

# Лекция 3: Основные законы распределения, применяемые при обработке данных научного эксперимента

1. Нормальное распределение
2. Равномерное распределение
3. Логарифмически нормальное распределение
4. Экспоненциальное распределение
5. Распределение Вейбулла

# 1 Нормальное распределение $N(\mu, \sigma)$

Один из основных законов распределения в прикладной математической статистике. Во многом это следствие ЦПТ.

*ЦПТ: распределение суммы независимых случайных величин с любым исходным распределением будет нормальным, если число слагаемых достаточно велико, а вклад каждого в сумму – мал.*

ЦПТ соответствует многим реальным физическим процессам.

При возрастании объема выборки большинство распределений стремится к нормальному  $\Rightarrow N(\mu, \sigma)$  может быть использовано для аппроксимации таких распределений.

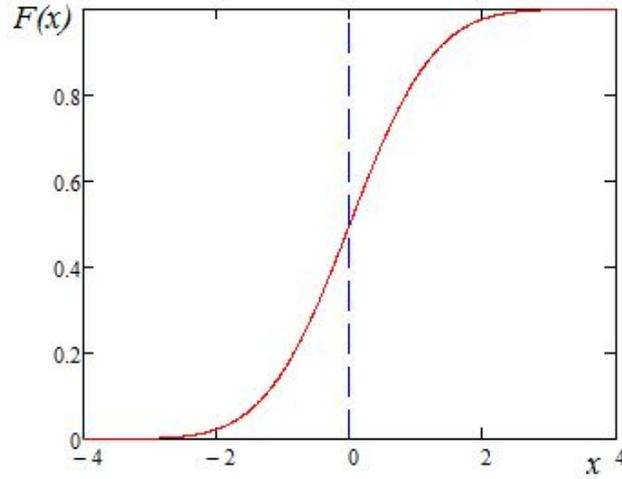
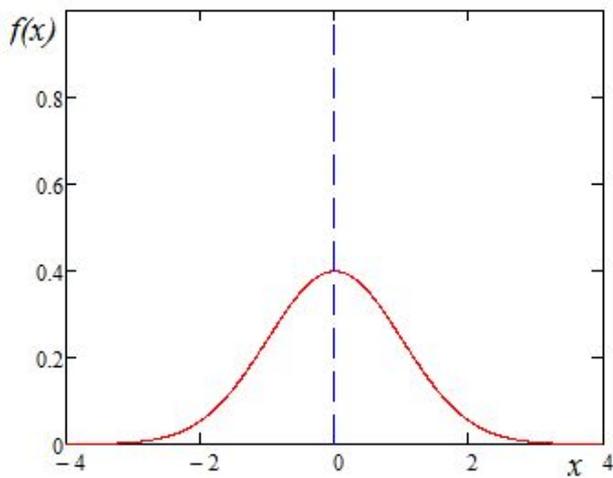
## Примеры применения $N(\mu, \sigma)$ :

- распределение погрешности измерений (кроме приборной погрешности);
- в теории распространения радиоволн для описания *мерцания - флуктуаций параметра относительно его среднего значения*;
- в неявном виде для описания параметра, представленного в логарифмическом масштабе (заменяя явный вид логнормального распределения);
- в теории надежности для описания износных отказов, интенсивность которых со временем возрастает (обычно)

## Свойства $N(\mu, \sigma)$ :

<b>Обозначение</b>	$N(\mu, \sigma)$
<b>Параметры</b>	$\mu, \sigma$
<b>Плотность</b>	$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
<b>Функция распределения</b>	$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$
<b>Мат. ожидание</b>	$M(x) = \mu$
<b>Дисперсия</b>	$D(x) = \sigma^2$
<b>Коэффициент асимметрии</b>	$a_3 = 0$
<b>Коэффициент эксцесса</b>	$a_4 = 0$ («сдвинутый» на 3)
<b>Мода</b>	$Mo = \mu$
<b>Медиана</b>	$Me = \mu$

Графики  $N(0,1)$  – стандартизированного нормального распределения:



Штрихпунктиром –  
 $\mu_0$  и  $\mu_e$

плотность вероятности    функция распределения

$N(\mu, \sigma)$  симметрично относительно точки  $x=\mu$ , оба параметра совпадают со средним значением и стандартным отклонением.

$\mu$  – коэффициент сдвига;

$\sigma$  – коэффициент масштаба.

Значения  $F(x)$  распределения  $N(0,1)$  приводятся в справочниках виде таблиц.

