

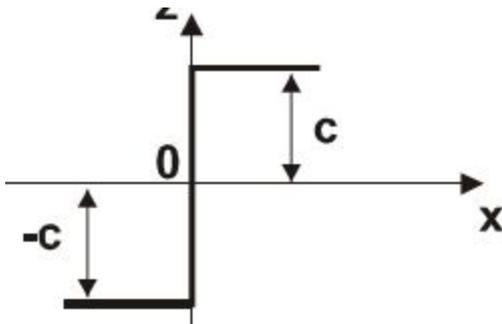
---

# Нелинейные системы автоматического управления

- **Нелинейной системой** автоматического управления называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено описываемое нелинейным уравнением

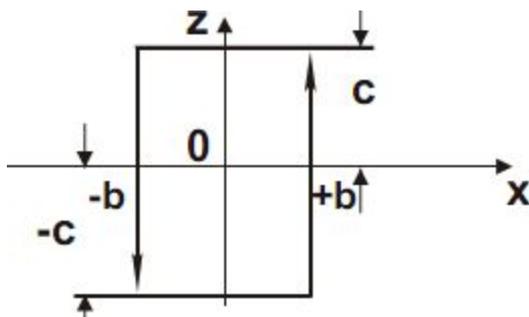
# Виды нелинейных звеньев:

- звенья релейного типа
  - идеальное реле



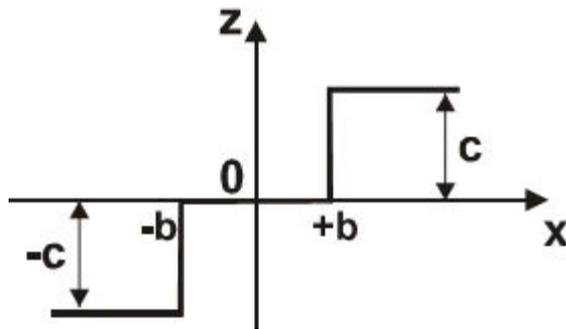
$$z = \begin{cases} c, & x \geq 0 \\ -c, & x < 0 \end{cases}$$

- реле с гистерезисом



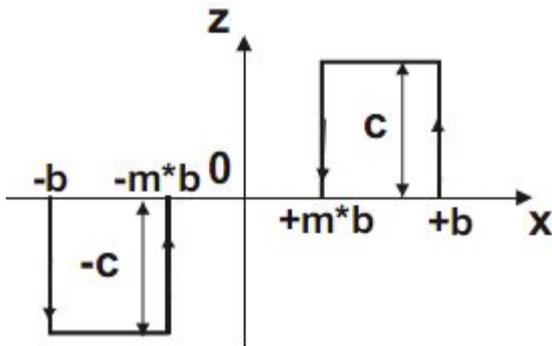
$$z = \begin{cases} c, & x \geq b \\ -c, & x < b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{↗} \\ \text{↘} \end{matrix} > 0$$
$$z = \begin{cases} c, & x > -b \\ -c, & x \leq -b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{↘} \\ \text{↗} \end{matrix} < 0$$

- идеальное реле с зоной нечувствительности



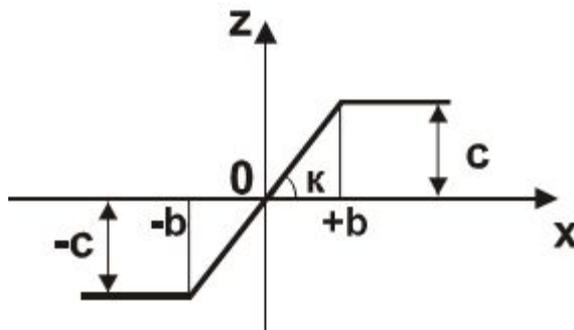
$$z = \begin{cases} c, & x > b \\ 0, & -b \leq x \leq b \\ -c, & x < -b \end{cases}$$

- реальное реле с зоной нечувствительности

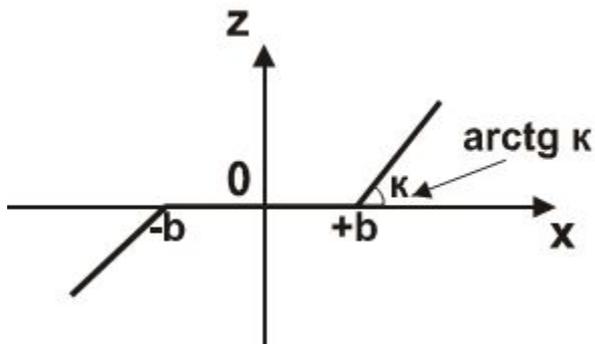


# ■ звено с кусочно-линейной характеристикой

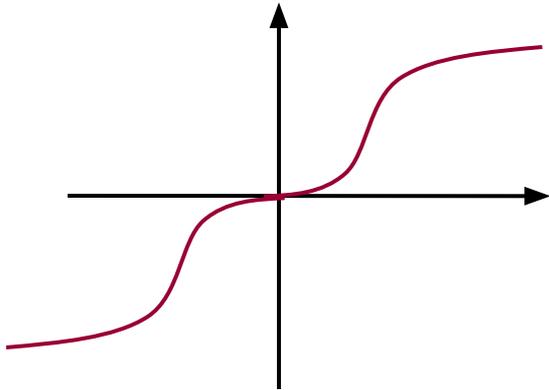
- усилитель с ограничением



- усилитель с зоной нечувствительности



- звено с криволинейной характеристикой



- звено, уравнение которого содержит произведение переменных или их производных
- **ЛОГИЧЕСКОЕ ЗВЕНО**

