Лекция 2-10.
12.2.4 Дифференциальные уравнения высших порядков.

- **Определение.** Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$
- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной $y^{(n)}$ имеет вид
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$
- Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right).$
- Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий
$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема о существовании и единственности решения.

- **Если функция** $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ **и ее производные** $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ **непрерывны в окрестности значений** $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, **то дифференциальное уравнение** $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ **в достаточно малом интервале** $(x_0 - h, x_0 + h)$ **имеет единственное решение** $y = y(x)$, **удовлетворяющее заданным начальным условиям**

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

12.3. Линейные дифференциальные уравнения.
12.3.1. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка называется дифференциальное уравнение 1-й степени относительно неизвестной функции и ее производных
- $$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \qquad (*)$$
- Функция $f(x)$ называется правой частью дифференциального уравнения.
- Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение называется однородным. В противном случае - уравнение называется неоднородным.

- Если $\forall x \in (a,b) \quad f(x), a_1(x), a_2(x)$ непрерывны, то $\forall \ y\big|_{x=x_0} = y_0, \ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \quad x_0 \in (a,b)$ существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

- Дифференциальное уравнение

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

можно привести к виду (*), разделив на p_0.

- Там, где $p_0 = 0$ - особые точки.

12.3.2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка без правой части.

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0. \qquad (**)$$

- Считаем, что $a_1(x),\ a_2(x)$ непрерывны на (a,b). Тривиальное решение $y \equiv 0.$
- **Теорема 1.** Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения (**), то их линейная комбинация $y = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ также является решением уравнения (**) для любых $C_1,\ C_2$.
- **Доказательство:** $y = C_1 y_1 + C_2\, y_2, \quad y' = C_1 y_1' + C_2\, y_2',$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2\, y_2''.$$

- Подставим в уравнение

$$C_1 y_1'' + C_2\, y_2'' + a_1\left(C_1 y_1' + C_2\, y_2'\right) + a_2\left(C_1 y_1 + C_2\, y_2\right) =$$
$$= C_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) = 0.$$

Теорема 2.

- Если $y_1(x),\ y_2(x)$ - решения дифференциального
- уравнения (**) и $\dfrac{y_2}{y_1} \neq const,$ то $y = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$
- общее решение дифференциального уравнения.
- **Доказательство:** Покажем, что $\forall\ y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0$ можно подобрать $C_1,\ C_2$ так, чтобы решение y удовлетворяло начальным условиям. Подставим начальные условия в выражения для y и y'.

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0. \end{cases}$$

- Определитель системы $W_0 = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$

- Покажем, что определитель $W_0 = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0.$
- Если это так, то система имеет решение $\forall y_0, y'_0$.
- Предположим обратное. Определитель равен нулю.

Тогда система $\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = 0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = 0 \end{cases}$

при нулевых начальных условиях помимо нулевого, имеет бесконечное множество ненулевых решений. Пусть C_{10}, C_{20} одно из них. Тогда $C_{10} y_1 + C_{20} y_2 \equiv 0.$

Следовательно $\dfrac{y_2}{y_1} = -\dfrac{C_{10}}{C_{20}} = const,$ что противоречит условию.

12.3.3. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с правой частью.

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \qquad (***)$$

- **Теорема.** Общее решение дифференциального уравнения (***) есть сумма общего решения однородного уравнения (**) и частного решения неоднородного уравнения (***).
- **Доказательство:** Пусть $\Phi(x)$ - общее решение одно-родного уравнения, $\varphi(x)$ - частное решение неоднород-ного уравнения. Рассмотрим их сумму $y=\Phi(x)+\varphi(x)$. Тогда $y'=\Phi'(x)+\varphi'(y)$, $y''=\Phi''(x)+\varphi''(x)$.

$$\Phi''(x)+\varphi''(x)+a_1\left(\Phi'(x)+\varphi'(x)\right)+a_2\left(\Phi(x)+\varphi(x)\right)=$$
$$=\left(\Phi''(x)+a_1\Phi'(x)+a_2\Phi(x)\right)+\left(\varphi''(x)+a_1\varphi'(x)+a_2\varphi(x)\right)=f(x).$$

Следовательно $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+u(x)$.

12.3.4. Однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$

- Ищем решение в виде $y = e^{rx}$,где r - действительное или комплексное число.

$$y' = re^{rx}, \ y'' = r^2 e^{rx}.$$

- Подставим y, y', y'' в дифференциальное уравнение

$$e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0, \ e^{rx} \neq 0.$$

- Получили <u>характеристическое уравнение</u>

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

- Рассмотрим 3 варианта решения этого уравнения.

1) $r_1 \neq r_2$ действительные числа.

- Получили два решения дифференциального уравнения

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}. \qquad \frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x} \neq const.$$

- Общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

C_1, C_2 - произвольные постоянные.

$$W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x_0} (r_2 - r_1) \neq 0.$$

Пример.

$$y'' - y' - 2y = 0. \quad r^2 - r - 2 = 0, \qquad r_1 = 2, \; r_2 = -1.$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}. \qquad y\big|_{x_0=0} = 2, \; y'\big|_{x_0=0} = -5.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 2C_1 - C_2 = -5. \end{cases} \qquad C_1 = -1, \; C_2 = 3.$$

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) $r_1 = r_2$ действительное число.

$$y_1 = e^{r_1 x}.$$

- Покажем, что $y_2 = xe^{r_1 x}.$

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}, \qquad y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

- Подставим в уравнение

$$2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + a_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}\right) + a_2 x e^{r_1 x} =$$

$$= e^{r_1 x}\left[x\left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2\right) + \left(2r_1 + a_1\right)\right] = e^{r_1 x}\left(2r_1 + a_1\right).$$

- По теореме Виета $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a_1,$ т.е. $\left(2r_1 + a_1\right) = 0.$
- Следовательно

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{r_1 x}. \qquad W_0 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & e^{r_1 x_0} + r_1 e^{r_1 x_0} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x_0} \neq 0.$$

Пример.

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \;\; r^2 - 6r + 9 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = 3.$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{3x}.$$

3)

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \beta \neq 0.$$

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

- Если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение

$$y = u(x) + iv(x),$$

то каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением уравнения.

$$(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0,$$

$$(u'' + a_1 u' + a_2 u) + i(v'' + a_1 v' + a_2 v) = 0.$$

По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Тогда $$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Пример.

$$y'' - 4y' + 13y = 0. \ r^2 - 4r + 13 = 0,$$

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

- **Для любых начальных условий существует единственное решение.**