

# Математические предложения

# Высказывания и предикаты

**Высказыванием** называют любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Примеры: 1) Число 16 – четное (И).

2) Число 28 делится на 7 (И).

3)  $2 + 5 > 8$  (Л).

4)  $7 + 3 > 8$  (И).

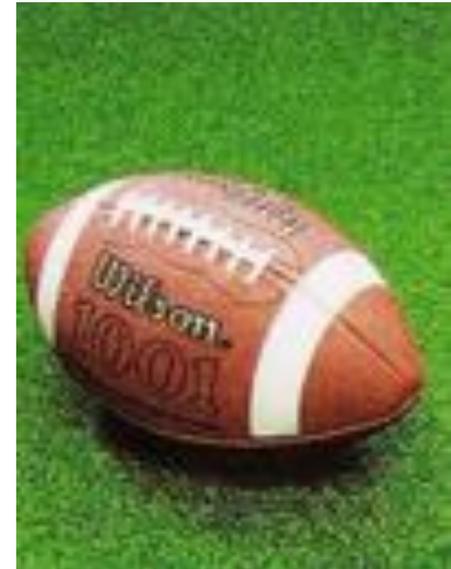
5) Число  $x$  – нечетное – *не высказывание*.

**«Истина» и «ложь» называются значениями ИСТИННОСТИ ВЫСКАЗЫВАНИЯ. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.**

Пример: В одной сказочной стране царь приговорил к смерти богатыря. Последней просьбой приговоренного было желание предоставить ему возможность выбрать вид казни из двух: смерть через повешение или отсечение головы; если же такой вид казни невозможен, то его должны освободить. Осужденный добавил, что он произнесет одно предложение (высказывание), если оно окажется ложным, пусть его повесят, если оно окажется истинным, пусть ему отрубят голову. Царь, конечно, согласился. Осужденный произнес: «Меня повесят», - и потребовал своего освобождения. Почему?».

Существуют предложения, относительно которых без дополнительных условий нельзя установить, истинно оно или ложно. Такие предложения называются **неопределенными высказываниями**

Пример: «Мяч круглый».



Два высказывания А и В **равносильны (эквивалентны)**, если они одновременно истинны или одновременно ложны:  $A = B$ .

Пример:

А: «Вчера был четверг»,

В: «Завтра будет суббота».

**Предикатом** называется предложение с одной или несколькими переменными, обращающееся в высказывание **всякий** раз при подстановке вместо переменных их значений.

Примеры:

1) Число  $x$  – четное                      2)  $x > 5$

3)  $y + 2 = 8$                               4)  $x < y$

5)  $x < y < z$

**ПРЕДИКАТЫ**

**Одноместны**

**e**

**A(x), B(x), ...**

**Двухместны**

**e**

**A(x; y), B(x;  
y)**

**...**

Вместе с предикатом, как правило, задается и множество, из которого выбираются значения переменной (переменных), входящей в предикат. Это множество называется **областью определения предиката**.

Пример: « $x < 5$ »,  $x \in \mathbb{N}$

**Множество значений переменной, которые обращают предикат в истинное высказывание, называется **множеством истинности предиката**.**

Примеры:

1)  $A(x): \langle x < 5 \rangle, x \in \mathbb{N}. T_A = \{1, 2, 3, 4\}$

2)  $A(x): \langle x < 5 \rangle, x \in \mathbb{R}. T_A = (-\infty; 5)$

3)  $C(x): \langle x + 2 = 7 \rangle. T_C = \{5\}.$

**3)  $D(x)$ : « $x \square y$ »  $x, y \in X$ , где  $X$  -  
множество однозначных четных  
натуральных чисел.**

**$T_D = \{(2,2), (4,2), (4,4), (6,2), (6,6), (8,2),$   
 $(8,4), (8,8)\}$ .**

Предложение называется **простым (элементарным)**, если никакая его часть сама не является предложением.

Предложение называется **составным**, если оно образовано из простых предложений с помощью логических связок.

**Логические связки** – это слова «и», «или», «не», «если..., то...», «тогда и только тогда» и др.

## Примеры:

- 1) Число 28 четное **и** делится на 7.
- 2) Число  $x$  меньше **или** равно 7.
- 3) Число 15 **не** делится на 4.
- 4) **Если** углы вертикальны, **то** они равны.

## Упражнение

Среди следующих предложений укажите высказывания и предикаты. Для высказываний укажите значения истинности, для предикатов – множества истинности.

1)  $(12 - 7) \cdot (6 + 3) = 45$

2)  $(15 + 12) : 3 > 10$

3)  $(12 - x) \cdot 4 = 24$

4) Число  $x$  – двузначное

5) Число 6 является корнем уравнения

$$(12 - x) \cdot 4 = 24$$

6)  $4x + 2y$

7) Для всех  $x$  выполняется равенство  $x + 2 = 2 + x$

# Операции над высказываниями и предикатами

## Отрицание

Отрицание некоторого высказывания  $A$  можно получить, если перед данным высказыванием поставить слова «неверно, что» или к сказуемому из высказывания  $A$  добавить частицу «не».

**Отрицанием высказывания  $A$**   
**называется такое высказывание  $\bar{A}$ ,**  
**которое истинно, если данное**  
**высказывание ложно, и ложно, если**  
**данное высказывание истинно.**

Примеры: 1)  $A$ : «10 кратно 2» – И,

$\bar{A}$ : «10 не кратно 2» – Л.