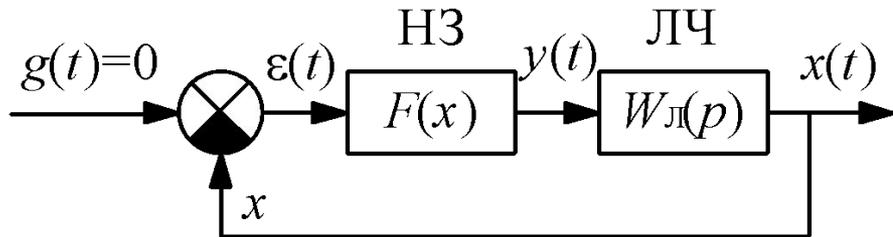
---

# Метод гармонической линеаризации

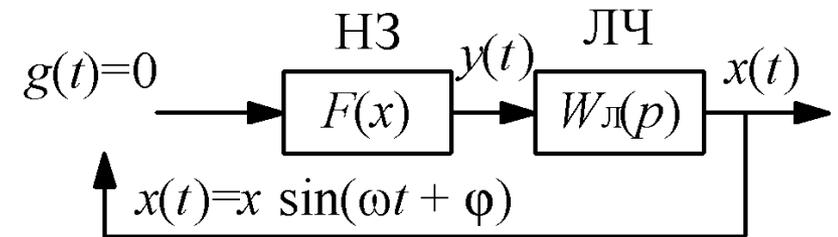
- относится к приближенным методам
- прост и универсален
- широко распространен в инженерной практике

# Идея метода гармонической линеаризации. Условия применимости

$$\varepsilon(t) = -x(t)$$



$$x^*(t) = x^* \sin \omega t$$



## Предполагается

- в системе автоколебания с амплитудой  $a_k$  и частотой  $\omega_k$ .
- Сигнал на входе НЗ  $x^*(t) = x^* \sin \omega t$
- Сигнал на выходе НЗ

$$y(t) = \frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\psi + \varphi_k), \quad \psi = \omega t,$$

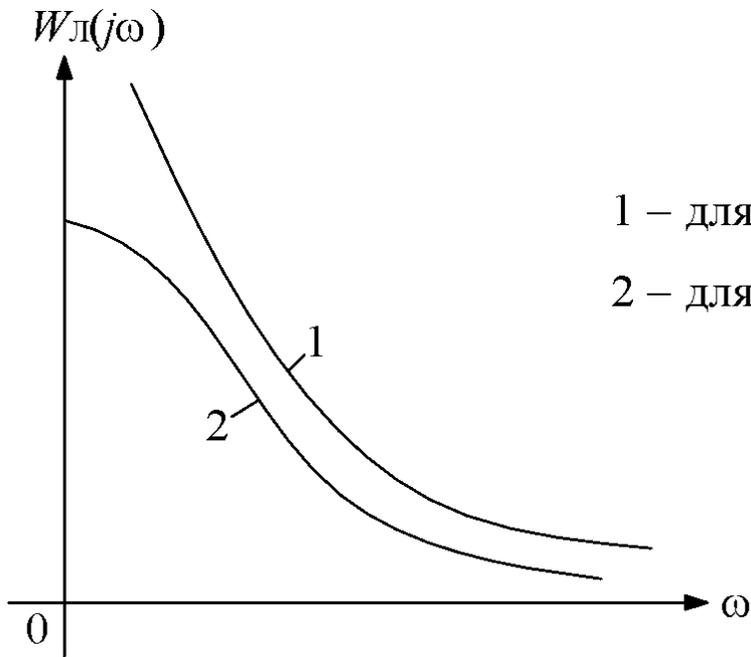
---

**предполагается,**

- что сигнал  $y(t)$ , пройдя через линейную часть  $W_{\Pi}(j\omega)$ , фильтруется ею в такой степени, что в сигнале на  $x(t)$  на выходе линейной части можно пренебречь высшими гармониками  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ... и считать, что

$$x(t) \approx x_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Это предположение называется **гипотезой фильтра.**



1 – для астатической ЛЧ

2 – для статической ЛЧ

$$\frac{y_k}{y_1} \cdot \frac{|W_L(jk\omega)|}{|W_L(j\omega)|} \ll 1$$

$$x^*(t) + x(t) = 0 \quad (1)$$

$$0 - x(t) = \varepsilon(t) \quad (2)$$

$$x^*(t) = \varepsilon(t) \quad (3)$$

$x^* = x_1$  - уравнение баланса амплитуд

$\varphi = \pi$  - уравнение баланса фаз

гармонических колебаний

**уравнения гармонического баланса**

# Решаются две группы задач:

- исследование периодических движений в нелинейных замкнутых системах (определение условий устойчивости и параметров ПД);
- исследование условий отсутствия моногармонических автоколебаний в нелинейных замкнутых системах.

