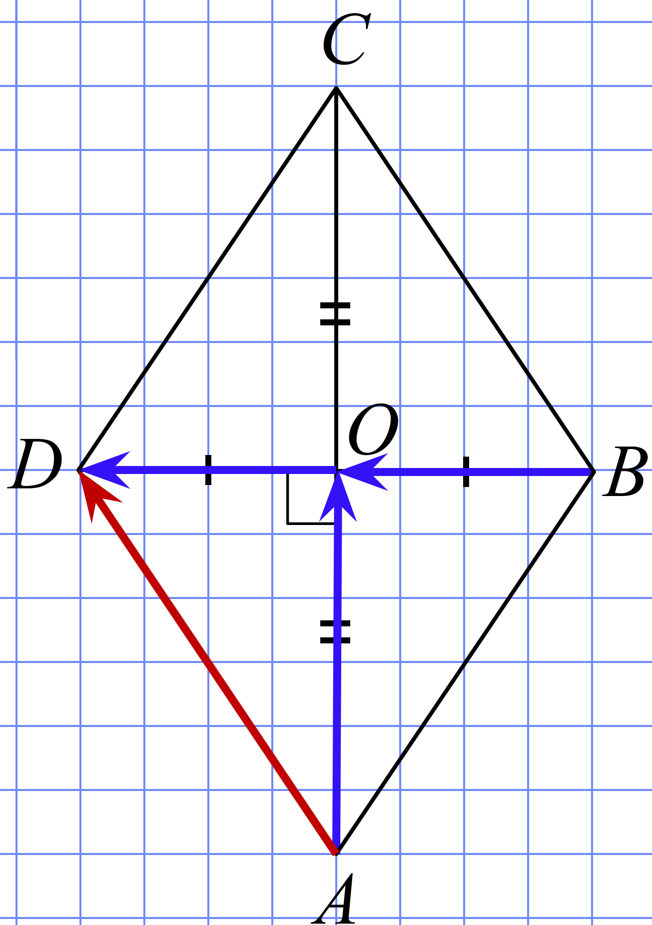
Решение заданий №3 ВЕКТОРЫ

по материалам открытого банка задач ЕГЭ по математике 2016года

http://mathege.ru/or/ege/Main.html

Прототип задания B3(№ 27717)

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$.



Решение.

По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$$

Найдём длину AD из п/у ΔAOD (т.к. $ABCD$ – ромб, то $AC \perp BD$ и $BO = OD = 6$, $AO = OC = 8$)

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = AD^2 = AO^2 + OD^2$$

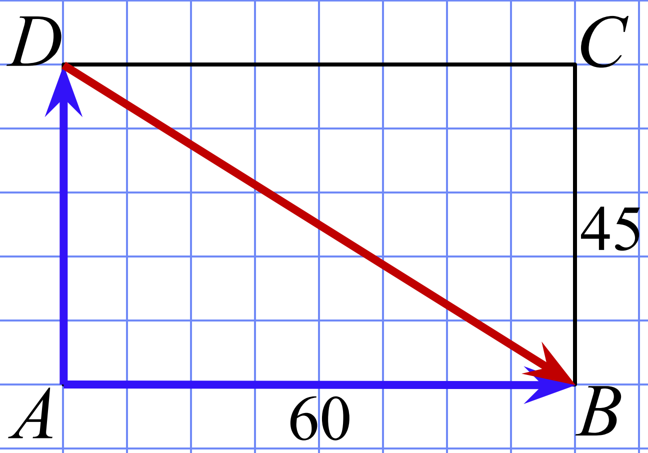
$$AD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$AD = \sqrt{100} = 10$$

Ответ: 10.

Прототип задания B3 (27709)

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 60 и 45. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Решение.