2)  $A$ : « $5 + 3 = 6$ » – Л,       $\bar{A}$ : « $5 + 3 \neq 6$ » – И.

	$\bar{A}$	$\overline{\bar{A}}$
$A$	$\bar{A}$	$\overline{\bar{A}}$
$\text{И}$	$\text{Л}$	$\text{И}$
$\text{Л}$	$\text{И}$	$\text{Л}$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Пример:  $A$ : «Число 6 четное»

$\bar{A}$ : «Число 6 нечетное»

$\overline{\bar{A}}$ : «Число 6 не нечетное» или  
«Число 6 четное»

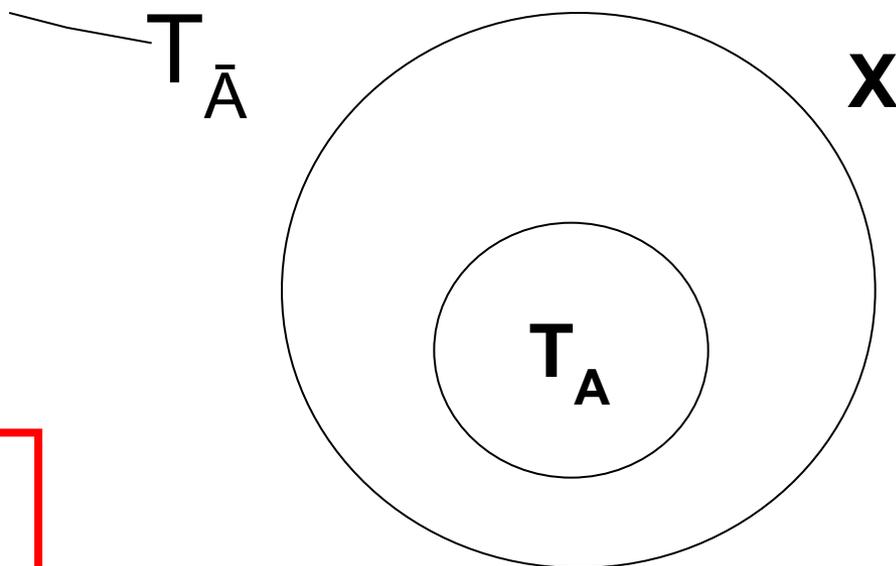
**Отрицанием предиката  $A(x)$ ,**  
заданного на множестве  $X$ , называют  
предикат  $\bar{A}(x)$ , определенный на том  
же множестве  $X$ , причем предикат  $\bar{A}$   
( $x$ ) истинен при тех значениях  $x$  из  
множества  $X$ , при которых предикат  $A$   
( $x$ ) ложен, и наоборот.

Пример:  $X = \{10, 15, 20, 25, 30\}$   $A(x)$ :  
«Число  $x$  оканчивается цифрой 5»

$\bar{A}(x)$ : «Неверно, что число  $x$   
оканчивается цифрой 5» или «Число  $x$  не  
оканчивается цифрой 5»

$$T_A = \{15, 25\}$$

$$T_{\bar{A}} = \{10, 20, 30\}$$



$$T_{\bar{A}} = T'_A$$

## Упражнения

1. Образуйте отрицание каждого из следующих высказываний; укажите, является истинным данное высказывание или его отрицание.

А: « $523 \square 3$ ».

В: «Значение выражения  $18:(7 - 7)$  не существует».

2. На множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  заданы предикаты:  $A(x)$ : «Число  $x$  – простое»,

$B(x)$ : « $x < 3$ »,  $C(x)$ : « $(x - 1)(x + 2) = 0$ ».

а) найти множество истинности каждого из данных предикатов;

б) для каждого из данных предикатов сформулируйте его отрицание и найдите его множество истинности.

# КОНЪЮНКЦИЯ

*Логическая операция, в результате которой из двух высказываний А и В с помощью логической связки «И» получается новое высказывание  $A \wedge B$ , называется **конъюнкцией** высказываний.*

**Конъюнкция** – от латинского *conjunctio* – «соединение»

**Конъюнкция** двух высказываний  $A$  и  $B$  - это такое высказывание  $A \wedge B$ , которое *истинно* тогда и только тогда, когда *оба высказывания истинны*.

Если же *хотя бы одно* из них *ложно*, то и конъюнкция *ложна*.

<b>А</b>	<b>В</b>	<b>А ∧ В</b>
<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>

## Примеры:

1) A: «15  $\square$  3», B: «15  $\square$  5»,

A  $\wedge$  B: «Число 15 кратно 3 и 5»

*Принадлежность двух признаков одному объекту*

2) A: «Квадрат является параллелограммом»

B: «Ромб является параллелограммом»

A  $\wedge$  B: «Квадрат и ромб - параллелограммы»

*Принадлежность одного признака двум объектам*

3)  $3 < 8 < 11$       А: « $3 < 8$ », В: « $8 < 11$ »

Двойное числовое неравенство  
представляет собой конъюнкцию двух  
неравенств

<b>А</b>	<b>В</b>	<b>А Λ В</b>	<b>В Λ А</b>
<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>

$$A \wedge B = B \wedge A$$

*коммутативный закон конъюнкции*

Пример:

$A \wedge B$ : «Число 12 кратно 3 и 4»

$B \wedge A$ : «Число 12 кратно 4 и 3»

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

*ассоциативный закон конъюнкции*

<b>A</b>	<b><math>\bar{A}</math></b>	<b>A <math>\wedge</math> A</b>	<b>A <math>\wedge</math> <math>\bar{A}</math></b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>

$$A \wedge A =$$

**A**

**A  $\wedge$   $\bar{A}$**  – тождественно ложная формула

## Замечание:

В обыденной речи конъюнкция может выражаться с помощью различных союзов: «и», «а», «но», «не только..., но и...» и др.

