ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

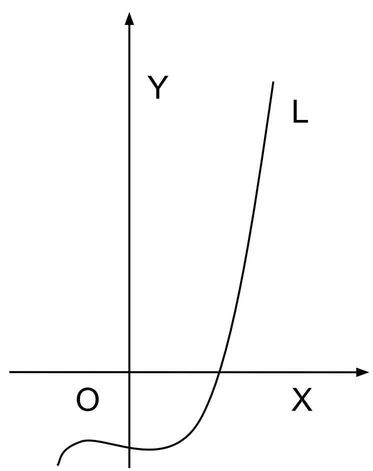
План лекции

1. Линии и их уравнения.
2. Линии первого порядка.

1. Линии и их уравнения

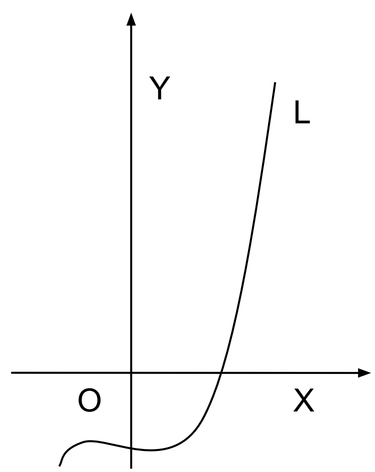
1. Линии и их уравнения

- **Опр.** Равенство вида F(x,y)=0 будем называть уравнением с двумя переменными x и y, если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y.



1. Линии и их уравнения

- **<u>Опр.</u>** Уравнение $F(x,y)=0$ называется уравнением линии L (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии L.



1. Линии и их уравнения

<u>Примеры</u>

- $x- y=0$

$x= y$ – прямая, биссектриса 1 и 3 координатных четвертей;

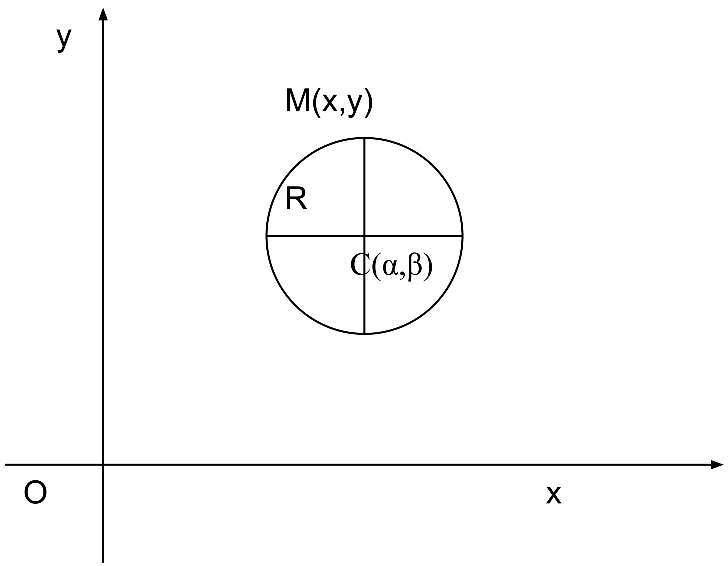
- $x^2- y^2=0$

$x- y=0$

$x+y=0$, т.е. две прямые;

- $x^2+y^2=0$ Этому уравнению удовлетворяет одна точка (0,0). Такую линию называют вырожденной;
- $x^2+y^2+1=0$ – решений у этого уравнения нет, т.е. никакого геометрического образа на плоскости данное уравнение не определяет.

1. Линии и их уравнения



По заданному множеству точек, т.е. заданной линии L, найти ее уравнение F(x,y).

<u>**Пример**</u>

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

2. Линии первого порядка

2. Линии первого порядка

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Опр. Пусть дана некоторая прямая не перпендикулярная оси Ох. Назовем углом наклона данной прямой к оси Ох угол α, на который нужно повернуть ось Ох против часовой стрелки, чтобы она совпала с прямой.

$$0 \leq \alpha < \pi$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

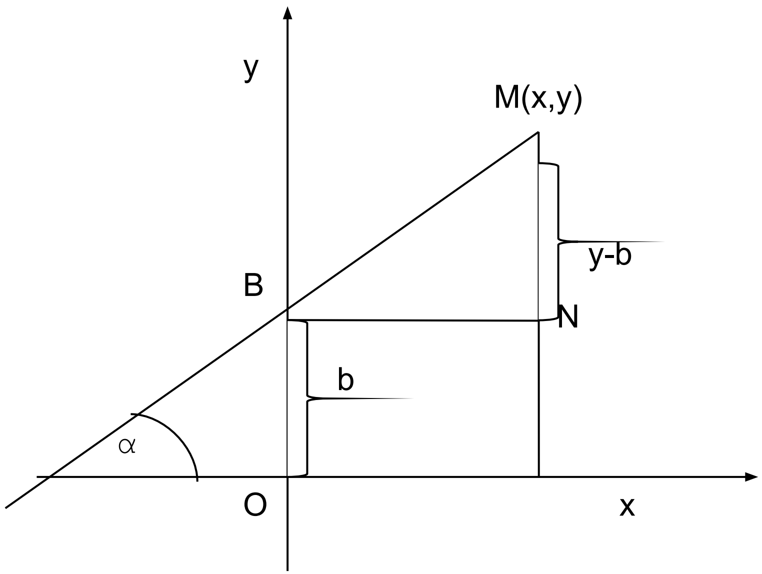
2. Линии первого порядка

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Опр. Тангенс угла наклона прямой к оси Ох называется угловым коэффициентом этой прямой и обозначается через k, т.е.