# Гармоническая линеаризация нелинейностей

Пусть заданная нелинейная функция

$$y = F(x)$$

- При выполнении гипотезы фильтра переменная  $x(t) = a \cdot \sin \omega t = \sin \psi$ .
- Разложим периодический сигнал на выходе НЗ в ряд Фурье:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \sin \psi + B_1 \cos \psi + A_2 \sin 2\psi + B_2 \cos 2\psi + \dots$$

$$y = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \sin \psi + B_1 \cos \psi + A_2 \sin 2\psi + B_2 \cos 2\psi + \dots$$

## Предполагаем

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \psi) d\psi = 0 \quad \sin \psi = \frac{x}{a} \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega}$$

где  $p = d/dt$

$$y = q(a)x + \frac{q'(a)}{\omega} px$$

где  $q(a)$  и  $q'(a)$  – коэффициенты гармонической линеаризации

$$\left. \begin{aligned} q(a) &= \frac{A_1}{a} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} [F(a \cdot \sin \psi) \sin \psi] d\psi, \\ q'(a) &= \frac{B_1}{a} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} [F(a \cdot \sin \psi) \cos \psi] d\psi \end{aligned} \right\}$$

- Для однозначной нелинейной характеристики  $F(x)$  коэффициент  $q'(a)=0$ .
- Для неоднозначной характеристики типа гистерезис  $q'(a) \neq 0$  и  $q'(a) < 0$

- Замена исходного нелинейного уравнения приближенным уравнением для первой гармоники называется гармонической линеаризацией

$$W_H(a, \omega) = \frac{y}{x} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p$$

передаточной функцией нелинейного гармонически линеаризованного звена

# Исследование устойчивости периодических движений методом гармонической линеаризации

Запишем уравнение замкнутой гармонически линеаризованной нелинейной САУ в операторной форме:

$$\begin{cases} X(s) = -W_{Л}(s)Y(s) \\ Y(s) = W_{Н}X(s) \end{cases}$$

$W_{Л}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  — передаточная функция линейной части,  $n[P(s)] \leq m[Q(s)]$

# Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной нелинейной САУ:

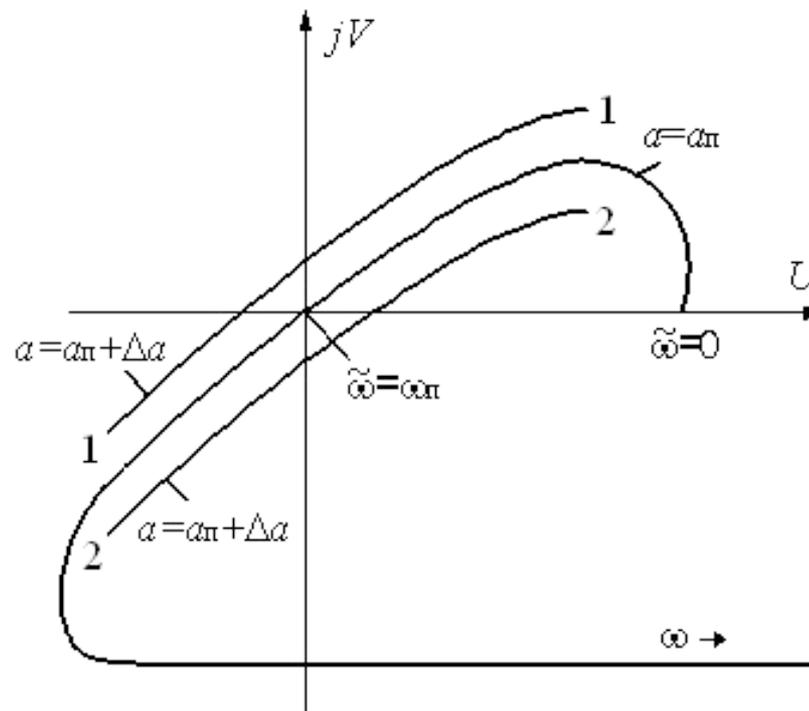
$$L(s) = Q(s) + R(s)\left(q + \frac{q'}{\omega} s\right) = 0$$

- подставим в  $L(s)$   $s=j\omega_{\Pi}$
- выделим вещественную  $U(a_{\Pi}, \omega_{\Pi})$  и мнимую  $V(a_{\Pi}, \omega_{\Pi})$  части.
- по критерию Михайлова

$$\left. \begin{aligned} U(a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) &= 0, \\ M(a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} U(a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) &= 0, \\ M(a_{\Pi}, \omega_{\Pi}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

- определяются параметры ПД  $a_{\Pi}$  и  $\omega_{\Pi}$ .