Также приводятся таблицы значений функции (интеграла) Лапласа

$$\Phi(z) = 2F(z) - 1, \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Для  $N(0,1)$

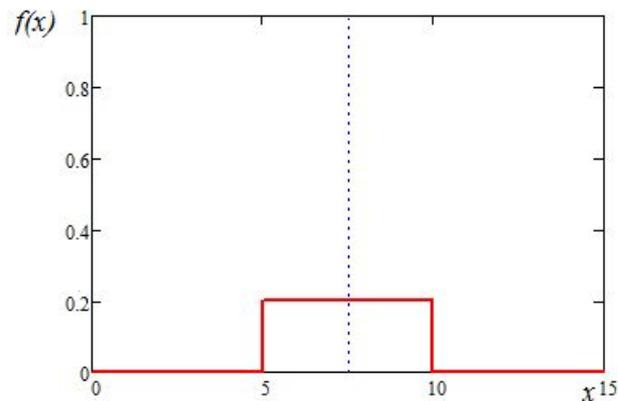
$$F(-z) = 1 - F(z)$$

Квантиль  $u_p$  нормально распределенной случайной величины  $N(\mu, \sigma)$  связан с квантилью случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение  $N(0,1)$ ,  $u_p^c$ , соотношением  $u_p = \mu + u_p^c$ . Значения квантиля  $u_p^c$  задается таблично.

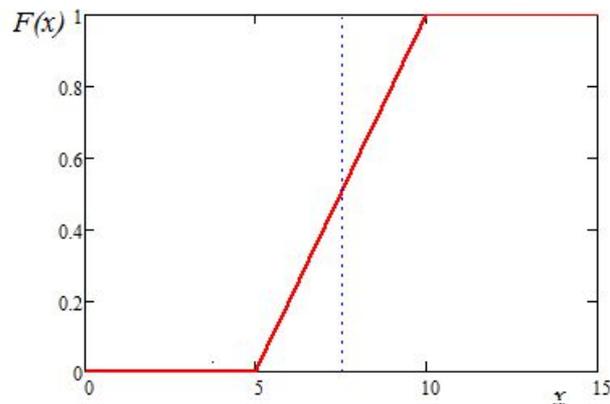
## 2 Равномерное распределение $U(a, b)$

Равномерному распределению подчиняются случайные величины, имеющие одинаковую вероятность появления (например, погрешность измерений с округлением).

Сумма  $n$  независимых равномерно распределенных случайных величин описывается нормальным распределением уже при  $n \geq 5$ . Функция распределения любой случайной величины  $y-F(y)$  сама распределена равномерно на отрезке  $[0, 1]$ .



плотность вероятности



функция распределения

Штрихпунктиром –  
 $M_0$

# Свойства $U(a, b)$ :

<b>Обозначение</b>	$U(a, b)$
<b>Параметры</b>	$a, b$
<b>Плотность</b>	$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x < a; x > b \end{cases}$
<b>Функция распределения</b>	$F(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$
<b>Мат. ожидание</b>	$M(x) = 0,5 \cdot (b + a)$
<b>Дисперсия</b>	$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
<b>К-т асимметрии</b>	$a_3 = 0$
<b>К-т эксцесса</b>	$a_4 = -1,2$
<b>Мода</b>	$Mo = \frac{b+a}{2} = M(x)$
<b>Медиана</b>	не определена

### 3 Логарифмически нормальное распределение $LN(\mu, \sigma)$

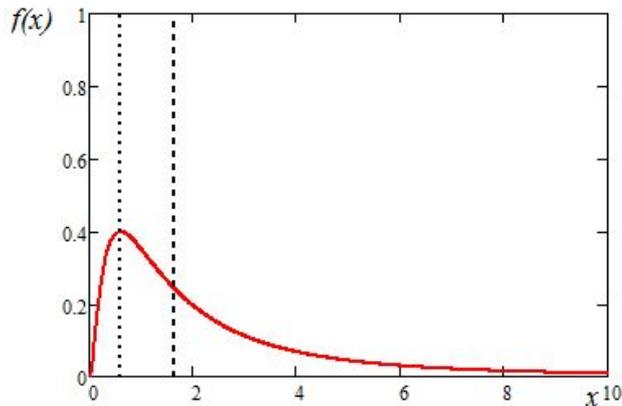
Если сл.в.  $Y$  распределена нормально, то сл.в.  $x=\ln(Y)$  подчинена логарифмически нормальному (логнормальному) закону распределения.

