



Математические утверждения и их структура

1. Понятия
2. Высказывания и предикаты
3. Умозаключения

ПОНЯТИЯ



Объект

Существенные свойства

- свойства, присущие объекту, без которых объект не может существовать

Несущественные свойства

- свойства, отсутствие которых не влияет на существование объекта

Толковый словарь русского языка:

Существенный –

имеющий большое значение,
важный

Например,

*существенный признак;
существенные изменения,
недостатки*

Квадрат

Существенные свойства

ИМЕТЬ:
4 стороны
4 прямых угла
равные диагонали

Несущественны е свойства

цвет
размеры
расположение

Понятие – это форма мышления, в которой отражаются **существенные** свойства объекта

В языке понятие выражается
посредством слов или
словосочетаний
(термин)

**Понятия
начального
курса
математики**

Арифметические

Алгебраические

Геометрические

**Связанные
с
величинами**

Объем и содержание понятия

Содержание понятия –

совокупность всех взаимосвязанных существенных свойств объекта

Объем понятия – совокупность всех объектов, обозначаемых одним и тем же термином

Примеры:

а: «прямоугольник», в: «трапеция»

А – множество
прямоугольников

В – множество
трапеций

Содержание понятия «прямоугольник»:

быть четырехугольником, иметь все прямые углы,
иметь равные диагонали и др.

Содержание понятия «трапеция»:

быть четырехугольником, иметь две
параллельные стороны и две непараллельные
стороны.

Связь между объемом и содержанием понятия

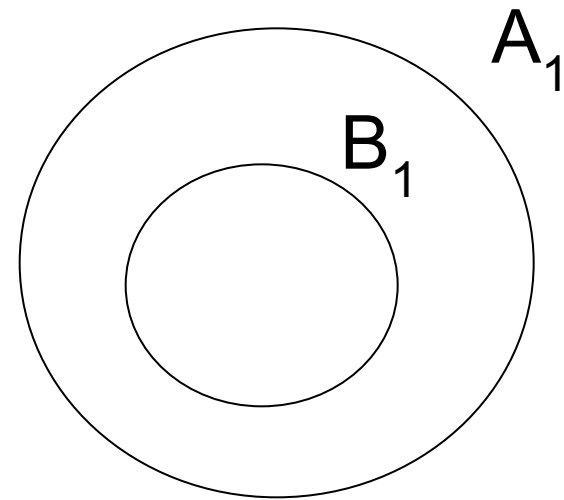
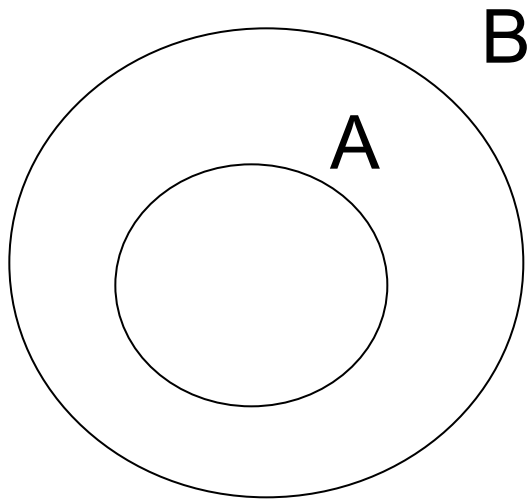
Понятия a : «квадрат», b : «прямоугольник»