- Если при положительном приращении амплитуды  $\Delta a > 0$  кривая Михайлова займет положение 1-1, а при отрицательном приращении амплитуды  $\Delta a < 0$  займет положение 2-2, то исследуемые ПД с параметрами  $(a_n, \omega_n)$  устойчивы, т.е. в НС имеют место автоколебания. В противном случае ПД – неустойчивы, а сама нелинейная САУ устойчива в малом.

# Частотный метод исследования устойчивости ПД в НС Л. С. Голдфарба (1946 г.)

Основная идея

$$1 + W_H(a) \cdot W_L(s) = 0 \quad (4)$$

$W_H(a)$  – комплексный коэффициент  
передачи НЭ

$$W_H(a, \omega) = q(a) + jq'(a) = |W_H(a)|e^{j\varphi_H(a)}$$

$$|W_H(a, \omega)| = \sqrt{[q(a)]^2 + [q'(a)]^2}, \quad \varphi_H(a) = \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)}$$

$$s = j\omega$$

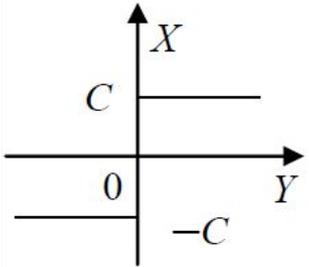
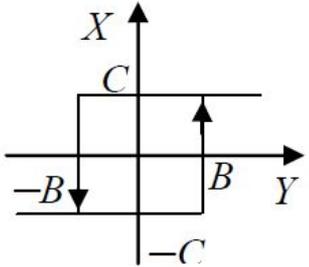
решим полученное уравнение относительно неизвестных  $a_{\Pi}$  и  $\omega_{\Pi}$ .

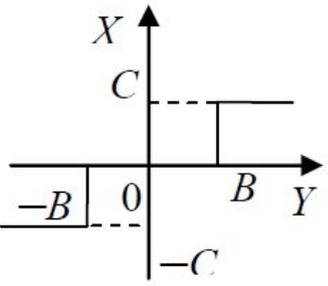
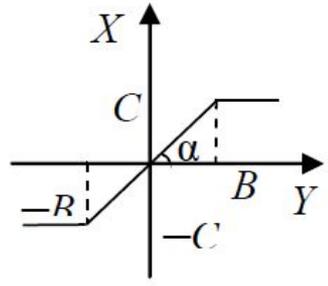
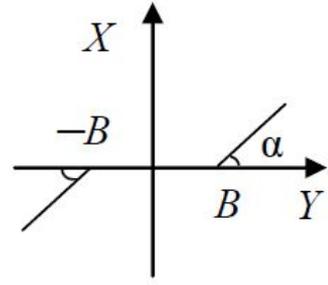
**Графоаналитическое решение**

$$W_{\Pi}(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)} = Z_H(a)$$

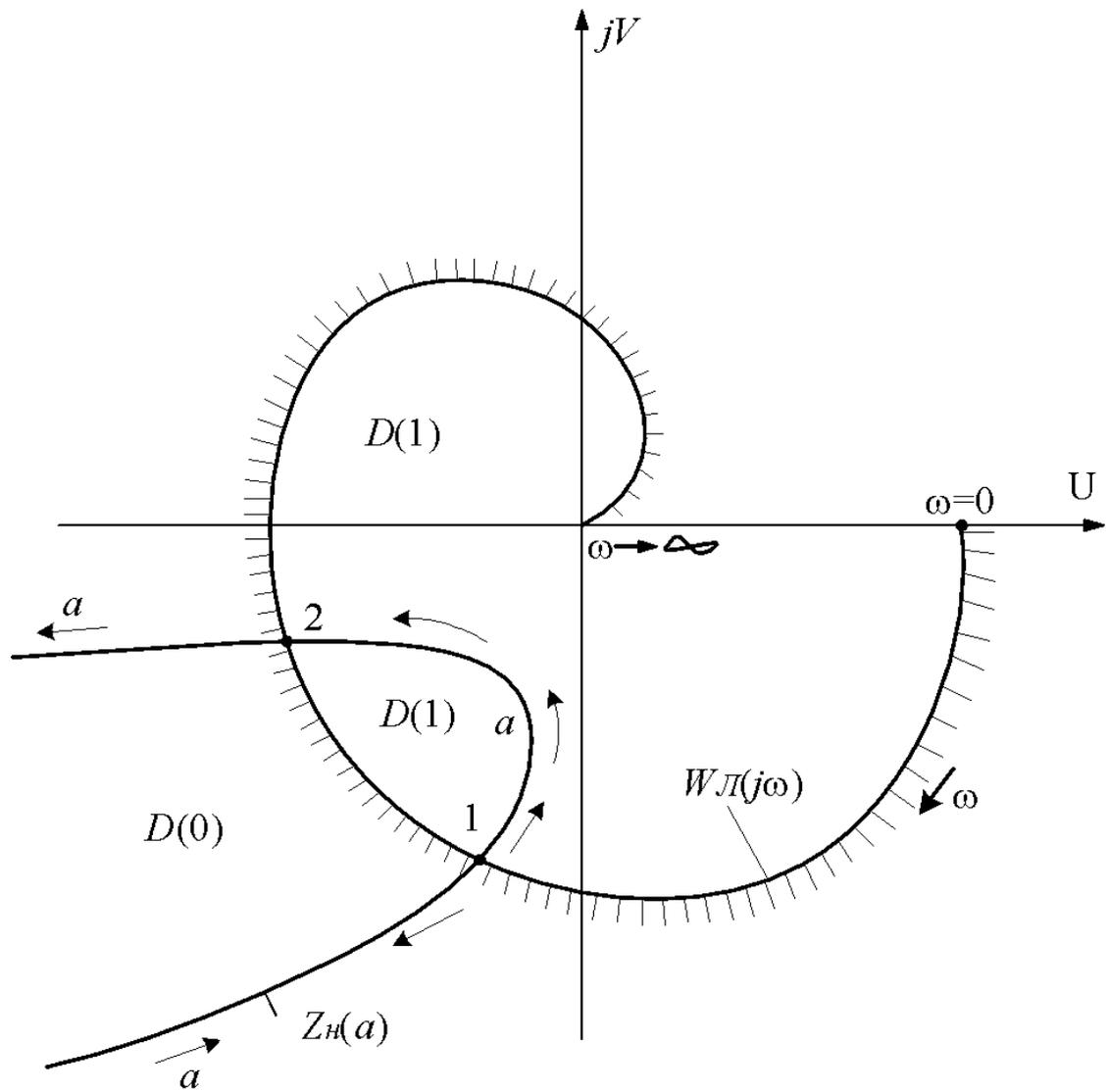
$Z_H(a) = -\frac{1}{W_H(a)}$  - инверсный коэффициент гармонической линеаризации