## Примеры:

- 1) «Число 12 делится не только на 3, но и на 4».
- 2) «Число 12 делится на 4, а 15 – на 5»

**Конъюнкцией** предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , называется предикат  $A(x) \wedge B(x)$ , заданный на том же множестве  $X$ , который *истинен* при тех значениях  $x \in X$ , при которых *истинны оба предиката*  $A(x)$  и  $B(x)$

Пример:  $A(x)$ : «Число  $x$  четное»,

$B(x)$ : «Число  $x$  кратно 5»,  $x \in X$ ,

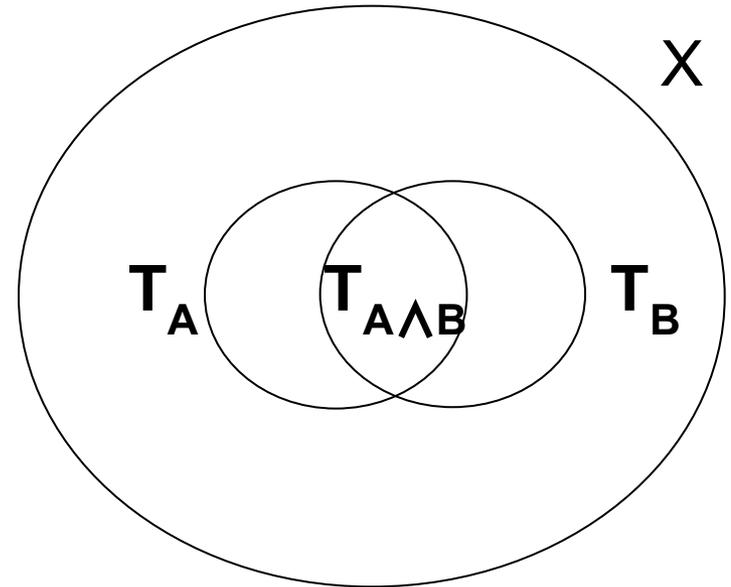
$$X = \{10, 15, 16, 20, 35\}$$

$A(x) \wedge B(x)$ : «Число  $x$  четно и кратно 5»

$$T_A = \{10, 16, 20\},$$

$$T_B = \{10, 15, 20, 35\}$$

$$T_{A \wedge B} = \{10, 20\}$$



$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$$

# ДИЗЪЮНКЦИЯ

*Логическая операция, в результате которой из двух высказываний А и В с помощью логической связки «ИЛИ» получается новое высказывание  $A \vee B$ , называется **дизъюнкцией** высказываний.*

**Дизъюнкция** – от латинского *disjunctio* – «разделение»

**Дизъюнкция** двух высказываний  $A$  и  $B$  - это такое высказывание  $A \vee B$ , которое *истинно* тогда и только тогда, когда *хотя бы одно* из высказываний *истинно*.

Дизъюнкция *ложна*, если *ложны оба* входящих в нее высказывания.

А	В	А ∨ В
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Замечание: В обыденной речи союз «или» употребляется в двух смыслах: как **разделительный** или **неразделительный**.

Примеры:

- 1) «Завтра в 12 ч дня я буду в институте **или** дома» – союз «или» **разделительный**.
- 2) «Оценка за контрольную работу по математике снижается, если допущена вычислительная ошибка **или** ошибка в тождественных преобразованиях» - союз «или» **неразделительный**.

## Примеры:

- 1)  $A$ : « $10 > 7$ » (И),       $B$ : « $10 = 7$ » (Л),  
       $A \vee B$ : « $10 \geq 7$ » (И).

Нестрогое числовое неравенство представляет собой дизъюнкцию.

- 2)  $2 \leq 3$  (И), т.к.  $2 < 3$ .

- 3)  $3 \geq 5$  (Л), т.к.  $3 > 5$  (Л) и  $3 = 5$  (Л).

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A ∨ B</b>	<b>B ∨ A</b>
<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>

$$A \vee B = B \vee A$$

*коммутативный закон дизъюнкции*

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И
Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

*ассоциативный закон дизъюнкции*

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

*дистрибутивный закон дизъюнкции  
относительно конъюнкции*

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

*дистрибутивный закон конъюнкции  
относительно дизъюнкции*

$A$	$\bar{A}$	$A \vee A$	$A \vee \bar{A}$
И	Л	И	И
Л	И	Л	И

$$A \vee A =$$

$A$

$A \vee \bar{A}$  – тождественно истинная формула

**Дизъюнкцией** предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , называется предикат  $A(x) \vee B(x)$ , заданный на том же множестве  $X$ , который *истинен* при тех значениях  $x \in X$ , при которых *истинен хотя бы один из предикатов*  $A(x)$  и  $B(x)$

