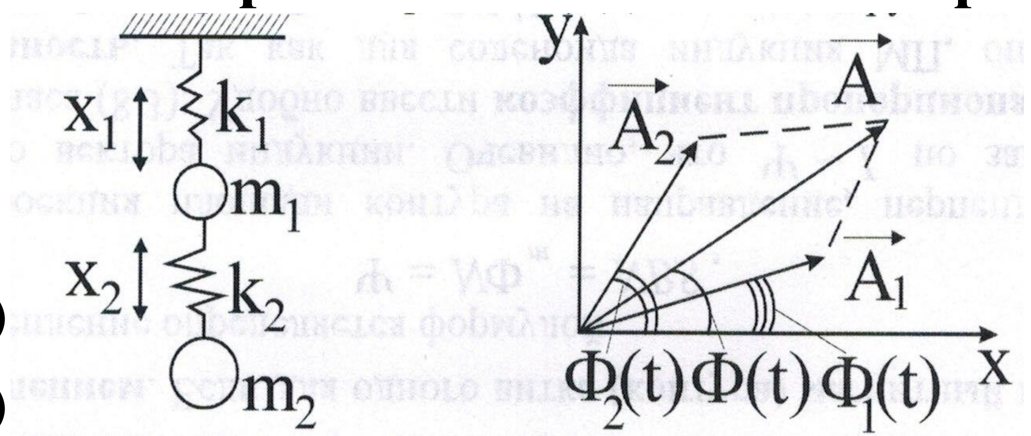
$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \qquad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}.$$

$$Q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ и } I = dQ/dt = \omega Q_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W = W_{эл} + W_{магн} = (1/2)\cdot(LI^2 + CU^2)$$

Сложение гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу

Сложение колебаний – нахождение значения результирующих колебаний системы при ее участии в нескольких колебательных процессах. Различают сложение **сонаправленных** и **взаимноперпендикулярных** колебаний.



Используем метод векторных диаграмм.

$$x_1 = A_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 sin\Phi_1(t)$$

$$x_2 = A_2 sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 sin\Phi_2(t)$$

Результирующее колебание: $x = x_1 + x_2 = A sin\Phi(t)$, где амплитуда

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 cos(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$tg\hat{O}(t) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin \hat{O}_1(t) + A_2 \sin \hat{O}_2(t)}{A_1 \cos \hat{O}_1(t) + A_2 \cos \hat{O}_2(t)}.$$

Когерентными называются колебания, разность фаз которых во времени постоянна; т.к. $\Phi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1) = const$, то это выполняется при $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, тогда $x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \phi_0)$, где амплитуда A и фаза Φ результирующего колебания. Тогда в зависимости от значения $(\phi_2 - \phi_1)$ результирующая амплитуда A изменяется в пределах от $A = |A_1 - A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, до $A = |A_1 + A_2|$ при $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ ($m \rightarrow$ целые числа).

При $\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m$ колебания называются ***синфазными*** (в одной фазе), а при $\phi_2 - \phi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ – ***противофазными***.

При $\omega_1 \neq \omega_2$ результирующий вектор A будет изменяться по длине и вращаться с переменной скоростью. При сложении колебаний с близкими частотами $(\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| << \omega)$ возникают, так называемые, ***биения***, тогда $x_1 = x_m \cos\omega t$, $x_2 = x_m \cos(\omega t + \Delta\omega t)$.

$$x(t) = x_1 + x_2 = 2x_m \cos\frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2} \cos\frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} =$$

$$= 2x_m \cos\omega t \cos\frac{\Delta\omega t}{2} = \bar{x}_m \cos\omega t$$

[2ωt >>Δω; cos(-Δωt)=cos(Δωt)]

$$\bar{x}_m = 2x_m \left|\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right| \qquad x(t) = \bar{x}_m \cos\omega t$$

Косинус берется по модулю, так как функция четная и поэтому частота биений $\omega_б = \Delta\omega$, а не $\Delta\omega/2$.

Период биений равен половине периода модуляции:

$T_б = T_{мод}/2 = 2\pi/(\Delta\omega)$