По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=$$

$$=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$$

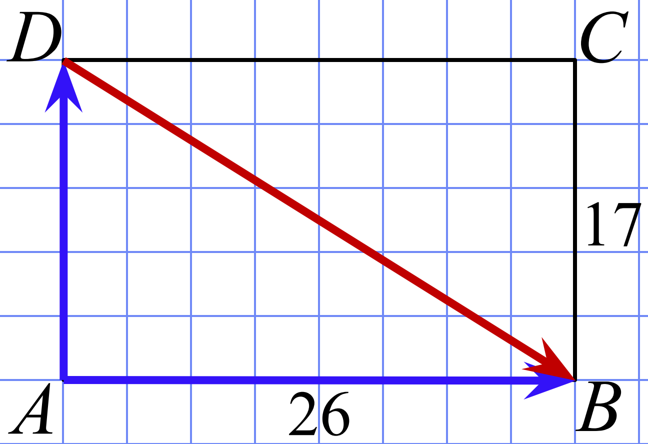
$$\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB=\sqrt{AB^2+AD^2}$$

$$\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{60^2+45^2}=\sqrt{5625}=75$$

Ответ: 75.

Прототип задания B3 (27710)

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 17 и 26. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Решение.

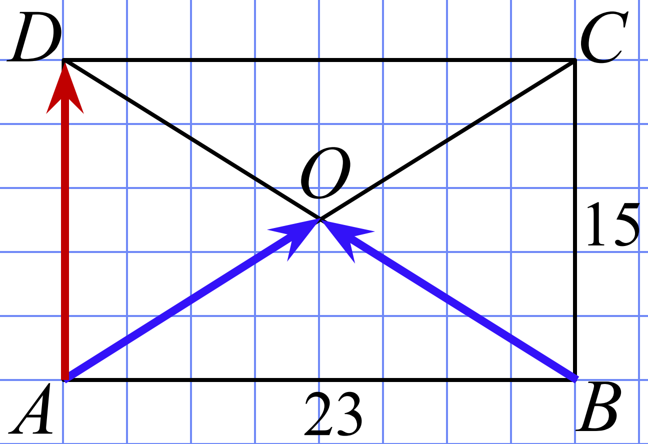
Т.к. векторы $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ *, то их скалярное произведение*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Ответ: 0.

Прототип задания B3 (27711)

Две стороны прямоугольника равны 15 и 23. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.



Решение.

По правилу треугольника:

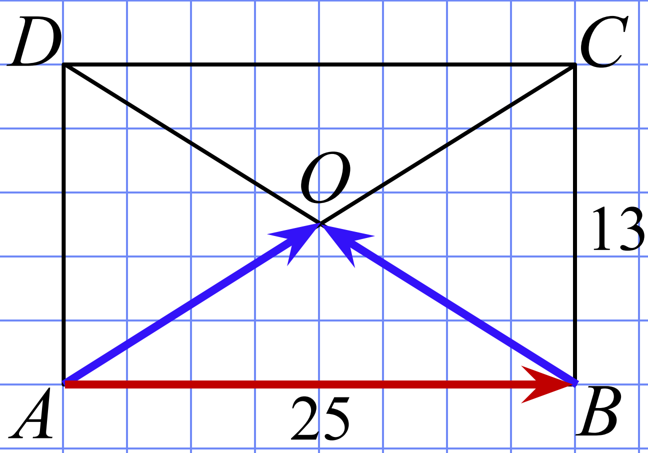
$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=15$$

Ответ: 15.

Прототип задания B3 (27712)

Две стороны прямоугольника равны 13 и 25. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.



Решение.

По правилу треугольника:

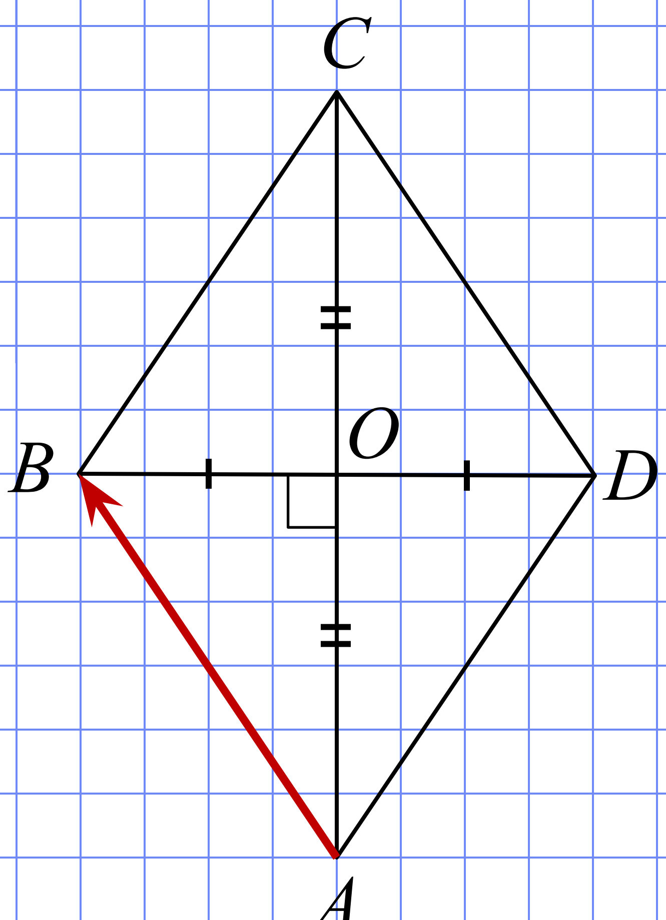
$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 25$$