Объемы A – множество квадратов,

B – множество прямоугольников

Содержание A_1 – множество
существенных свойств квадрата,

B_1 – множество существенных свойств
прямоугольника

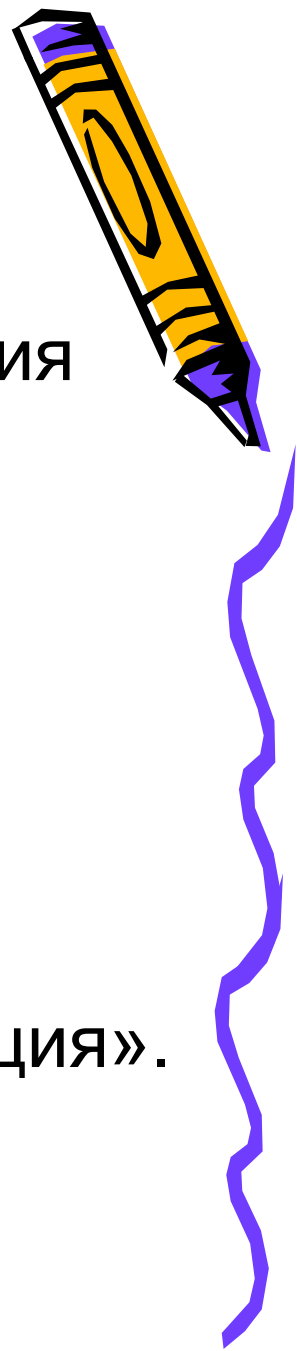


**Закон обратного отношения
между объемами и
содержаниями понятий:**

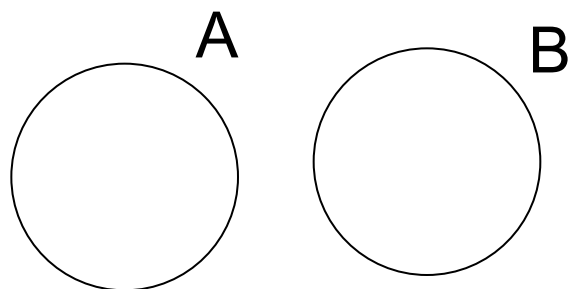
**чем шире объем понятия,
тем уже его содержание,
и наоборот**

Упражнения:

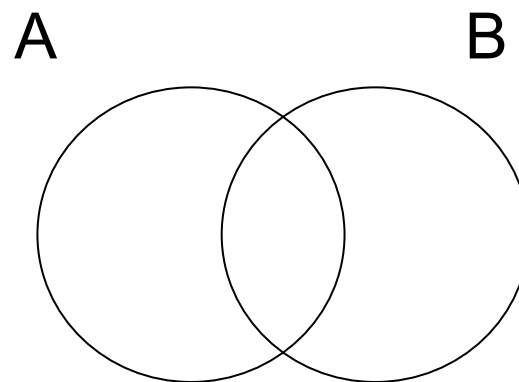
1. Назовите 5 существенных свойств понятия «параллелограмм»
2. Каков объем понятий:
 - a: «однозначное натуральное число»,
 - b: «натуральное число», c: «треугольник».
3. Начертите 3 геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия «трапеция».



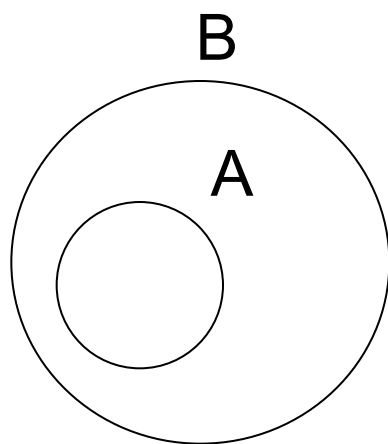
Отношения между понятиями



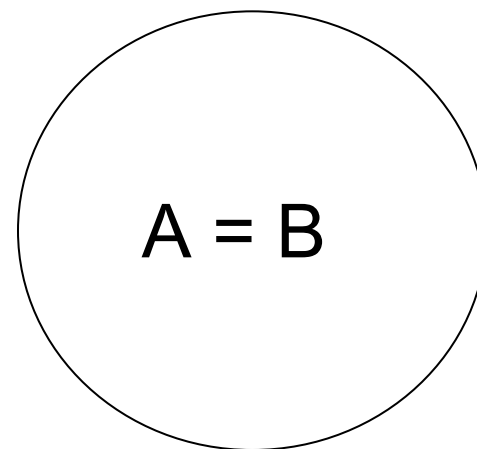
$$A \cap B = \emptyset$$



$$A \cap B \neq \emptyset$$



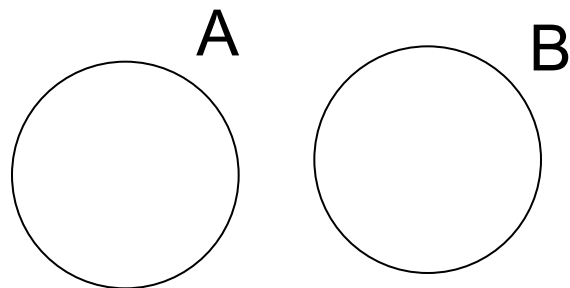
$$A \subset B$$



$$A = B$$



Пусть a и b – понятия, A и B – их объемы.

