# Линейное программирование

# Вопросы

- Постановка задачи линейного программирования
- Графический метод решения задач линейного программирования
- Симплекс-метод решения задач линейного программирования
- Метод искусственного базиса
- Двойственность в линейном программировании

# 1 Постановка задачи ЛП

- **Общая задача** ЛП: Найти значения переменных $x_{1,} x_2 \ldots. x_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}) \\ x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

и обращающих в максимум (минимум) линейную функцию этих переменных

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min(\max)$$

$a_{ij}, b_i, c_j$ **постоянные величины**

- Допустимое решение задачи линейного программирования - это набор значений $x_{1,} x_{2} \ldots x_{n}$, удовлетворяющих условиям задачи.
- Множество всех допустимых решений называется **областью допустимых решений**.
- Допустимое решение, при котором линейная целевая функция *F* принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется **оптимальным**.

- **Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции**

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

**при выполнении условий:**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Основной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции *F*

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при выполнении условий:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

## *Задача о распределении ресурсов*

Для изготовления 2-х видов продукции P1и P2 используется 4 вида ресурсов S1, S2, S3, S4.

| Вид ресурса | Запас ресурса | Число единиц ресурсов, расходуемых на изготовление единиц продукции | |
|---|---|---|---|
| | | P1 | P2 |
| S1 | 18 | 1 | 3 |
| S2 | 16 | 2 | 1 |
| S3 | 5 | 0 | 1 |
| S4 | 21 | 3 | 0 |

Прибыль от реализации продукции P1 – 2 , P2 – 3.

Требуется составить такой план производства продукции, при котором прибыль от реализации будет максимальной.

- $x_1$ $x_2$ – число единиц продукции Р1 и Р2.

Система ограничений будет следующая:

$x_1+3x_2 \leq 18$

$2x_1+x_2 \leq 16$

$x_2 \leq 5$

$3x_1 \leq 21$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

Прибыль составит: $F= 2x_1+3x_2 \rightarrow max$

# ▪ *Задача составления рациона*

- **Имеется два вида корма *I* и *II*, содержащие питательные вещества *S1*, *S2* и *S3*.**

| Питательные вещества | Необходимый минимум питательных веществ | Число единиц питательных веществ в 1 кг корма | |
|---|---|---|---|
| | | *I* | *II* |
| $S_1$ | 9 | 3 | 1 |
| $S_2$ | 8 | 1 | 2 |
| $S_3$ | 12 | 1 | 6 |

**Стоимость 1 кг корма *I* и *II* соответственно равна 4 и 6 условных единиц.**

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

- обозначим через *x1* и *x2* соответственно количество килограммов корма *I* и *II* в дневном рационе. Получим следующую модель:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

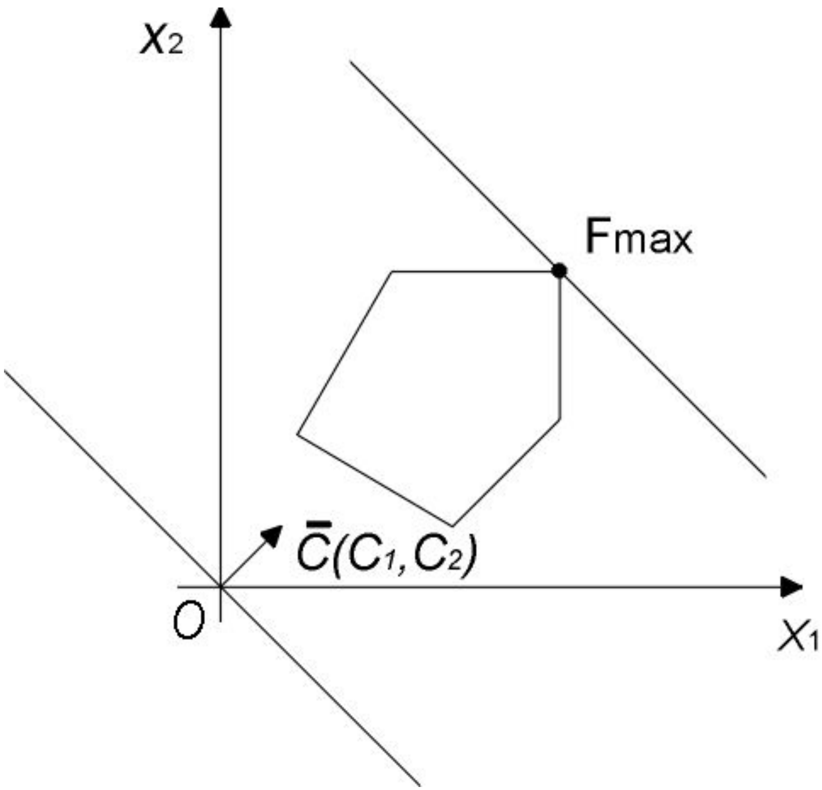
# 2. Графический метод решения задач линейного программирования

- Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования с двумя переменными (n=2), состоящую в определении максимального значения функции при условиях:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i & \left( i = \overline{1,k} \right) \\ x_j \ge 0, & \left( j = 1,2 \right) \end{cases}$$

Задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение.



- Исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в котором целевая функция принимает максимальное значение. Эта точка является одной из вершин многоугольника решений
- **Теорема** *Если задача ЛП имеет оптимальный план, то ЦФ достигает своего максимального значения в одной из вершин выпуклого многогранника решений.*

*Если ЦФ достигает максимального значения более, чем в 1-й вершине многогранника, то она достигает это значение и в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин (в любой точке на прямолинейном отрезке, соединяющем эти вершины).*

# Алгоритм решения графическим способом

- В системе координат строятся прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

- Находятся полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Определяется многоугольник решений.