Ответ: 25.

Прототип задания B3(№ 27713)

Диагонали ромба $ABCD$ равны 54 и 72. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.



Решение.

Найдём длину $\overrightarrow{AB}$ *из п/у* ΔAOB

(т.к. ABCD – ромб, то $AC \perp BD$

и $BO = OD = 27$, $AO = OC = 36$*)*

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

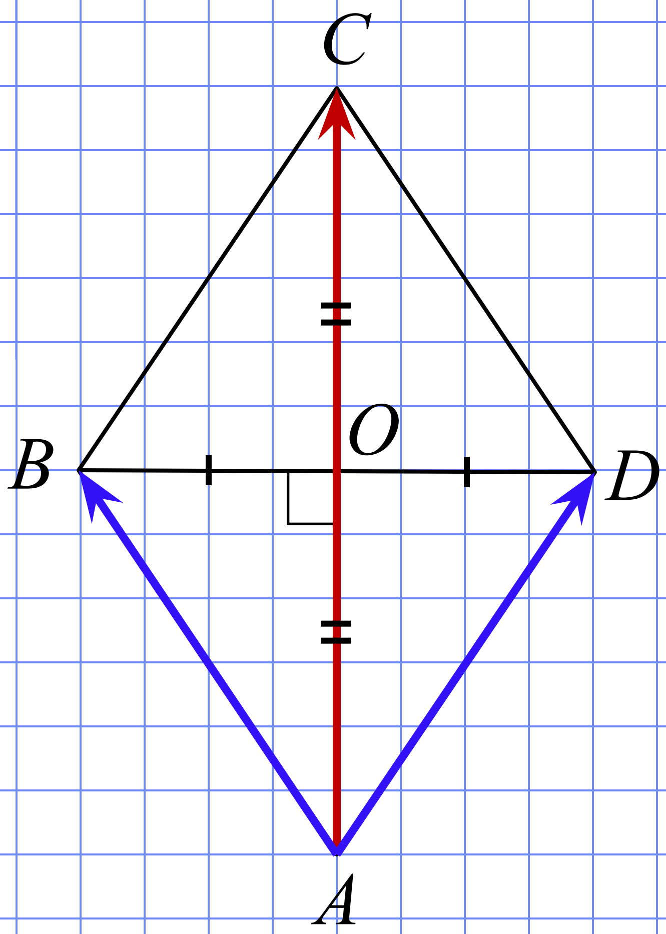
$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{AO^2 + OB^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{27^2 + 36^2} = 45$$

Ответ: 45.

Прототип задания B3 (№ 27714)

Диагонали ромба $ABCD$ равны 44 и 66. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.



Решение.

По правилу параллелограмма

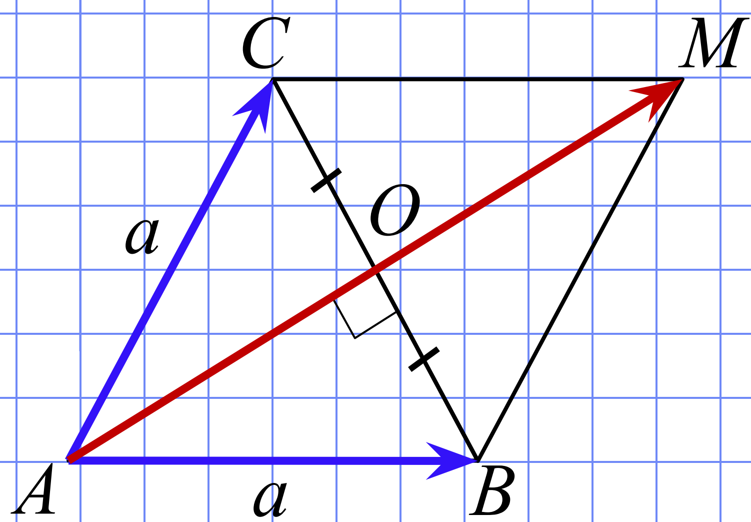
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=66$$

Ответ: 66.