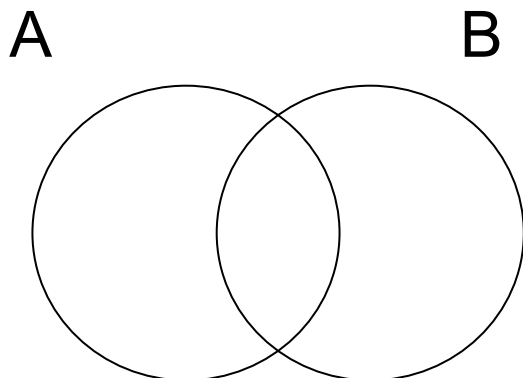


Если объемы понятий не пересекаются, то понятия называются

несовместимыми

Примеры: 1) a : «треугольник», b : «трапеция»,

2) a : «число», b : «фигура»,



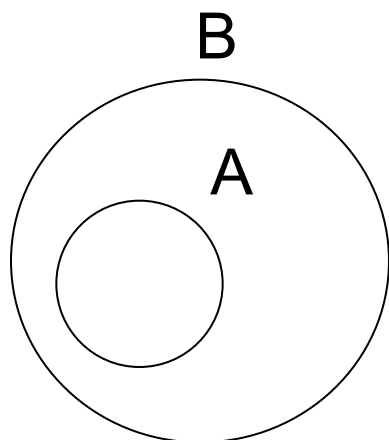
Если объемы понятий
пересекаются, то понятия
называются

совместимыми

Примеры:

1) а: «четное число», b: «число, кратное 3»,

2) а: «четыреугольник, имеющий прямой угол», b:
«трапеция»



Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то

а) понятие a – **видовое** по отношению к понятию b , а понятие b – **родовое** по отношению к понятию a ,

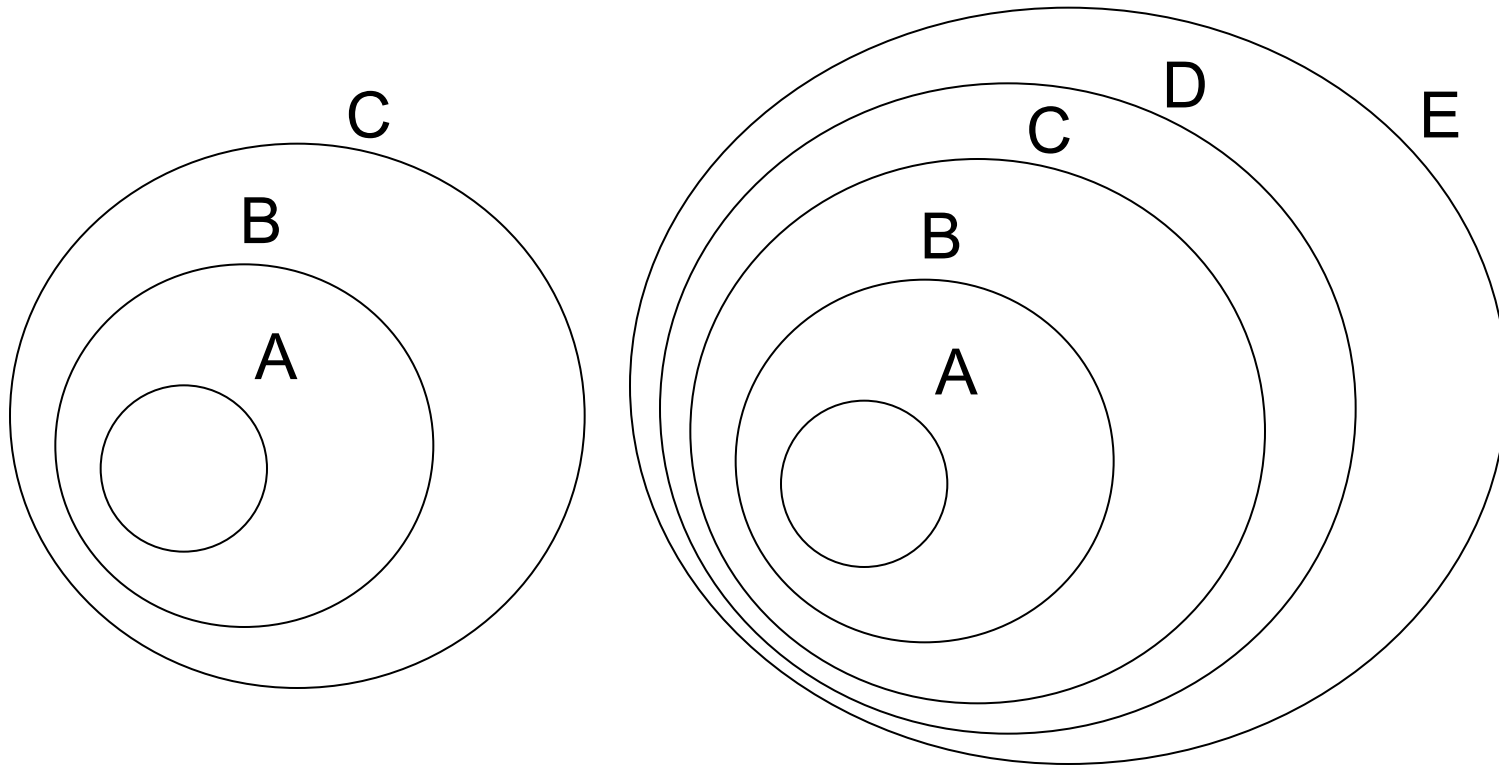
б) понятие a **уже**, чем понятие b , а понятие b **шире**, чем понятие a ,