$$k = tg\alpha$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$$\frac{|MN|}{|BN|} = tg\alpha$$

$$|BN| = x$$

$$|MN| = y - b$$

$$\frac{y-b}{x} = k$$

$$y = kx + b$$

2. Линии первого порядка

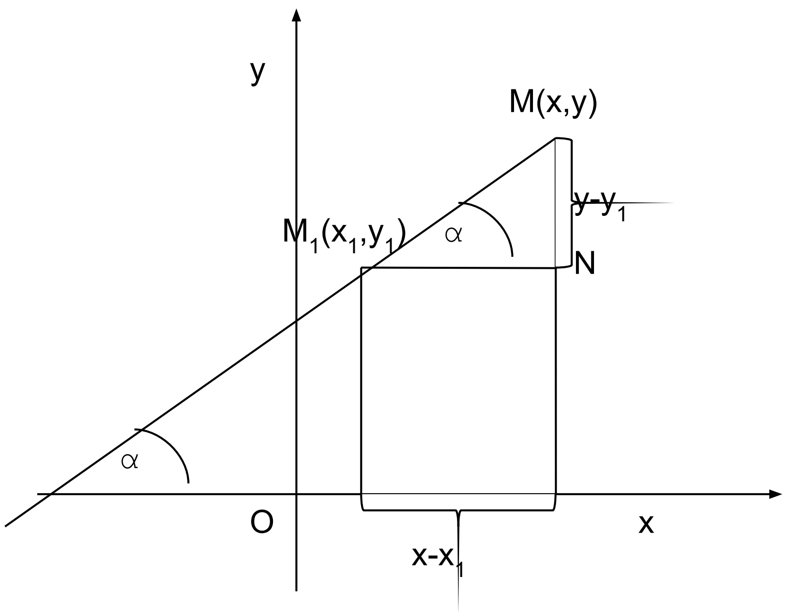
Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Итак, любая прямая, не перпендикулярная к оси Ох, определяется уравнением вида .

$$y = kx + b$$

Верно и обратное, любое уравнение вида $y = kx + b$ определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Оу отрезок величины b.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом



Составим уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1,y_1)$ и угловой коэффициент k.

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Принимая в

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

точку $M(x,y)$ за $M_2(x_2,y_2)$, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Далее, если $y_1 \neq y_2$ то это уравнение можно записать в виде

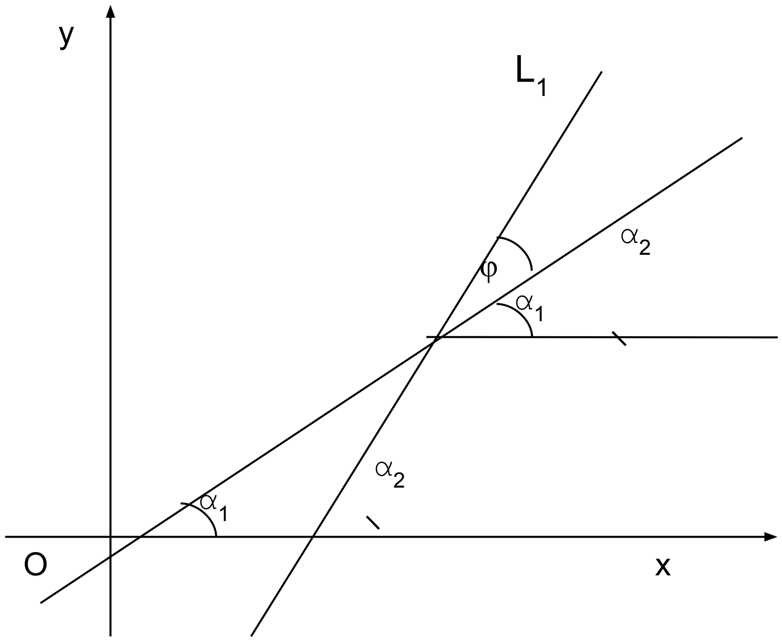
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Если же $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой принимает вид y=y1.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

- **Замечание.**
- Если $x_1=x_2$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, параллельна оси Оу и ее уравнение имеет вид $x=x_1$.