Прототип задания B3(27720)

Стороны правильного треугольника ABC равны $45\sqrt{3}$.
Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Решение.

По правилу параллелограмма:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AO},$$

где AO – высота, медиана, биссектриса р/с Δ ABC

$$AO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

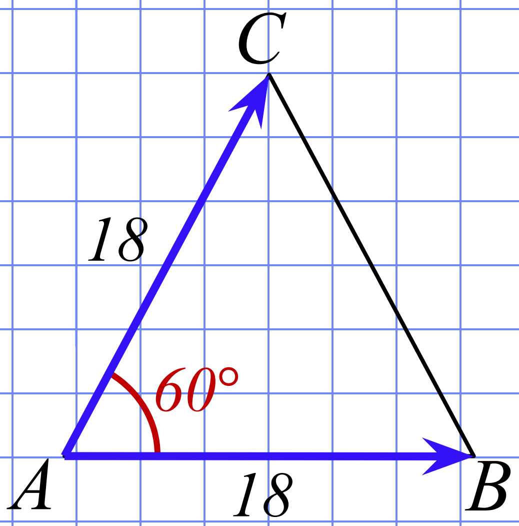
$$AO = \frac{45\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{45 \cdot 3}{2} = 67{,}5$$

$$AM = 135$$

Ответ: 135.

Прототип задания B3(27722)

Стороны правильного треугольника ABC равны 18. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



Решение.

По определению скалярного произведения, имеем:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos \angle A,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 \cdot 18 \cdot \cos 60°$$

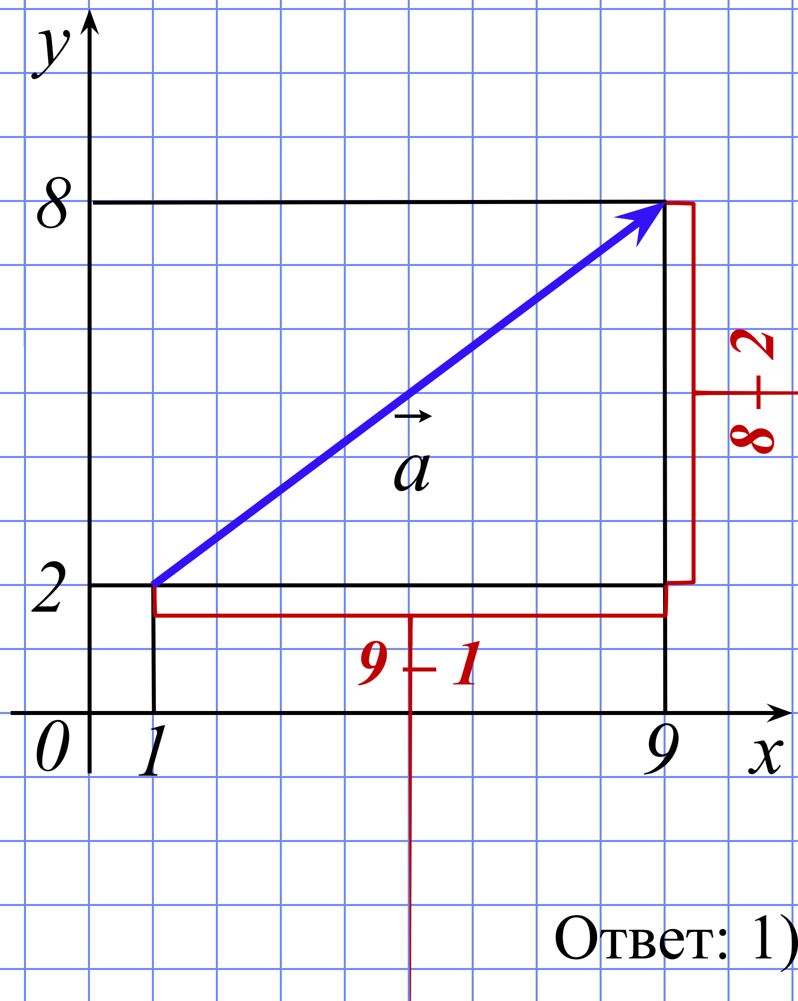
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 324 \cdot \frac{1}{2} = 162$$

Ответ: 162.