Значения логнормальной случайной величины формируются под воздействием очень большого числа взаимно независимых факторов:

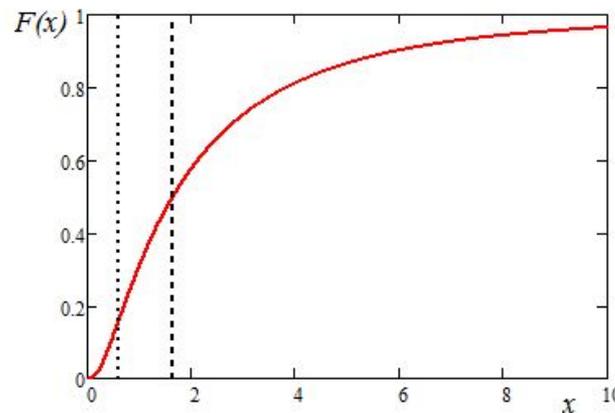
- воздействие каждого отдельного фактора «равномерно незначительно» и равновероятно по знаку;
- прирост, вызываемый действием каждого следующего фактора, пропорционален уже достигнутому к этому моменту значению исследуемой величины.

# Примеры применения $LN(\mu, \sigma)$ :

- в распространении радиоволн: описание параметров, связанных с мощностью, напряженностью поля, или со временем (длительность замираний);
- описание износочных отказов. У многих невосстанавливаемых электронных приборов (некоторые типы электронных ламп, полупроводниковые приборы) наработка на отказ распределена логнормально.



плотность вероятности



функция распределения

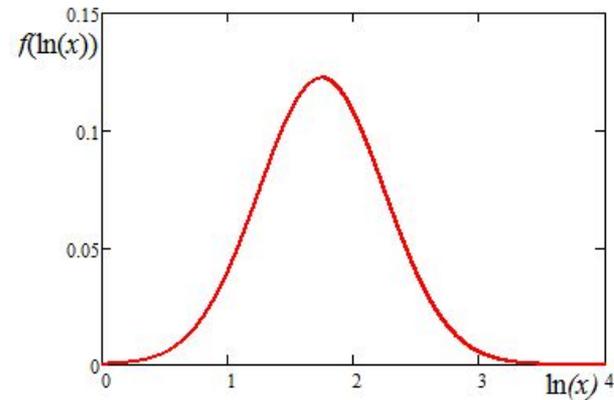
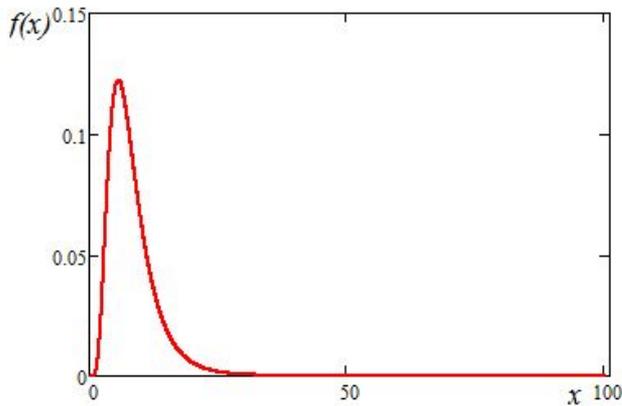
Пунктиром –  $M_o$ ,  
штрихпунктиром –  $M_e$

## Свойства $LN(\mu, \sigma)$ :

<b>Обозначение</b>	$LN(\mu, \sigma)$
<b>Параметры</b>	$\mu, \sigma$
<b>Плотность</b>	$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$
<b>Функция распределения</b>	$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$
<b>Мат. ожидание</b>	$M(x) = \exp(\mu + 0,5 \cdot \sigma^2)$ $D(x) = \exp(2\mu + \sigma^2) (e^{\sigma^2} - 1)$
<b>Дисперсия</b>	$a_3 = (e^{\sigma^2} - 1)^{0,5} (e^{\sigma^2} + 2)$
<b>Коэффициент асимметрии</b>	$a_4 = 3 + (e^{\sigma^2} - 1)(e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} + 6) - 3$
<b>Коэффициент эксцесса</b>	$Mo = \exp(\mu - \sigma^2)$ $Me = e^\mu$
<b>Мода</b>	
<b>Медиана</b>	

График плотности вероятности  $LN(\mu, \sigma)$  может быть преобразован в график плотности вероятности для  $N(\mu, \sigma)$ , если в качестве значений случайной величины взять натуральный логарифм ее значений:

$LN(2, 0,5)$ :



Асимметрия положительна.

Произведение независимых сл.в., подчиняющихся логнормальному закону, также логнормально.

