Лекция **2-11.**

12.3.5. Неоднородные дифференциальные уравнения **2-**го порядка с постоянными коэффициентами**.**

- $$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

- Общее решение дифференциального уравнения имеет вид
$$y = y_{oo} + u \quad ,$$
где y_{oo} - общее решение однородного уравнения,
$u_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения.
Или
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_{чн}.$$

- Найдем $u_{чн}$. Рассмотрим частные случаи.

I) Правая часть имеет вид $f(x)=P(x)e^{px}$,

где $P(x)$ - многочлен n-й степени.

- Решение $u_{чн}=x^k Q(x)e^{px}$,

где: $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$,

k - кратность p среди корней характеристического уравнения (если такого корня нет, то $k=0$).

- Коэффициенты многочлена $Q(x)$ находим методом неопределенных коэффициентов.
- Частные случаи:
- а) $p=0$,
- б) $P(x)$ - многочлен нулевой степени.

Примеры: 1)

$$y'' - 2y' + y = x + 1,\ y\big|_{x=0} = 2,\ y'\big|_{x=0} = -3. \qquad y = y_{oo} + u\ .$$

$$y'' - 2y' + y = 0,\ r^2 - 2r + 1 = 0.\ r_{1,2} = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 2.$$

$$y_{oo} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x.$$

- Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ n = 1,\ k = 0,$ т.к. среди корней характеристического уравнения нет корня с такими же характеристиками.
- Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

  $$u_{чн} = A + Bx,\ u'_{чн} = B,\ u''_{чн} = 0.$$

  Подставим в дифференциальное уравнение

  $$-2B + A + Bx = x + 1.$$
- Применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \begin{cases} -2B + A = 1, \\ B = 1. \qquad A = 3. \end{cases} \\ x^1 & \end{array} \qquad u_{чн} = 3 + x.$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 3 + x,\ \ y' = C_2 e^x + \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 1.$$

- Из начальных условий

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_2 + C_1 + 1. \end{cases} \qquad C_1 = -1,\ C_2 = -3.$$

$$y = -\left(1 + 3x\right)e^x + 3 + x.$$

2)

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}.$$

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \;\; r^2 - 4r + 3 = 0.$$

$$r_1 = 1, \;\; \alpha = 1, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1. \quad r_2 = 3, \;\; \alpha = 3, \;\; \beta = 0, \;\; s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

- Характеристики правой части: $\alpha = 2, \;\; \beta = 0, \;\; n = 0, \;\; k = 0.$

$$u_{чн} = Ae^{2x}, \;\; u'_{чн} = 2Ae^{2x}, \;\; u''_{чн} = 4Ae^{2x}.$$

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x}, \quad A = -3.$$

- $$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3)

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

$$y'' - 4y' + 3y = 0,\ r^2 - 4r + 3 = 0. \qquad r_1 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$$

$$r_2 = 3,\ \alpha = 3,\ \beta = 0,\ s = 1. \qquad y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

- Характеристики правой части: $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ n = 1,\ k = 1.$

$$u_{чн} = x(Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x, u'_{чн} = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$

$$u''_{чн} = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x.$$

$$2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x -$$

$$-4\left((2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x\right) + 3\left(Ax^2 + Bx\right)e^x =$$

$$= e^x(-4Ax + 2A - 2B) = xe^x.$$

$$\begin{array}{l|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} 2A - 2B = 0, \\ -4A = 1. \end{array}\right. \\ x^1 & \end{array} \qquad A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}. \qquad y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right)e^x.$$

II) Правая часть имеет вид

$$f(x) = a\cos qx + b\sin qx.$$

- а) Если $\pm iq$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$u_{чн} = A\cos qx + B\sin qx. \qquad (*)$$

- б) Если $\pm iq$ корни характеристического уравнения, то

$$u_{чн} = x\left(A\cos qx + B\sin qx\right).$$

(**)

- В частном случае, когда $a = 0$ или $b = 0$, частное решение все равно имеет вид (*) или (**).