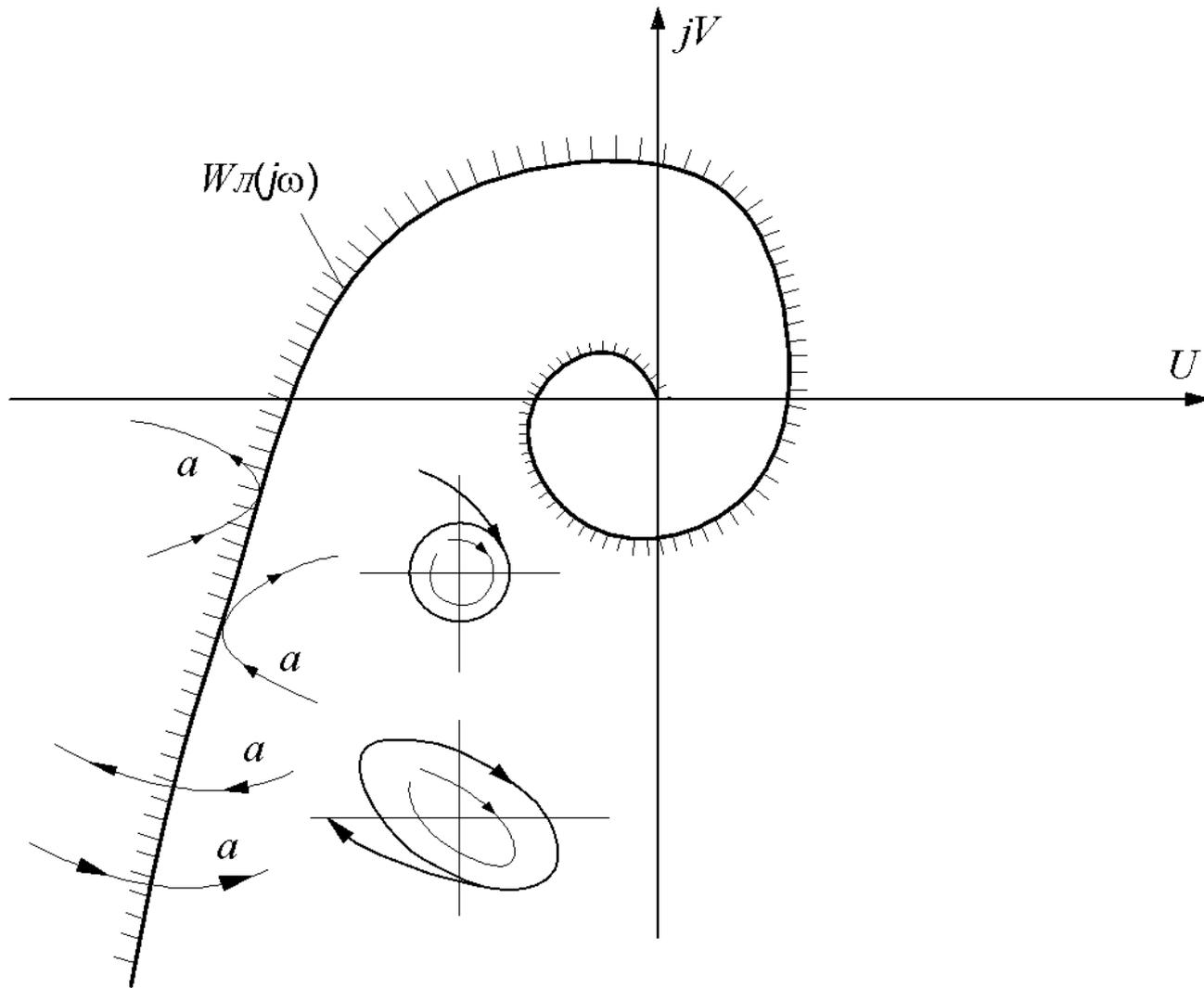
## Коэффициенты гармонической линейзации типовых нелинейных звеньев

