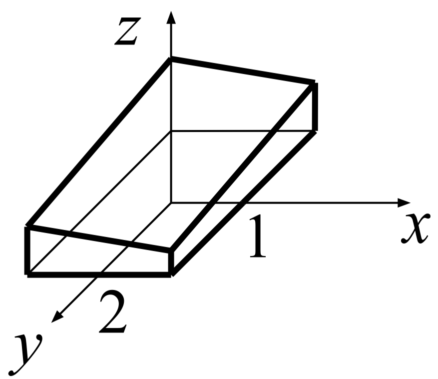
Лекция 2-2.

- **7)** $z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y,\qquad D: \left(-1 \le x \le 1;\ -2 \le y \le 2\right).$

- 

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy =$$

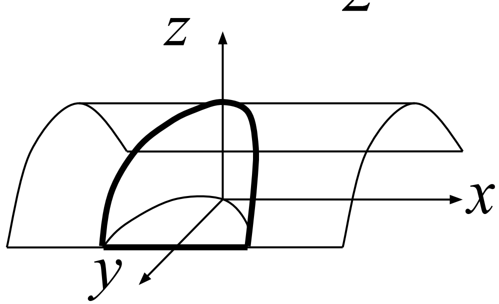
$$= \int_{-1}^{1} dx \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

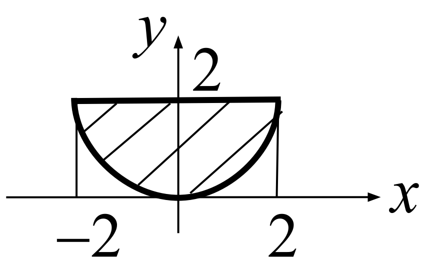
$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 8.$$

8) Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 4 - y^2,\ \ y = \frac{x^2}{2},\ \ z = 0.$$

$$z = 4 - y^2,\ \ z = 0,\ \ y = 2,\ \ y = \frac{x^2}{2}.$$



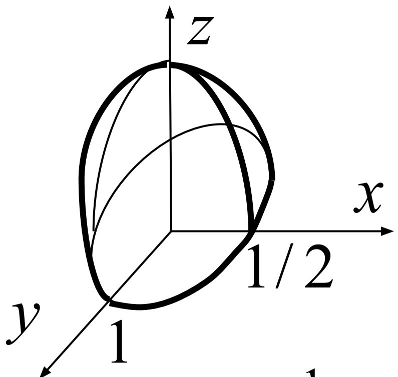


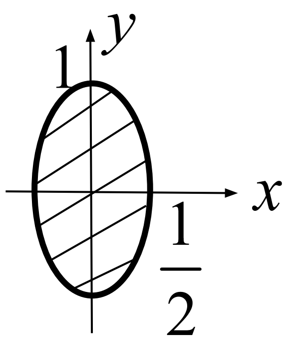
$$V = 2\int_0^2 dx \int_{x^2/2}^{2} \left(4 - y^2\right) dy = 2\int_0^2 dx \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{2} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right) dx = 2\left(\frac{16}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{21}.$$

9) Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 1 - 4x^2 - y^2,\ z = 0. \qquad 4x^2 + y^2 = 1.$$





$$V = 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \left(1 - 4x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \left|2x = \sin t\right| = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

9.4 Замена переменных в двойном интеграле.

- **При переходе от переменных x, y к переменным u, v**

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

- **двойной интеграл примет вид**

$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} z\left[x(u,v), y(u,v)\right]|J|\,dudv$$

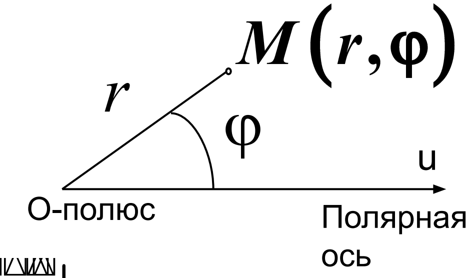
- **где J- функциональный определитель Якоби (якобиан).**

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

- **Итак,**
- **1) область D заменяем на D^*;**
- **2) $d\sigma = \left|J\right| du dv$ - элемент площади в координатах $u, v.$**

- **Предполагается, что функции $x = x\left(u, v\right),\ y = y\left(u, v\right)$ непрерывны со своими частными производными в D и D^* .**

9.5 Двойной интеграл в полярных координатах.