в) понятие a есть **частный случай** понятия b , а понятие b есть **обобщение** понятия a .

Примеры:

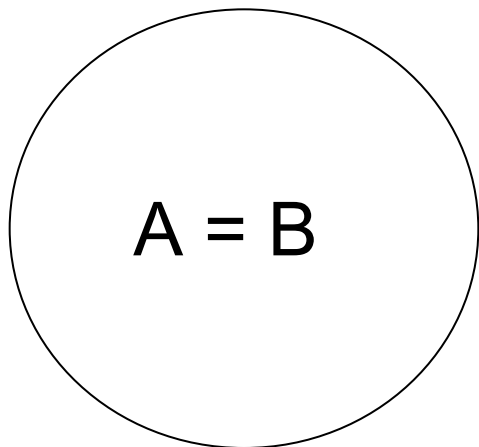
1) а: «двузначное число», b: «многозначное число»,

2) а: «квадрат», b: «прямоугольник», с:»
четырёхугольник»



Утверждения:

- 1) Для данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий.
- 2) Понятия рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому.



Если объемы понятий
равны, то понятия
называются

ТОЖДЕСТВЕННЫМИ

Примеры:

1) а: «равносторонний треугольник»,
«равноугольный треугольник»,

b:

2) а: «четное число», b: «число, кратное 2»

Чтобы установить отношения между понятиями **a** и **b** нужно:

1. Найти объемы этих понятий – множества **A** и **B**.
2. Установить отношения между множествами **A** и **B**.
3. Сделать вывод об отношении между понятиями **a** и **b**.

**Отношение
вида и рода**

**Отношение
части и целого**

квадрат — это ромб
ромб — это квадрат
треугольник — это многоугольник
многоугольник — это не треугольник

Определение понятий

Определение (дефиниция) понятия

(от лат. *definitio* – определение) –
логическая операция раскрытия
содержания понятия или значения
термина

Определение понятия –

предложение, с помощью которого
раскрывается содержание понятия
или значение термина

Схема определения

$$a \Leftrightarrow b$$



понятие,
содержание
которого надо
раскрыть



понятие, посредством
которого раскрывается
содержание
определяемого
понятия

Примеры:

1) **Квадрат** - это **прямоугольник, у которого все стороны равны**

2) **Прямоугольным треугольником** - **называется** **треугольник, имеющий прямой угол**