№ пп	Статическая характеристика	Название звена и уравнение	Выражения для коэф- фициентов гармонической линеаризации	
			$q$	$q'$
1		<p>Идеальное двухпозиционное реле</p> $X = \begin{cases} C & \text{при } Y > 0 \\ -C & \text{при } Y < 0 \end{cases}$	$\frac{4C}{\pi A}$	0
2		<p>Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности</p> $X = \begin{cases} C & \text{при } Y > B \\ -C & \text{при } Y < -B \end{cases} \quad Y > 0$ $X = \begin{cases} C & \text{при } Y > -B \\ -C & \text{при } Y < -B \end{cases} \quad Y < 0$	$\frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$ при $A \geq B$	$\frac{4CB}{\pi A^2}$ при $A \geq B$

3		<p>Идеальное трехпозицион- ное реле</p> $X = \begin{cases} C & \text{при } Y > B \\ 0 & \text{при }  Y  \leq B \\ -C & \text{при } Y < -B \end{cases}$	$\frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$ <p>при <math>A \geq B</math></p>	0
4		<p>Усилитель с насыщением</p> $X = \begin{cases} KY & \text{при }  Y  \leq B \\ C & \text{при } Y > B \\ -C & \text{при } Y < -B \end{cases}$ <p><math>K = \operatorname{tg} \alpha</math></p>	$\frac{2K}{\pi} \left( \operatorname{arcsin} \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right)$ <p>при <math>A \geq B</math></p>	0
5		<p>Усилитель с зоной нечувст- вительности</p> $X = \begin{cases} K(Y - B) & \text{при } Y > B \\ 0 & \text{при }  Y  \leq B \\ K(Y + B) & \text{при } Y < -B \end{cases}$ <p><math>K = \operatorname{tg} \alpha</math></p>	$K - \frac{2K}{\pi} \left( \operatorname{arcsin} \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \right)$ <p>при <math>A \geq B</math></p>	0

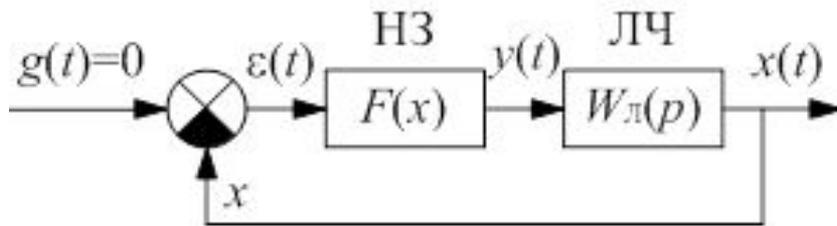
- Оба годографа и строятся на одной комплексной плоскости.
- $W_{Л}(j\omega)$  - АФХ линейной части определяет частоту  $\omega_{п}$  ПД,
- $Z_H(a)$  - амплитуду  $a_{п}$  ПД.
  
- *ПД – устойчивы, если, двигаясь по характеристике в сторону возрастания амплитуды, переходим из неустойчивой в устойчивую область D-разбиения при устойчивой линейной части .*





# Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова

$$\varepsilon(t) = -x(t)$$



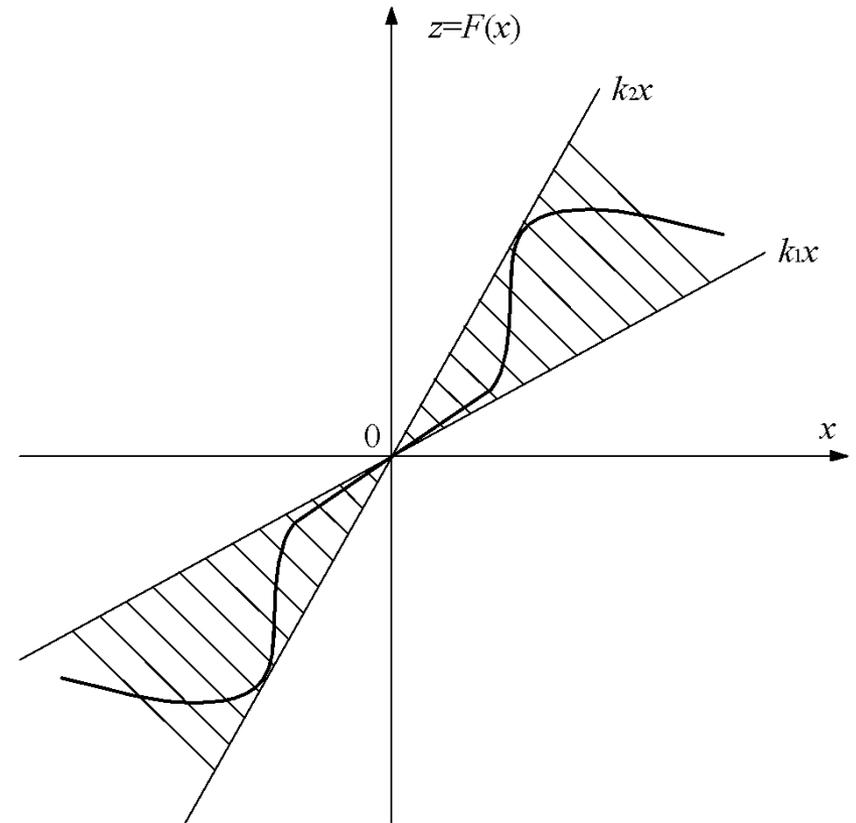
$$z = F(x)$$

расположенные внутри угла,  
образованного прямыми

$$z = k_1 x \quad z = k_2 x$$

$$(0 < k_1 < k_2)$$

$$z = hx \quad k_1 < h < k_2$$



$$0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq K \quad K_1 = 0$$

- линейная часть системы устойчива  $W_L(s)$

Абсолютная устойчивость нелинейной САУ предложена в 1959 г. в работе румынского математика В. М. Попова.

**Теорема.** Если замкнутая система состоит из устойчивой линейной части с передаточной функцией, все полюсы которой располагаются в левой полуплоскости, и нелинейного элемента с характеристикой  $z = F(x)$ , лежащей в угле  $0 \leq F(x)/x \leq K$ , то достаточным условием этой системы является выполнение при всех  $\omega \geq 0$  неравенства

$$\operatorname{Re} \left[ (1 + jq\omega) \cdot \frac{W_{II}(j\omega)}{1} + \frac{1}{k} \right] > 0$$

где  $q$  – произвольное вещественное число

# Геометрическая интерпретация теоремы.

Введем видоизмененную частотную характеристику  $W^*(j\omega)$

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\Pi}(j\omega) \quad \operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega \operatorname{Im} W_{\Pi}(j\omega)$$

обозначим

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) = U^*(\omega) \quad \operatorname{Im} W^*(j\omega) = V^*(\omega)$$

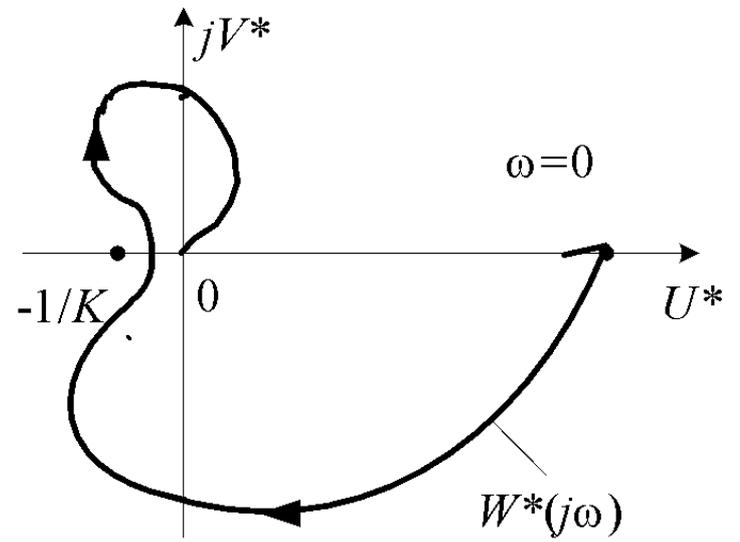
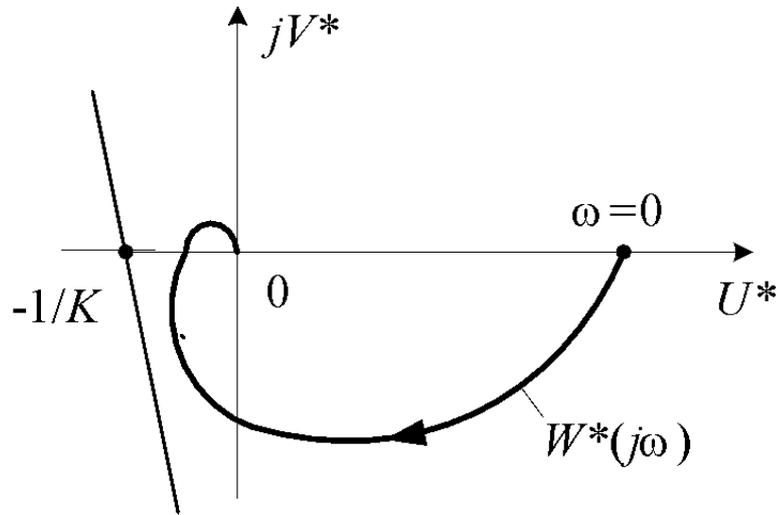
$$\operatorname{Re} \left[ (1 + jq\omega) \cdot W_{\Pi}(j\omega) + \frac{1}{K} \right] = \operatorname{Re} (W_{\Pi}(j\omega)) - q\omega \cdot \operatorname{Im} W_{\Pi}(j\omega) + \frac{1}{K} > 0$$

$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) + \frac{1}{K} > 0$$

$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) + \frac{1}{K} = 0$$

(4) определяет собой прямую линию на плоскости  $W^*(j\omega)$ , которая проходит через точку с координатами  $(-\frac{1}{K}, j0)$  с угловым коэффициентом, равным  $\frac{1}{q}$ .