# Примеры:

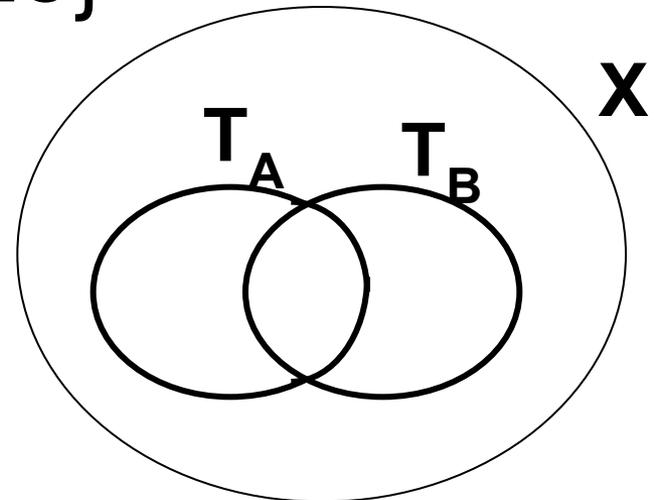
$$1) X = \{10, 12, 15, 17, 20, 25\}$$

$$A(x): \langle\langle x \leq 2 \rangle\rangle, B(x): \langle\langle x \leq 5 \rangle\rangle$$

$$A(x) \vee B(x): \langle\langle x \leq 2 \text{ или } x \leq 5 \rangle\rangle$$

$$T_A = \{10, 12, 20\}, T_B = \{10, 15, 20, 25\}$$

$$T_{A \vee B} = \{10, 12, 15, 20, 25\}$$



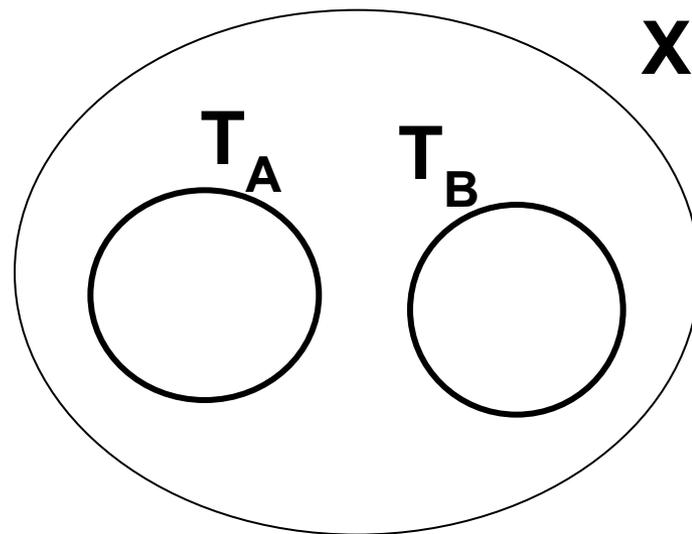
$$2) X = \{10, 12, 17, 20, 25\}$$

$$A(x): \langle x \leq 3 \rangle, B(x): \langle x \leq 5 \rangle$$

$$A(x) \vee B(x): \langle x \leq 3 \text{ или } x \leq 5 \rangle$$

$$T_A = \{12\}, \quad T_B = \{10, 20, 25\}$$

$$T_{A \vee B} = \{10, 12, 20, 25\}$$



$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$$

$$T_{\bar{A}} = T'_A$$

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$$

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$$

# *Законы де Моргана*

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

# Доказательство

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	A ∧ B	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Пример:

А: «Я играю в шахматы»,

В: «Я играю в шашки».

$A \vee B$ : «Я играю в шахматы или в шашки».

$\overline{A \vee B}$  : «Неверно, что я играю в шахматы или в шашки».

$\overline{A} \wedge \overline{B}$  : «Я не играю в шахматы и не играю в шашки».

# *Упражнения*

- 1) Известно, что высказывание  $A$  – истинно. Можно ли, зная лишь это определить значение истинности высказывания: а)  $A \wedge B$ ; б)  $A \vee B$ ?
  
- 2) Известно, что высказывание  $A$  – ложно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания: а)  $A \wedge B$ ; б)  $A \vee B$ ?

3) Покажите, что выполняя следующие задания, мы находим множество истинности конъюнкции и дизъюнкции предикатов:

а) Даны числа 31, 409, 305, 20, 1256, 3, 16, 265. Выпишите все числа, в записи которых 1) три цифры и есть цифра 3; 2) три цифры или есть цифра 3.

б) Из ряда 18, 48, 3, 14, 25 выписать числа: 1) двузначные и меньшие 20; 2) двузначные или меньшие 20.

# *Решение задач распознавание объектов*

Решение задач на распознавание объектов связано с понятиями конъюнкции и дизъюнкции. Решают такие задачи, используя определение соответствующего понятия.

Если понятие **a** определено через родовое понятие **c** и видовое отличие **P**, то его объем **A** можно представить в виде:

$$A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}$$

# Алгоритм распознавания

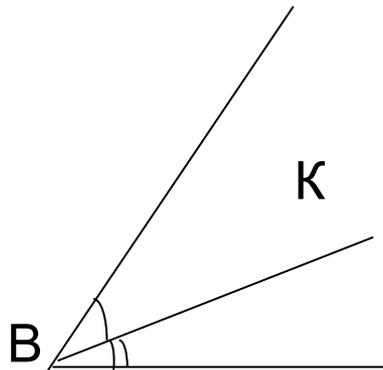
$$A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}$$

1. Проверить, истинно ли высказывание:  
 $x \in C$ .
2. Если  $x \notin C$ , то  $x \notin A$ .
3. Если  $x \in C$ , то выяснить, обладает ли объект  $x$  свойством  $P$ .
4. Если «да», то  $x \in A$ .
5. Если «нет», то  $x \notin A$ .