## 4 Экспоненциальное распределение $E_{\text{xp}}(b)$

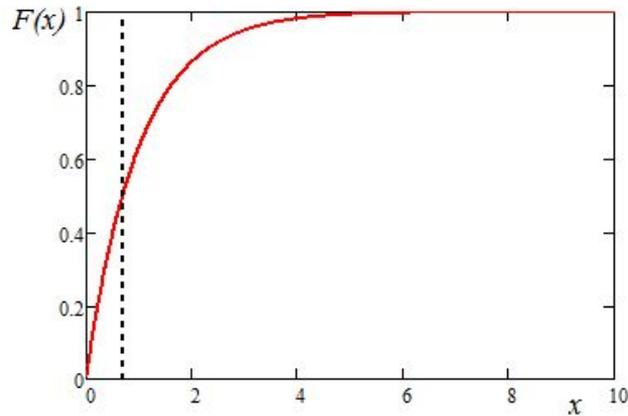
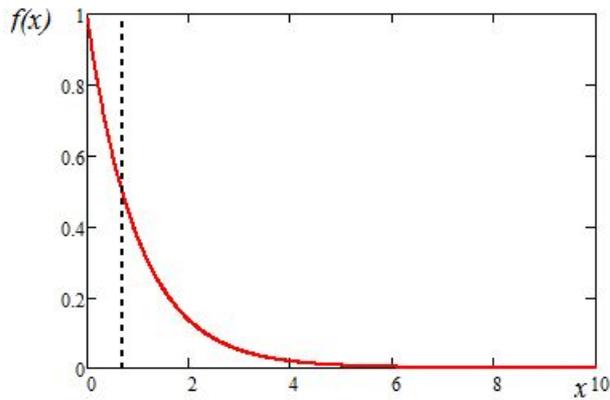
Одно из наиболее часто встречающихся распределений в теории надежности.

Примеры использования:

- описание внезапных отказов, когда износом изделия можно пренебречь;
- наработка на отказ многих невосстанавливаемых изделий;
- наработка на отказ между соседними отказами у восстанавливаемых изделий в случае простейшего потока;
- наработка на отказ большой многокомпонентной системы при любом распределении наработки на отказ компонентов системы.

## Свойства $Exp(b)$ :

<b>Обозначение</b>	$Exp(b)$
<b>Параметры</b>	$b$
<b>Плотность</b>	$f(x; b) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), x \geq 0$
<b>Функция распределения</b>	$F(x; b) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{b}\right), x \geq 0$
<b>Мат. ожидание</b>	$b$
<b>Дисперсия</b>	$b^2$
<b>Коэффициент асимметрии</b>	2
<b>Коэффициент эксцесса</b>	9
<b>Мода</b>	0
<b>Медиана</b>	$b \ln 2$



Штрихпунктиром –  $M_e$

плотность вероятности    функция распределения

$b$  – коэффициент масштаба.

Экспоненциальное распределение – частный случай распределения Вейбулла. Отличительная особенность – постоянство интенсивности отказов  $\lambda=1/b=\text{const}$  – в теории надежности интерпретируется как независимость вероятности отказа от наработки, что эквивалентно отсутствию износа.

## 5 Распределение Вейбулла $W(\alpha, \beta, \mu)$

Используется при многих расчетах надежности.

Распределению Вейбулла подчиняется наработка на отказ многих невосстанавливаемых электронных приборов, например, электронных ламп, полупроводниковых приборов, некоторых приборов СВЧ.

Имеет три параметра, однако часто говорят либо о двух ( $\mu=0$ ), либо об одном – параметре  $\beta$ .

Смысл параметров:

$\alpha$  – параметр масштаба;

$\beta$  – параметр формы;

$\mu$  – параметр сдвига.

Свойства  $W(\alpha, \beta, \mu)$ :

Плотность вероятности

$$f(x; \alpha, \beta, \mu) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^\beta} (x - \mu)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^\beta\right), & x \geq \mu; \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x; \alpha, \beta, \mu) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^\beta\right), & x \geq \mu; \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$$

# Влияние параметра формы на график плотности вероятности:

- $0 < \beta < 1$  плотность похожа на экспоненциальный закон
- $\beta = 1$  вырождение в экспоненциальный закон
- $1 < \beta < 2,6$  положительная асимметрия графика
- $\beta = 2$  вырождение в закон Рэлея
- $2,6 < \beta < 3,7$  график практически симметричен
- $\beta > 3,7$  отрицательная асимметрия графика