**Определяемое
понятие**

=

**Определяющее
понятие**

Определение понятия

Явное

**Через род и
видовое
отличие**

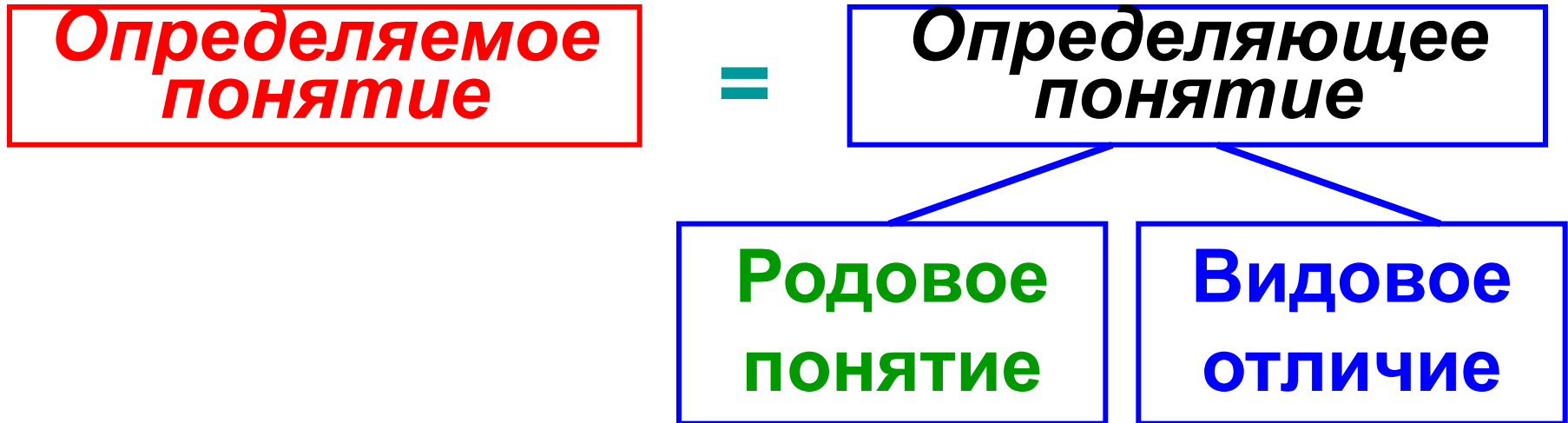
Неявное

**Контекс-
туально
е**

**Остен-
сивное**

Определение через род и видовое отличие

Квадрат - это **прямоугольник**, у
которого **все стороны**
равны



A Venn diagram consisting of two concentric circles. The outer circle is labeled 'прямоугольники' (rectangles) and the inner circle is labeled 'квадраты' (squares). This illustrates that squares are a subset of rectangles.

прямоугольники

квадраты

A Venn diagram consisting of two concentric circles. The outer circle is labeled 'треугольники' (triangles) and the inner circle is labeled 'прямоугольные треугольники' (right-angled triangles). This illustrates that right-angled triangles are a subset of triangles.

треугольники

**прямоу-
гольные
треуголь-
ники**

В любом определении понятия есть
элемент произвола:

- 1) в выборе термина
- 2) в выборе свойств, включаемых в определение

Генетическое определение

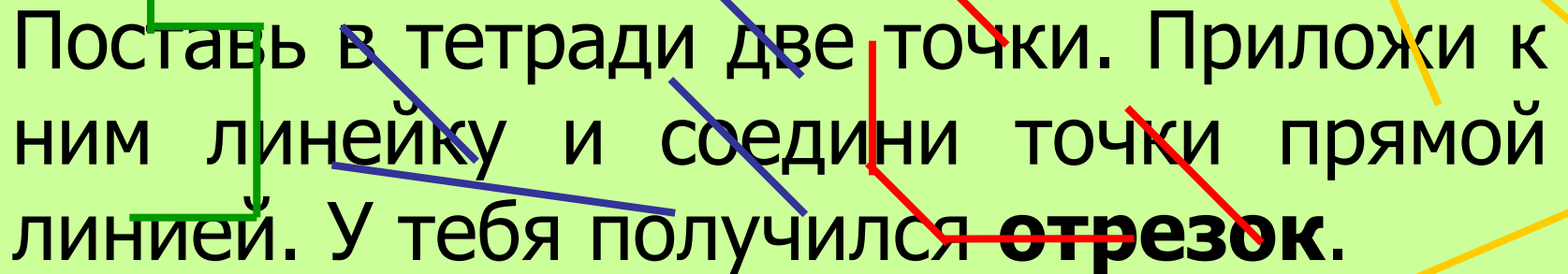
(от слова «*генезис*» –
происхождение)

- определение, в котором
указывается способ образования
определяемого объекта

Примеры:

- 1) ***Треугольником*** называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков
- 2) ***Шар*** – это геометрическая фигура, получаемая в результате вращения полукруга вокруг диаметра

Генетическое определение



Поставь в тетради две точки. Приложи к ним линейку и соедини точки прямой линией. У тебя получился **отрезок**.