Угол между двумя прямыми



$$y = k_1 x + b_1 \qquad k_1 = tg\alpha_1$$

$$y = k_2 x + b_2 \qquad k_2 = tg\alpha_2$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$$

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\varphi = \left|tg(\alpha_2 - \alpha_1)\right| = \left|\frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}\right|$$

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если прямые L1 и L2 параллельны, то φ=0 и tg φ=0.

Таким образом, условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов k2=k1

Если прямые L1 и L2 перпендикулярны между собой, т.е.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

$$tg\alpha_2 = tg(\frac{\pi}{2} + \alpha_1) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1} \qquad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Общее уравнение прямой

- **Теорема.** В прямоугольной системе координат каждая прямая определяется уравнением первой степени
- $Ax+By+C=0$,
- и обратно уравнение $Ax+By+C=0$ при произвольных коэффициентах A, B и C (A и B не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую.

Общее уравнение прямой

Опр. Линии, определяемые уравнением первой степени, называются линиями первого порядка.

Общее уравнение прямой

Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка, и, наоборот каждая линия первого порядка есть прямая.

Общее уравнение прямой

Опр. Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой (или полным уравнением прямой).

Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

- Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax+By+C=0$ является «неполным»:
- $C=0$. Уравнение имеет вид $Ax+By=0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат;

Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

$B=0$ ($A \neq 0$). Уравнение имеет вид $Ax+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy

Это уравнение приводится к виду $x=a$

Где a - есть величина отрезка, который отсекает прямая на оси Ox

Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

А =0 (В ≠0). Уравнение имеет вид $By+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Ох

Это уравнение приводится к виду $x=b$ где b – величина отрезка, который отсекается прямой на оси Оу

Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

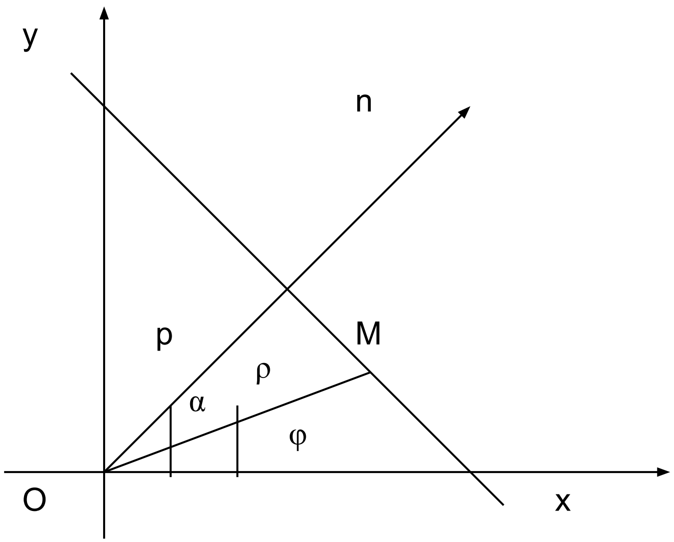
Пусть теперь дано уравнение Ax+By+C=0 при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1$$

$$a=-\frac{C}{A} \qquad b=-\frac{C}{B}$$

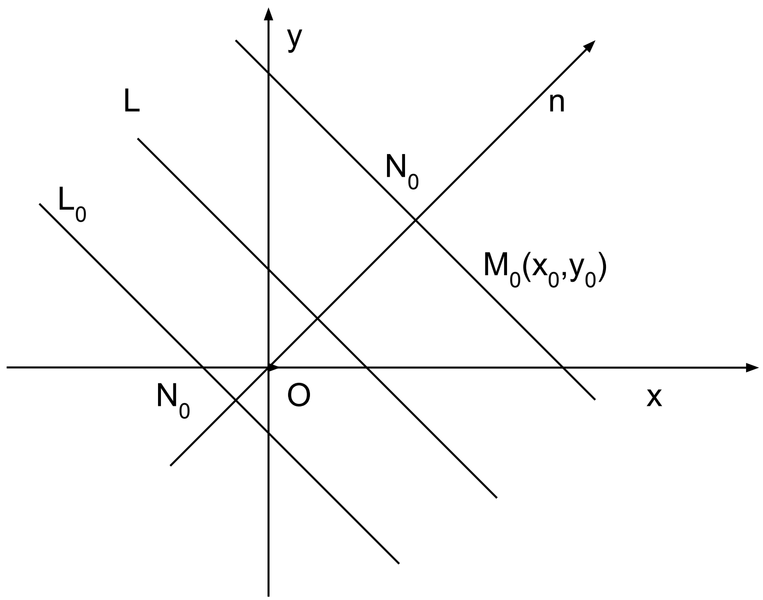
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Нормальное уравнение прямой



$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Расстояние от точки до прямой



$$d = \left|p_0 - p\right| = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p\right|$$

Метод приведения общего уравнения прямой к нормальному виду

Пусть Ax+By+C=0 – общее уравнение прямой ,

– ее нормальное уравнение $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

Так как эти равенства определяют одну и туже прямую, то их коэффициенты пропорциональны, т.е. существует такое μ, что уравнение

μAx+μBy+μC=0

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Число μ называется *нормирующим множителем*