Прототип задания B3 (№ 00000)

Дан вектор $\vec{a}$.

Найдите: 1) координаты вектора; 2) длину вектора.



Решение.

1) координаты вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\};$$

$$\vec{a}\{9 - 1;\, 8 - 2\};$$

$$\vec{a}\{8;\, 6\}.$$

2) длина вектора: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2};$

или: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$

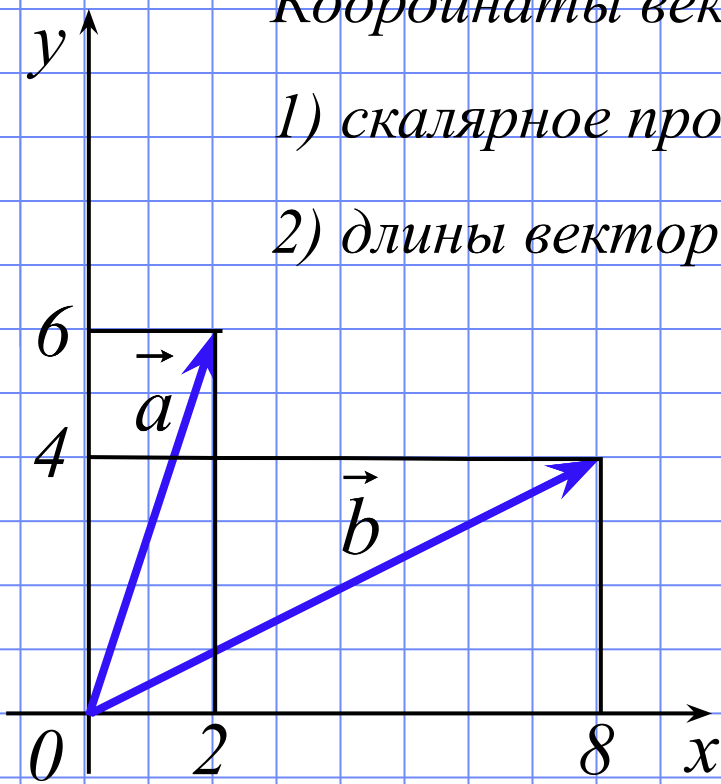
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 1) {8; 6}; 2) 10.

Прототип задания B3 (№ 00000)

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдите: 1) скалярное произведение; 2) длины векторов.



<u>Решение.</u>

Координаты векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*:* $\vec{a}\{2;\,6\};\ \vec{b}\{8;\,4\}$

1) скалярное произведение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$

2) длины векторов: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}};\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 8 + 6\cdot 4 = 40$

2) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40};$

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}.$

Ответ: 1) 40; 2) $\sqrt{40}$; $\sqrt{80}$.

Прототип задания B3 (№ 00000)

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдите: 1) сумму координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$;