- 1) Чем похожи эти ломаные?
- 2) Начерти такие же ломаные. Соедини концы каждой ломаной отрезком. Чем стали похожи новые ломаные?
- 3) Получившиеся фигуры называются **многоугольниками**.

Соразмерность

```
graph TD; A([Соразмерность]) --- B([Требования к определению]); B --- C([Отсутствие круга]); B --- D([Четкость, ясность]);
```

**Требования к
определению**

**Отсутствие
круга**

**Четкость,
ясность**

Определение должно быть соразмерным,
то есть объемы определяемого и
определяющего понятий должны
совпадать

Примеры:

1) Квадратом называется четырехугольник, у
которого все стороны равны

A_1 – множество квадратов,

A_2 – множество четырехугольников, все
стороны которых равны, т.е. множество
ромбов

$A_1 \neq A_2 \Rightarrow$ определение несоразмерно

$A_1 \subset A_2$, т. е. определяющее понятие *шире* \Rightarrow
ошибка широкого определения

2) **Имя существительное – это часть речи, обозначающая предмет и отвечающая на вопрос «кто?».**

A_1 – множество имен существительных,

A_2 – множество частей речи, обозначающих предмет и отвечающих на вопрос «кто?»

$A_1 \neq A_2 \Rightarrow$ **определение несоразмерно**

$A_2 \subset A_1$, т. е. определяющее понятие **уже** \Rightarrow
ошибка узкого определения

3) *Из истории философии.*

Древнегреческий философ Платон дал такое определение понятия «человек»: «Человек – это двуногое животное без перьев».

Другой философ Диоген с целью доказать логическую ошибку Платона в определении понятия принес на его лекцию ощипанного петуха и выпустил его в аудиторию со словами: «Вот человек Платона»
Утверждают, что Платон признал свою ошибку и уточнил первоначальное определение: «Человек – это двуногое животное без перьев с широкими НОГЯМИ»

Определение не должно содержать круга.

Круг возникает тогда, когда определяемое и определяющее понятия выражаются одно через другое, или понятие определяется само через себя.

Примеры:

1) Касательная к окружности – это прямая, которая касается окружности.

Правильно:

Касательная к окружности – это прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

2) Умножение чисел – это действие, при помощи которого находят произведение этих чисел.

Произведение чисел – это результат их умножения

Правильно:

Произведением натуральных чисел a и b

называется натуральное число $a \cdot b$, равное сумме b слагаемых, каждое из которых равно a .

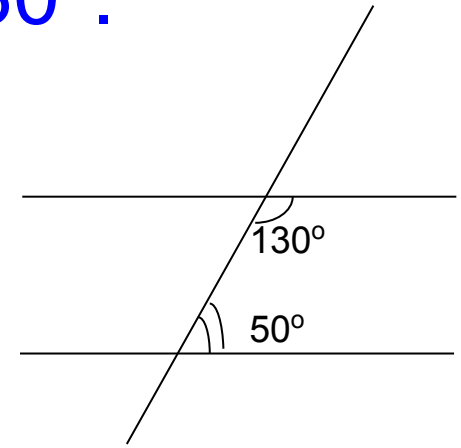
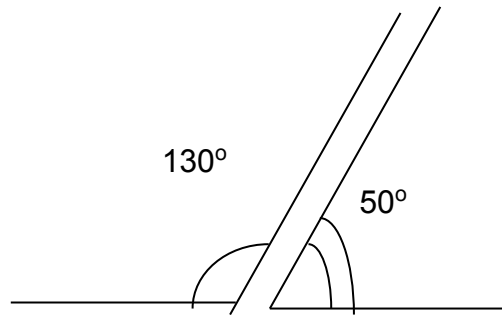
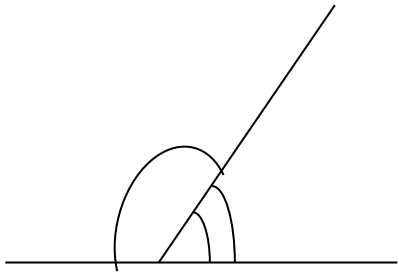
Определение должно быть четким, ясным

Это значит:

a) значения терминов, входящих в определяющее понятие, должны быть известны к моменту введения определения

б) в определении должны быть указаны все свойства, позволяющие однозначно выделять объекты, принадлежащие объему определяемого понятия (не должно быть двусмысленности)

Пример: Смежными называются углы, которые в сумме составляют 180° .