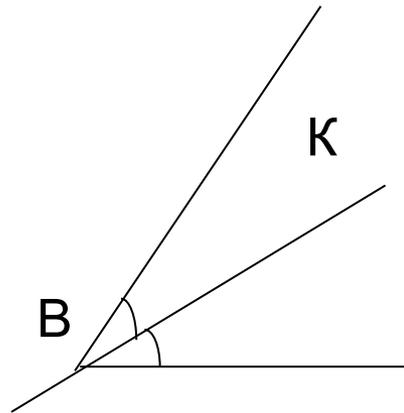
Если видовое отличие представляет собой **КОНЪЮНКЦИЮ** свойств, т.е.  $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_k$ , то проверку проводят до тех пор, пока не установят, что **все** свойства  $P_i$  присущи объекту  $x$ , то есть объект обладает свойством  $P$ . Если объект не обладает **хотя бы одним** из этих свойств, то проверку прекращают и делают вывод о том, что объект не обладает свойством  $P$ .

Пример: Выяснить, в каком случае  $BK$  является биссектрисой угла.

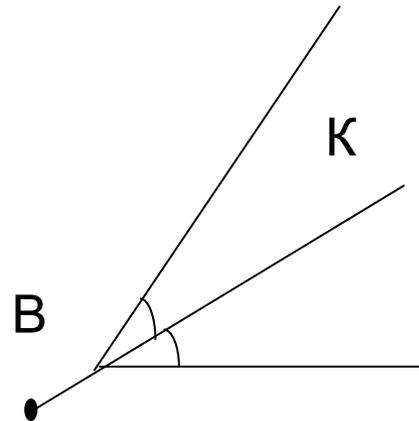
а)



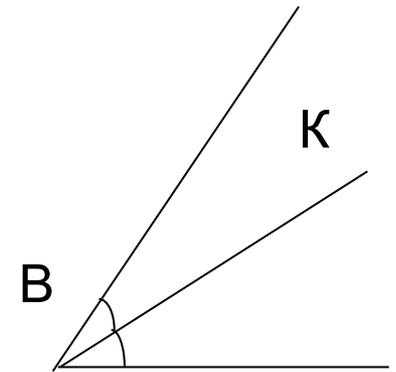
б)



в)



г)



**Биссектриса** угла – это луч,  
который выходит из вершины угла **И**  
делит этот угол пополам

Если видовое отличие представляет собой **дизъюнкцию** свойств:

$P = P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_k$ , то проверку проводят до тех пор, пока не установят, что **хотя бы одно** из свойств  $P_i$  присуще данному объекту. Если же объект не обладает **ни одним** из свойств  $P_i$ , то значит, он не обладает свойством  $P$ .

Пример: Даны множества  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  
 $B = \{2, 4, 6\}$ . Какие из чисел 1, 2, 3, 4, 5,  
6, 7, 8 принадлежат множеству  $A \cup B$ ?

**Объединением** множеств  $A$  и  $B$   
называется множество  $A \cup B$ ,  
состоящее из тех и только тех  
элементов, которые принадлежат  
множеству  $A$  **или** множеству  $B$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

# Импликация

Составное высказывание, которое образовано из двух элементарных высказываний с помощью логической связки «**если ... , то ...**», называют **импликацией**.

$$A \Rightarrow B$$

*«Если A, то B», «Из A следует B»,*

*«B следует из A»*

A – условие импликации,  
B – заключение импликации

**Импликацией** высказываний  $A$  и  $B$  называется высказывание  $A \Rightarrow B$ , которое **ложно** тогда и только тогда, когда  $A$  **истинно**, а  $B$  **ложно**.

В остальных случаях импликация истинна.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b><math>A \Rightarrow B</math></b>
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример:

А: «Треугольник ABC прямоугольный»

В: «В треугольнике ABC квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон»

А  $\Rightarrow$  В: «Если треугольник  
прямоугольный, то квадрат его  
гипотенузы равен сумме квадратов  
катетов»

- 1) «Если Наполеон – француз, то  $2 \cdot 2 = 4$ ».
- 2) «Если  $2 \cdot 2 = 5$ , то вода в реке соленая».
- 3) «Если слово «дом» является глаголом, то город Москва – столица России».

## Замечание:

Употребление слов «Если..., то...» в логике отличается от употребления их в обыденной речи, где мы как правило, считаем, что в предложении «Если А, то В» между А и В установлена причинно-следственная связь.

Математическую логику интересует лишь значение истинности высказывания.

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

*Доказательство*

<b>A</b>	<b>B</b>	<b><math>\bar{A}</math></b>	<b><math>A \Rightarrow B</math></b>	<b><math>\bar{A} \vee B</math></b>
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

$A \Rightarrow B$  – данная импликация

$B \Rightarrow A$  - импликация *обратная* данной

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$  - импликация  
*противоположная* данной

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  - импликация  
*обратная противоположной*  
или  
*противоположная обратной*

$A \Rightarrow B$ : «Если сумма цифр числа 126 кратна 3, то и само число 126 кратно 3»

$B \Rightarrow A$ : «Если число 126 кратно 3, то и сумма цифр числа 126 кратна 3»

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ : «Если сумма цифр числа 126 не кратна 3, то и число 126 не кратно 3»

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ : «Если число 126 не кратно 3, то и сумма цифр числа 126 не кратна 3»

$$A \Rightarrow B = \overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$

$$B \Rightarrow A = \overline{\overline{A} \Rightarrow \overline{B}}$$

**закон контрапозиции**

**Отрицание импликации**

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

$$\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\overline{\overline{A} \vee B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} = A \wedge \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A \Rightarrow B}} = A \wedge \overline{B}$$

**Импликацией** предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , называется предикат  $A(x) \Rightarrow B(x)$ , заданный на том же множестве, который **ложен** лишь при тех значениях  $x \in X$ , при которых  $A(x)$  истинен, а  $B(x)$  ложен.