Примеры: 1)

$$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x.$$

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

$$y'' + 4y' + 13y = 0,\ r^2 + 4r + 13 = 0.$$

$$r_{1,2} = -2 \pm 3i,\ \alpha = -2,\ \beta = 3,\ s = 1. \quad y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$$

- Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ n = 0,\ k = 0.$

$$u_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x,\ u'_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$u''_{чн} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) +$$

$$+13\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = 5\sin 2x.$$

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0. \end{cases}$} \\ \cos 2x & \end{array} \quad A = -\frac{8}{29},\ B = \frac{9}{29}. \quad u_{чн} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

2)

$$y'' + \omega^2 y = a \sin qx.$$

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

$$y'' + \omega^2 y = 0, \ \ r^2 + \omega^2 = 0. \quad r_{1,2} = \pm \omega i, \ \ \alpha = 0, \ \ \beta = \omega, \ \ s = 1.$$

- $$y_{oo} = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$
- а) $q \neq \omega.$
- Характеристики правой части: $\alpha = 0, \ \beta = q, \ n = 0, \ k = 0.$

$$u_{чн} = A \cos qx + B \sin qx, \ \ u'_{чн} = -qA \sin qx + qB \cos qx,$$

$$u''_{чн} = -q^2 A \cos qx - q^2 B \sin qx.$$

$$-q^2 A \cos qx - q^2 B \sin qx + \omega^2 \left(A \cos qx + B \sin qx \right) = a \sin qx.$$

$$\begin{array}{l|} \sin qx \\ \cos qx \end{array} \begin{cases} \left(\omega^2 - q^2 \right) A = 0, \\ \left(\omega^2 - q^2 \right) B = a. \end{cases} \quad A = 0, \ \ B = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2 \right)}. \quad u_{чн} = \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2 \right)} \sin qx.$$

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{a}{\left(\omega^2 - q^2 \right)} \sin qx.$$

б) $q = \omega.$

- Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = \omega,\ n = 0,\ k = 1.$

$$u_{чн} = x\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right),$$

$$u''_{чн} = 2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right).$$

$$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) - x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) +$$
$$+ x\omega^2\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right) = a\sin\omega x,$$

$$2\omega\left(-A\sin\omega x + B\cos\omega x\right) = a\sin\omega x.$$

$$\begin{array}{l|} \sin\omega x \\ \cos\omega x \end{array} \begin{cases} -2\omega A = a, & A = -\dfrac{a}{2\omega}, \\ 2\omega B = 0. & B = 0. \end{cases} \qquad u_{чн} = -\frac{a}{2\omega}x\cos\omega x.$$

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x - \frac{a}{2\omega}x\cos\omega x.$$

III) Правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{px}\left(P_1(x)\cos qx + P_2(x)\sin qx\right),$$

где $P_1(x), P_2(x)$ - многочлены степени n, m соответственно. $l = \max(n, m)$. Возможны два случая.

- а) $p \pm qi$ - не есть корни характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид
$$u_{чн} = e^{px}\left(R_1(x)\cos qx + R_2(x)\sin qx\right),$$
где $R_1(x), R_2(x)$- многочлены степени $l.$
- б) $p \pm qi$ - корни характеристического уравнения. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид
$$u_{чн} = xe^{px}\left(R_1(x)\cos qx + R_2(x)\sin qx\right),$$
где $R_1(x), R_2(x)$ - многочлены степени $l.$
- Случай (I) получается, если $q = 0,$ случай (II)

получается, если $p = 0.$ Степени многочленов $R_1(x), R_2(x)$ могут получиться меньше $l.$

Пример.

$$y'' + y = 4x\sin x.$$

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

$$y'' + y = 0,\ r^2 + 1 = 0. \qquad r_{1,2} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1.$$

$$y_{oo} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

- Характеристики правой части: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ l = 1,\ k = 1.$

$$u_{чн} = x\left(\left(Ax + B\right)\cos\omega x + \left(Cx + D\right)\sin\omega x\right),$$

$$u''_{чн} = \left(-Ax^2 + \left(4C - B\right)x + \left(2A + 2D\right)\right)\cos x +$$
$$+\left(-Cx^2 - \left(4A + D\right)x + \left(2C - 2B\right)\right)\sin x.$$

$$\left(2Cx + \left(A + D\right)\right)\cos x + \left(-2Ax + \left(C - B\right)\right)\sin x = 2x\sin x.$$

$$2C = 0,\ A + D = 0,\ -2A = 2,\ C = B = 0. \qquad A = -1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1.$$

$$u_{чн} = x\left(\sin x - x\cos x\right).$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\left(\sin x - x\cos x\right).$$

Теорема.

- Пусть правая часть дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

равна сумме двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Пусть $u_{чн1}$ - частное решение при $f_1(x)$, $u_{чн2}$ - частное решение при $f_2(x)$. Тогда $u_{чн} = u_{чн1} + u_{чн2}$.

- Доказательство.

$$\left(u_1'' + u_2''\right) + a_1\left(u_1' + u_2'\right) + a_2\left(u_1 + u_2\right) =$$

$$= \left(u_1'' + a_1u_1' + a_2u_1\right) + \left(u_2'' + a_1u_2' + a_2u_2\right) =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$