- $r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ **- полярный радиус.**
- $\varphi(M)$ **- полярный угол, принимает бесконечное множество значений отличающихся друг от друга на** $2k\pi$**.**
- **Значение** $\varphi:\ 0\le\varphi<2\pi$ **- называют главным значением (иногда:** $-\pi<\varphi\le\pi$ **).**
- **Положение любой точки определяется заданием** $r,\ \varphi$

$$\left(0\le r<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\right).$$

Связь декартовых и полярных координат:

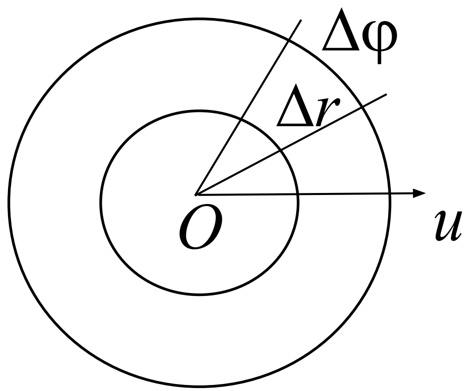
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

- **Вычислим якобиан:** $J = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial r} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$

- **Двойной интеграл от функции** $f(x, y)$ **по области** D **в полярных координатах примет вид:**

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Элемент площади в полярных координатах вычисляется по формуле



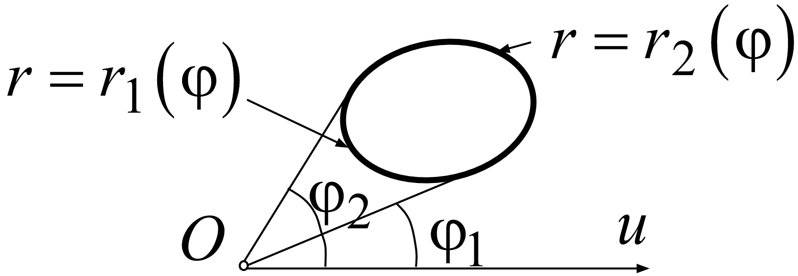
$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi \approx r\Delta r\Delta\varphi$$

- т. е.

$$d\sigma = r\,dr\,d\varphi$$

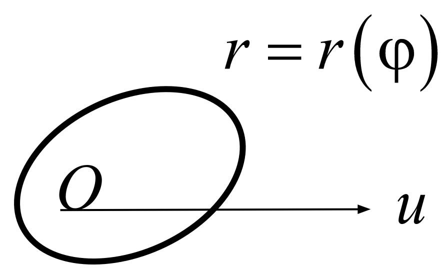
9.6 Примеры:

- 1) Полюс не содержится внутри области D .



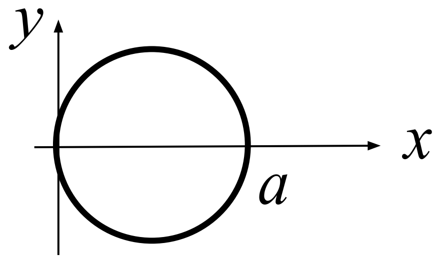
$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$$

2) Полюс содержится внутри области D.



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr$$

3) $D: x^2 + y^2 \le ax$



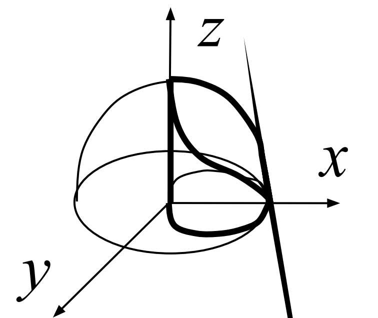
Введем полярные координаты $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ J = r$

- Уравнение границы примет вид $r^2 = ar\cos\varphi$
- или $r = a\cos\varphi$
- Тогда

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr$$

4) Найти объем общей части шара радиуса $r_1 = a$ с центром в начале координат и цилиндра радиуса $r_2 = \dfrac{a}{2}$ уравнение оси которого $x = a/2$.

- **На этом рисунке изображена**
- **верхняя половина объема.**



- **Область интегрирования имеет вид**

- **Так как областью интегрирования является окружность, то удобно перейти к полярным координатам (см. пример 3).**

Из уравнения шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **для верхней полусферы имеем** .

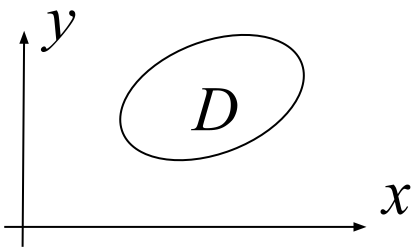
$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = -2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, d\left(a^2 - r^2\right) =$$

$$= -4\int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{a\cos\varphi} = -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \left(a^3 \sin^3\varphi - a^3\right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

9.7 Приложения двойных интегралов.



- 1) Масса плоской пластинки.
- Поверхностная плотность $\mu(x, y)$
- Элемент массы равен $dM = \mu(x, y)\,d\sigma$.
- Масса всей пластинки равна

$$M = \iint_D \mu(x, y)\,d\sigma.$$

2) Статические моменты инерции и центр тяжести пластинки.

- $$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(x_k, y_k)\Delta\sigma_k, \qquad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(x_k, y_k)\Delta\sigma_k.$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma, \qquad M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma.$$

$$x_{ц.т.} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}, \quad y_{ц.т.} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}.$$

3) Моменты инерции пластинки.

$$I_x = \iint\limits_D y^2 d\sigma, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 d\sigma.$$

- Центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy d\sigma.$$

- Полярный момент инерции относительно оси Oz

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) d\sigma = I_x + I_y.$$