**Теорема.** САУ будет абсолютно устойчива, если на плоскости видоизмененной частотной характеристики  $W^*(j\omega)$  линейной части системы можно провести прямую через точку так, чтобы  $W^*(j\omega)$  располагалась справа от этой прямой. Указанную прямую принято называть **прямой Попова**.



# Второй метод Ляпунова

- не требует нахождения решения дифференциального уравнения

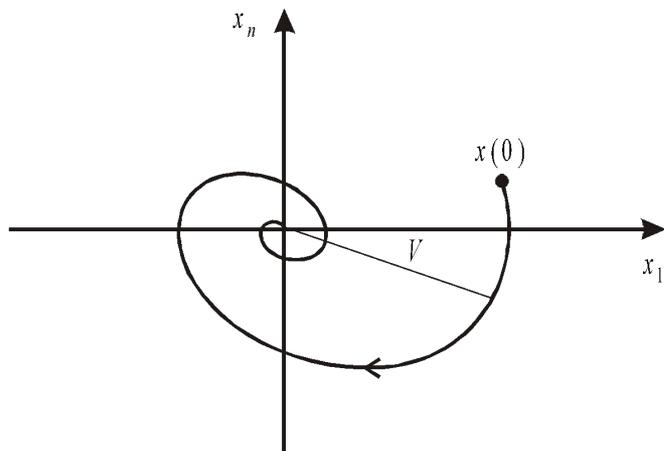
## основная идея

замена анализа решений нелинейных уравнений произвольного порядка на оценку свойств этих решений с помощью дифференциального неравенства

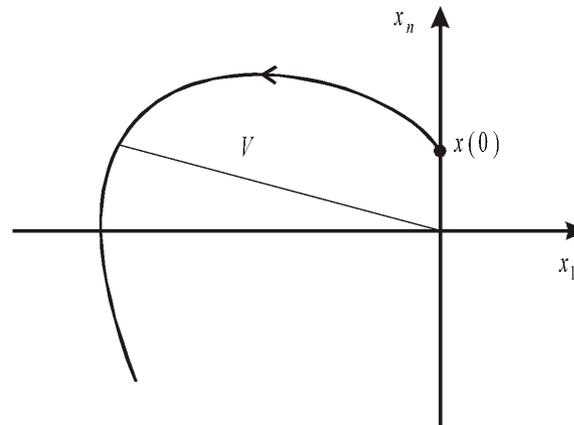
- исследуется изменение «расстояния» в пространстве состояний от текущей точки системы до начала координат
  - В качестве оценки расстояния можно использовать скалярную функцию, которую обозначим через  $V(x)$
  - фазовые траектории системы
- $$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0$$
- устойчивое состояние равновесия - «стягиваются»

- Суть второго метода Ляпунова сводится к оценке изменения некоторой функции координат состояния системы вдоль траекторий движения

**$V(x)$  - называют *функцией Ляпунова*.**



*a*



*б*

Рис. 1. Изменение функции  $V$  в случае устойчивой (*a*) и неустойчивой (*б*) систем

Функция  $V(x)$  называется **положительно определенной** в области  $D$ , если выполняются свойства

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

**Полной производной функции Ляпунова в силу системы**  
называется функция  $V(x)$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \quad \text{– вектор-строка частных производных.}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x) \quad \text{в развернутой форме}$$

## Теоремы второго метода Ляпунова

Состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова  $V(x)$  ее полная производная в силу системы есть отрицательно определенная функция, т. е. при выполнении условий

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 & \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0. \end{cases}$$

## Теорема о неустойчивости

*Состояние равновесия системы является неустойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова  $V(x)$  ее полная производная в силу системы представляет собой также положительно определенную функцию.*

- теоремы дают только достаточные условия устойчивости и неустойчивости

## ■ Пример

с помощью второго метода Ляпунова  
оценить устойчивость системы, поведение  
которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + u. \end{cases}$$

Полагаем  $u = 0$  и рассмотрим автономную  
систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$V(0) = 0.$$

- Определим теперь полную производную функции Ляпунова вдоль траектории движения автономной системы

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 10x_2^2 = -10x_2^2$$

- обращается в нуль не только в начале координат, но и на всей оси .

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

$$\dot{V}(x) = 2(x_1 + x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 10x_1x_2 - 8x_2^2$$

- полная производная новой функции Ляпунова есть отрицательно определенная функция.
- Следовательно, исходная система является асимптотически устойчивой.