Примеры: 1)  $A(x)$ : «Число  $x$  кратно 3» и  $B(x)$ : «Число  $x$  – двузначное»,  $x \in \mathbf{N}$

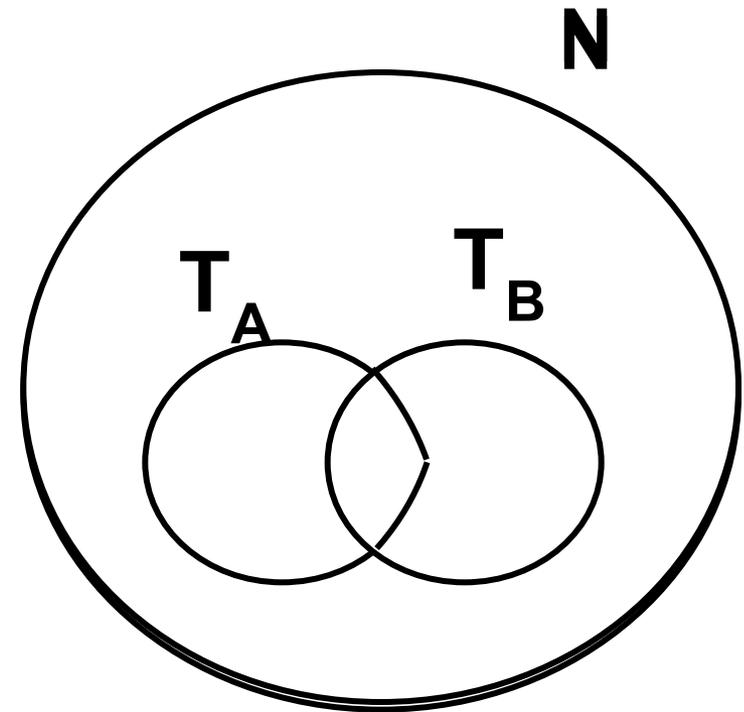
$A(x) \Rightarrow B(x)$ : «Если число  $x$  кратно 3, то оно двузначное».

$T_A$  – множество чисел, кратных 3,

$T_B$  – множество двузначных чисел.

$T_{A \Rightarrow B}$  – множество чисел, не кратных 3 или двузначных

$$T_{A \Rightarrow B} = T_A' \cup T_B$$



2)  $A(x)$ : «Число  $x$  - однозначное»,

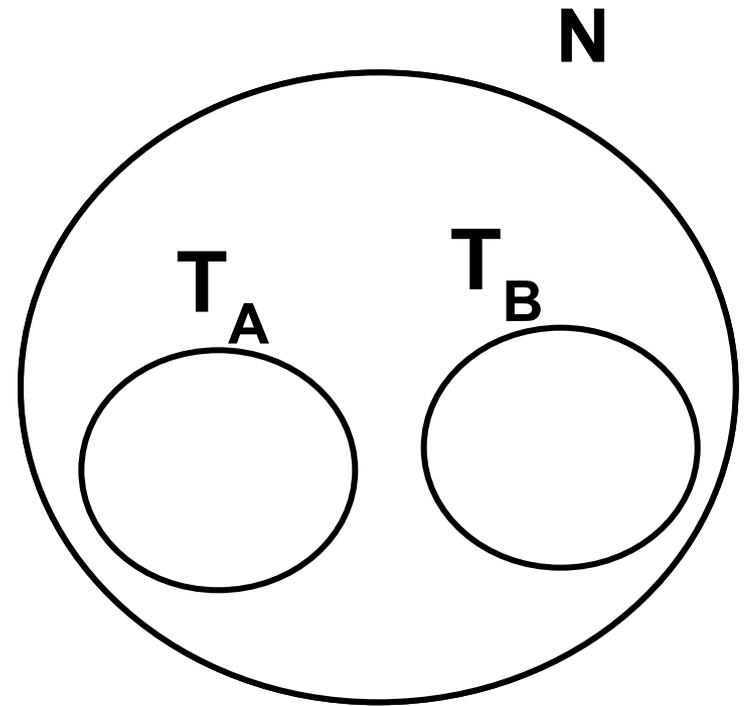
$B(x)$ : «Число  $x$  – двузначное»,  $x \in \mathbf{N}$

$A(x) \Rightarrow B(x)$ : «Если число  $x$  однозначное, то оно двузначное».

$T_A$  – множество  
однозначных чисел

$T_B$  – множество  
двузначных чисел.