Правильно:

Смежные углы – это углы, одна сторона которых общая, а две другие являются дополнительными лучами

в) определение не должно содержать избыточных свойств в определяющей части

Пример: Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и все углы прямые.

Правильно:

Прямоугольник - это четырехугольник, у которого все углы прямые.

г) определение должно содержать понятие, родовое по отношению к определяемому. При этом надо стремиться в определяющем понятии указывать ближайшее родовое понятие по отношению к определяемому. Это позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

Пример: Квадрат – это когда все стороны равны.

Правильно: Квадрат - это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат – это четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые.

д) необходимо, чтобы определяемый объект существовал

Пример: Тупоугольный треугольник – это треугольник, у которого все углы тупые.

Правильно:

Тупоугольный треугольник - это треугольник, имеющий тупой угол.

Алгоритм построения определения понятия

1. Назвать определяемое понятие (термин).
2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.
3. Сформулировать видовое отличие, т.е. перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового понятия.
4. Проверить, выполнены ли требования к определению понятия (соразмерность, отсутствие круга, ясность).

Контекстуальное определение

- определение, в котором содержание нового понятия раскрывается через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл
ВВОДИМОГО ПОНЯТИЯ

Контекстуальное определение

3) Ты познакомился с новым заданием – **задачей**. В задаче никогда не указывается действие, которое нужно выполнить. Это очень важный признак задачи.

4) Ответь на вопрос первого задания.

Реши задачу.

Сравни решения. Чем они похожи? Чем различаются?

нужно догадаться, какое нужно выполнить действие?

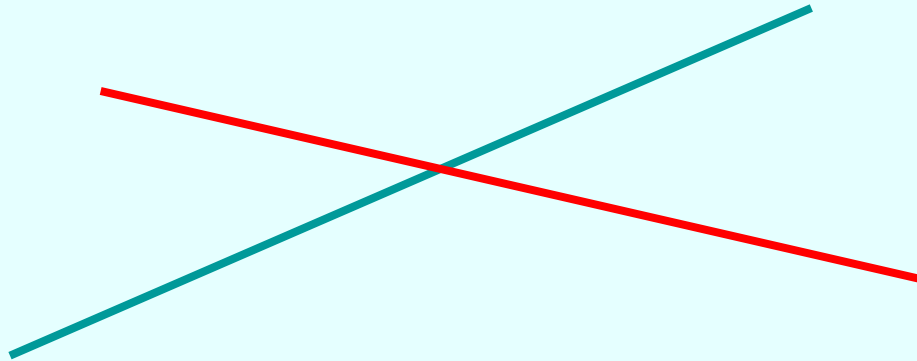
2) Проверь свои ответы: в первом задании можно сразу узнать, что нужно выполнить сложение, на это указывает знак действия; во втором задании нужно догадаться, какое действие необходимо выполнить.

Остенсивное определение

– определение путем показа.

Остенсивное определение

1) Рассмотрим чертеж:



Эти прямые пересекаются.

У этих прямых есть **общая** точка. Они называются **пересекающимися**.

2) Начерти пересекающиеся прямые.

2) Рассмотрим внимательно запись:

$$\begin{array}{c} \text{разность} \\ 5 - 3 = 2 \text{ - значение} \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ \text{уменьшаемое} \quad \text{вычитаемое} \end{array}$$

Какие ты увидел новые названия?

Как называют число, из которого вычитают?

А которое вычитают?

Подумай, почему они так называются.

Упражнения

1. В следующих определениях выделите определяемое и определяющее понятия, родовое понятие (по отношению к определяемому) и видовое отличие:

- 1) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
- 2) Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией

2. Назовите все свойства, которые содержатся в видовом отличии каждого из следующих определений:

- 1) Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла делящий угол пополам.
- 2) Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

3. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если можете, исправьте их.

- 1) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны.
- 2) Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам.
- 3) Сложением называется действие, при котором числа складываются.
- 4) Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны и все углы.
- 5) Параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны

Спасибо за внимание!