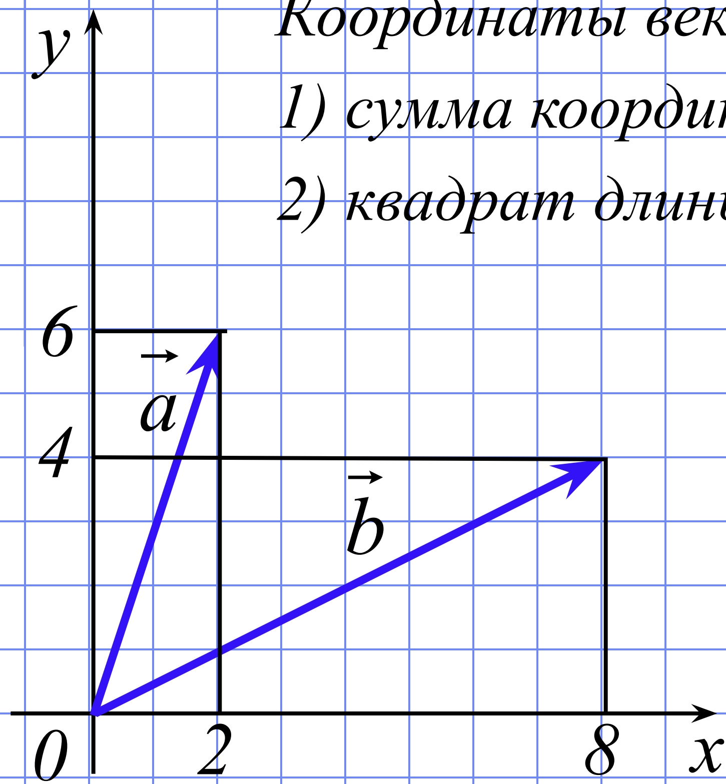
2) найдите квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Решение.

Координаты векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$: $\vec{a}\{2;6\}$; $\vec{b}\{8;4\}$

1) сумма координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$: $x_1+x_2+y_1+y_2$

2) квадрат длины вектора: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = x^2+y^2$



1) *сумма векторов* $\vec{a}+\vec{b}$:

$$
\begin{array}{r}
\vec{a}\{2;6\} \\
+\ \vec{b}\{8;4\} \\
\hline
\vec{a}+\vec{b}\ \{10;10\}
\end{array}
$$

сумма координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$:

$$10+10=20$$

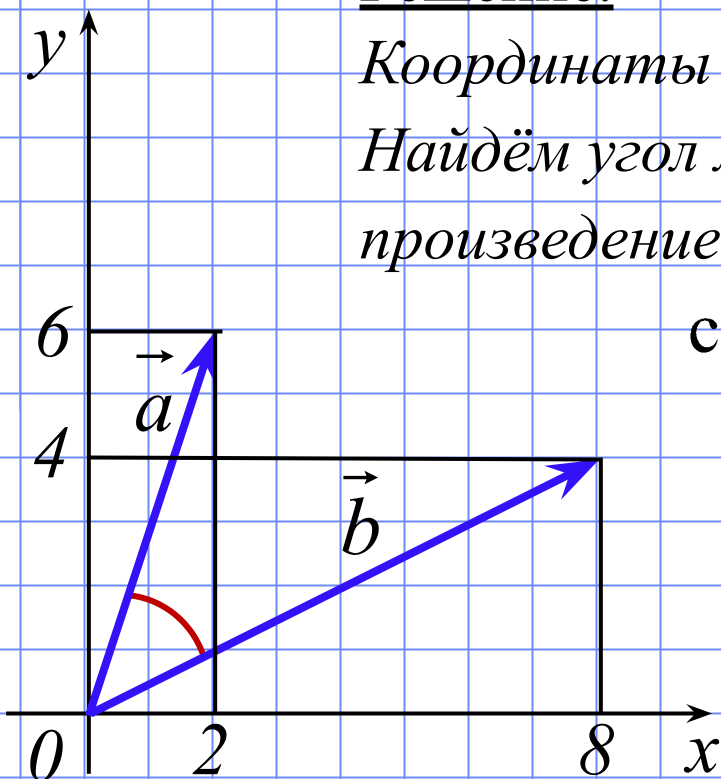
$$2)\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 10^2+10^2 = 200$$

Ответ: 1) 20; 2) 200.

Прототип задания B3 (№ 27735)

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ дайте в градусах.



Решение.

Координаты векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$: $\vec{a}\{2;\,6\};\ \vec{b}\{8;\,4\}$

Найдём угол между ними через скалярное произведение:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}}$$

$$= \frac{2\cdot 8+6\cdot 4}{\sqrt{2^2+6^2}\cdot\sqrt{8^2+4^2}} = \frac{40}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{80}} =$$

$$= \frac{40}{\sqrt{3200}} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

Ответ: 45.

$$\Rightarrow\ \varphi = 45^\circ$$

Используемые материалы

- http://mathege.ru/or/ege/Main.html – *Материалы открытого банка заданий по математике 2015 года*