$T_{A \Rightarrow B}$  – множество  
неоднозначных чисел



$$T_{A \Rightarrow B} = T_A' \cup T_B$$

2)  $A(x)$ : «Число  $x$  кратно 4»,  
«Число  $x$  кратно 2»,  $x \in \mathbf{N}$

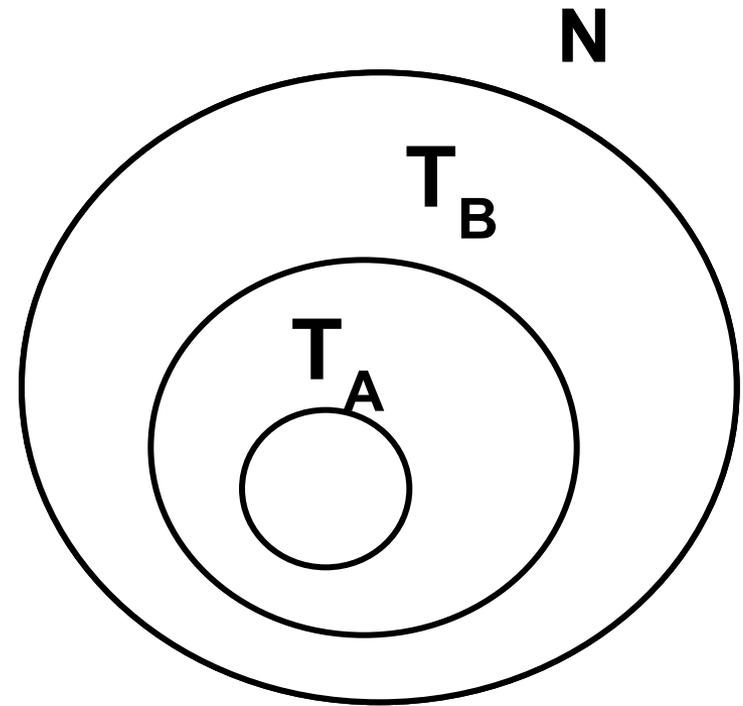
$B(x)$ :

$A(x) \Rightarrow B(x)$ : «Если число  $x$  кратно 4, то оно кратно 2».

$T_A$  – множество чисел, кратных 4

$T_B$  – множество чисел, кратных 2

$$T_{A \Rightarrow B} = \mathbf{N}$$

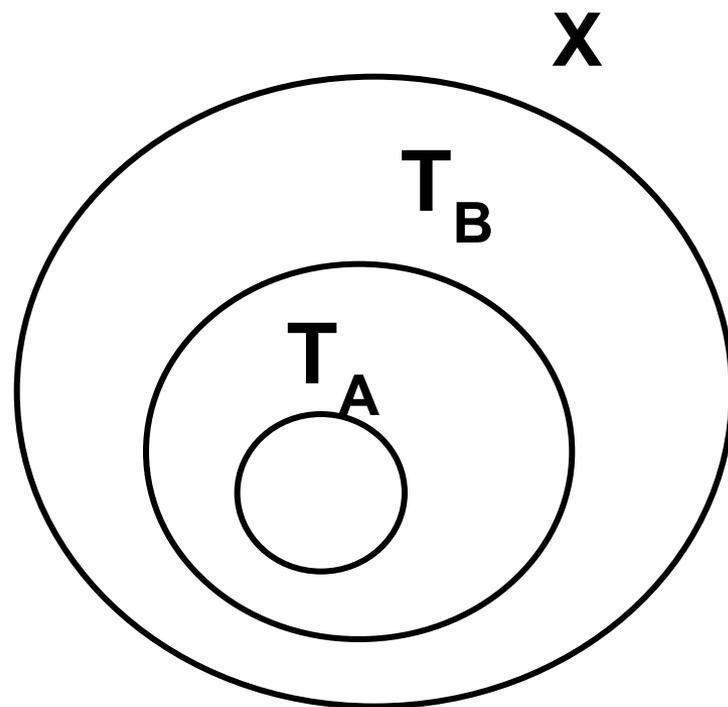


# Отношение следования

$A(x), B(x), x \in X$

Предикат  $B(x)$   
**логически следует**  
из предиката  $A(x)$ , то  
есть  **$A(x) \Rightarrow B(x)$** , тогда  
и только тогда, когда

$$T_A \subset T_B$$



$A(x) \Rightarrow B(x)$  истинна при всех  $x \in X$

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

**достаточное  
условие  
для  $B(x)$**

**необходимое  
условие  
для  $A(x)$**

Пример:  $A(x) \Rightarrow B(x)$ : «Если число  $x$  кратно 4, то оно кратно 2».

«Для того, чтобы число  $x$  было кратно 4, **необходимо**, чтобы оно было кратно 2».

«Для того, чтобы число  $x$  было кратно 2 **достаточно**, чтобы оно было кратно 4».

# ЭКВИВАЛЕНЦИЯ

Составное высказывание, которое образовано из двух элементарных высказываний с помощью логических связок **«если и только если»**, **«те и только те»**, **«тогда и только тогда, когда»** и т.п., называют **эквиваленцией**.

$$A \Leftrightarrow B$$

**«А тогда и только тогда, когда В»**

**Эквиваленцией** высказываний  $A$  и  $B$  называется высказывание  $A \Leftrightarrow B$ , которое *истинно*, если оба высказывания  $A$  и  $B$  истинны или оба высказывания  $A$  и  $B$  ложны.

В остальных случаях эквиваленция ложна.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b><math>A \Leftrightarrow B</math></b>
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

$$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A = A \Leftrightarrow B$$

*Доказательство*

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A ⇒ B</b>	<b>B ⇒ A</b>	<b>A ⇒ B ∧ B ⇒ A</b>	<b>A ⇔ B</b>
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И

**Эквиваленцией** предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ , заданных на множестве  $X$ , называется предикат  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ , заданный на том же множестве, который *истинен* лишь при тех значениях  $x \in X$ , при которых **оба предиката истинны** или **оба ложны**.