- Строится вектор . $\vec{c} = \left(c_1, c_2\right)$

- Строится прямая . $c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$

- Прямая передвигается параллельно самой себе в направлении вектора , в результате чего находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение или устанавливают неограниченность сверху функции на множестве допустимых решений.

- Определяются координаты точки максимума функции и вычисляется значение целевой функции в этой точке.

# *Задача о распределении ресурсов*

- Необходимо определить максимум функции при условиях:

$$F = 2x_1 + 3x_2$$

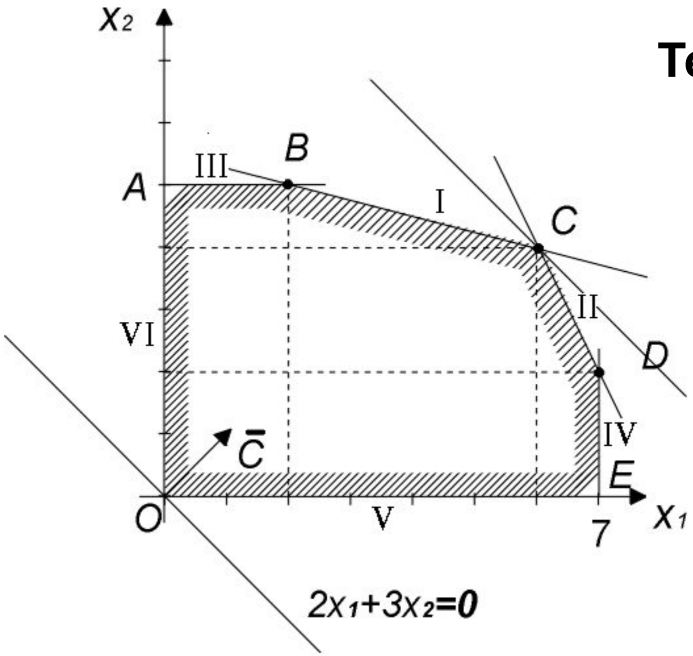
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

# Решение.

- Построим многоугольник решений. Для этого в системе ограничений знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и построим полученные прямые:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 & (I) \\ 2x_1 + x_2 = 16 & (II) \\ x_2 = 5 & (III) \\ 3x_1 = 21 & (IV) \\ x_1 = 0, x_2 = 0 & (V, VI) \end{cases}$$

- Найдем полуплоскости, определяемые соответствующими неравенствами и их пересечение. В результате получим многоугольник *OABCDE*




**Теперь построим прямую** $2x_1+3x_2=0$

**и вектор** $\vec{C}=(2,3)$

**Перемещаем прямую в направлении вектора. Последней ее общей точкой с многоугольником служит точка C.**

**Координаты C удовлетворяют уравнениям прямых I и II**

$$\begin{cases} x_1+3x_2=18 \\ 2x_1+x_2=16. \end{cases}$$

# Ответ

$$x_1 = 6, \; x_2 = 4 \qquad F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$$

- Следовательно, при изготовлении 6 единиц продукции *P1* и 4 единицы продукции *P2*, предприятие получит максимальную прибыль, равную 24 единицам

# Задача II
# Составление рациона

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

**при условиях:**

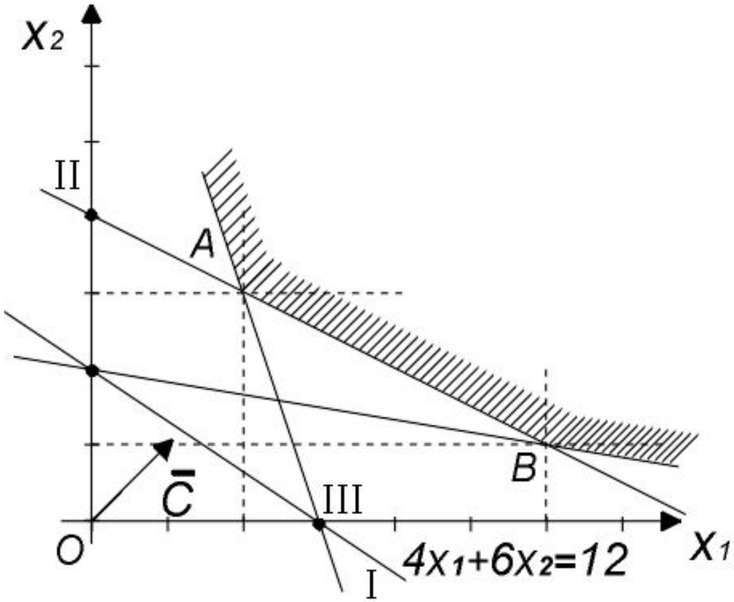
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

# Решение.

- Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений знаки неравенств заменим на знаки равенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 & (I) \\ x_1 + 2x_2 = 8 & (II) \\ x_1 + 6x_2 = 12 & (III) \\ x_1 = 0, x_2 = 0 & (IV, V) \end{cases}$$

- Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение




**построим вектор** $\vec{C} = \left(4{,}6\right)$

**и прямую** $4x_1 + 6x_2 = 12$

**Передвигаем в направлении вектора, ближайшей общей точкой с областью допустимых решений является т. *A*. В этой точке функция *F* принимает минимальное значение.**

***A* – точка пересечения прямых *II* и *I*, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

# Ответ

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$F_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$$

**Дневной рацион должен включать в себя 2 кг корма *I* и 3 кг корма *II*, при этом затраты будут составлять 26 единицам.**

# Вопросы

1. Определите общую задачу линейного программирования
2. Определите основную задачу линейного программирования
3. Определите стандартную задачу линейного программирования
4. Теорема
5. Алгоритм решения графическим способом