

Лекция 2-12.

12.3.6. Метод вариации произвольных постоянных.

- Дано линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (*)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция.

$$y = y_{\text{оо}} + u \quad .$$

- Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

- Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

- Будем искать частное решение уравнения (*) в виде

$$u_{\text{чн}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Далее везде примем обозначение $C_1(x) = C_1$, $C_2(x) = C_2$.

$$u_{\text{чн}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \quad u'_{\text{чн}} = C'_1y_1 + C'_2y_2 + C_1y'_1 + C_2y'_2.$$

Т.к. определению подлежат две функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, то одним соотношением между ними распорядимся произвольно. Наиболее целесообразно подчинить условию $C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0$. Тогда $u'_{\text{чн}} = C_1y'_1 + C_2y'_2$, $u''_{\text{чн}} = C'_1y'_1 + C_1y''_1 + C'_2y'_2 + C_2y''_2$. Подставим $u_{\text{чн}}, u'_{\text{чн}}, u''_{\text{чн}}$ в уравнение (*)

$$\begin{aligned} & C'_1y'_1 + C_1y''_1 + C'_2y'_2 + C_2y''_2 + a_1C_1y'_1 + a_1C_2y'_2 + a_2C_1y_1 + a_2C_2y_2 = \\ & = C'_1y'_1 + C'_2y'_2 + C_1(y_1'' + a_1y'_1 + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y'_2 + a_2y_2) = f(x), \end{aligned}$$

- Получили систему дифференциальных уравнений для определения $C_1(x), C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$y = y_{\text{об}} + u \quad .$$

• $y'' + y = 0, \quad r^2 + 1 = 0. \quad r_{1,2} = \pm i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad s = 1.$

$$y_{\text{об}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

• $y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$

$$u_{\text{чл}} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2' = \sin x.$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

$$C_2 = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \cos x - \cos x \sin x,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos x.$$

12.3.7 Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка.

- Выше изложенное переносится на дифференциальные уравнения порядка $n > 2$.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (**)$$

где $a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ - непрерывные функции.

- Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (***)$$

Линейно независимые системы функций.

- Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. Линейной комбинацией их будет $C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$, где C_1, \dots, C_n - постоянные.
- **Определение.** Система функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ называется линейно независимой, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.
- Т.е. не может быть равенства $\varphi_1(x) = C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$.
- В частности $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ линейно независимы, если
$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \neq \text{const.}$$

Если $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

- **Пример.**

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3, \quad \varphi_4(x) = 2x - x^2.$$

$$\varphi_4(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Теорема.

- Если y_1, \dots, y_n суть n частных линейно независимых решений дифференциального уравнения (***) , то общим решением этого уравнения будет

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

(****)

- Если y_1, \dots, y_n - линейно зависимые решения, то, по крайней мере, одно из них выразится через остальные $(n-1)$ и функция y будет зависеть не от n , а от произвольных постоянных. Она не даст общего решения дифференциального уравнения.

- Линейно независимые решения дифференциального уравнения n - го порядка образуют фундаментальную систему решений.
- Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = y_{\text{об}} + u \quad .$$

12.3.8 Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

- Характеристическое уравнение

$$r^n + a_1 r^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

- 1) Каждому действительному корню r кратности s соответствует s решений $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{s-1} e^{rx}$.
- 2) Каждой паре комплексно сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ кратности s соответствует s решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- Общее число кратности равно n , поэтому решений будет n .

Пример. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1, r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1, \alpha = -1, \beta = 0, s = 1.$$

$$r_{2,3,4,5} = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1, s = 2.$$

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x.$$

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$ — правая часть специального вида,

$P_1(x)$ — многочлен степени m ,

$P_2(x)$ — многочлен степени n .

- Частное решение имеет вид

$$u_{\text{чн}} = x^k e^{\alpha x} (R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ — многочлены степени $l = \max(m, n)$,
 k — кратность $r = \alpha \pm \beta i$ среди корней характеристического уравнения.