# Отношение равносильности

Пусть даны предикаты  $A(x)$  и  $B(x)$ ,  $x \in X$ .

Предикаты  $A(x)$  и  $B(x)$  **равносильны**,  
то есть  **$A(x) \Leftrightarrow B(x)$** , тогда и только  
тогда, когда  **$T_A = T_B$**

Если предикаты  $A(x)$  и  $B(x)$  равносильны на множестве  $X$ , то эквиваленция предикатов  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$  истинна при всех  $x \in X$ .

Пример:  $A(x)$  «Число  $x$  делится на 10»,

$B(x)$ : «Запись числа  $x$  заканчивается цифрой 0»

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ : «Число  $x$  делится на 10 тогда и только тогда, когда его запись оканчивается 0»

$T_A$  – множество чисел, кратных 10,

$T_B$

– множество чисел, запись которых оканчивается цифрой 0.

$T_A = T_B$ , значит  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ,

то есть эквиваленция  $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

истинна при всех  $x \in \mathbf{N}$

$$A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

**необходимое  
и  
достаточное  
условие  
для  $B(x)$**

**Необходимое  
и  
достаточное  
условие  
для  $A(x)$**

Пример: «Для того чтобы число делилось на 10, **необходимо и достаточно**, чтобы его запись оканчивалась нулем»

Замечание. Из равносильности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  на некотором множестве  $X$  не следует, что предикаты, выраженные теми же словами, окажутся равносильными на другом множестве  $Y$ .

Пример:

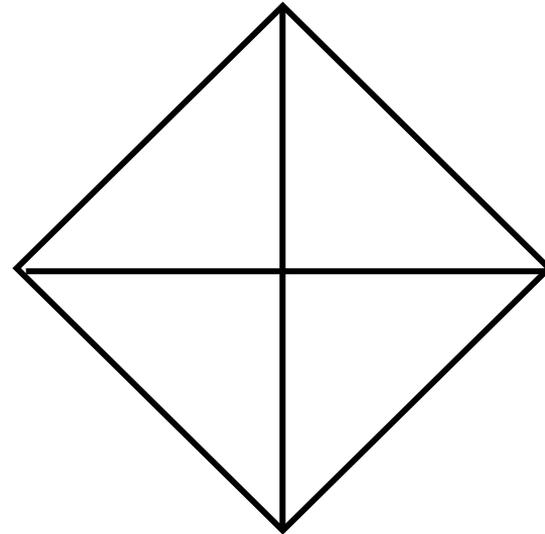
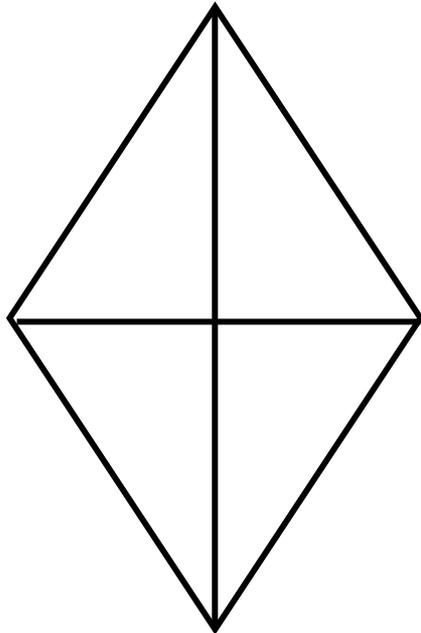
$A(x)$ : «Все стороны четырехугольника равны»,

$B(x)$ : «Диагонали четырехугольника перпендикулярны».

на множестве параллелограммов:

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ : «Для того чтобы стороны параллелограмма были равны, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были перпендикулярны» -

**ИСТИНА**

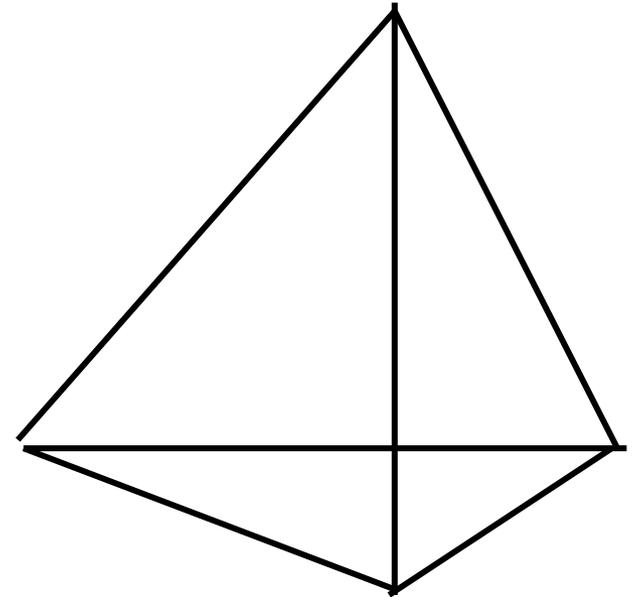


на множестве

четырехугольников:

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ : «Для того  
чтобы стороны  
четырехугольника  
были равны,  
необходимо и  
достаточно, чтобы его  
диагонали были  
перпендикулярны» -

**ЛОЖЬ**



**Спасибо за внимание!**