Диференціальні рівняння ІІ порядку.

План.

1. Деякі типи диференціальних рівнянь другого порядку, що зводяться до рівнянь першого порядку.
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
3. Неоднорідні лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами .

1. а) Рівняння, що не містить шукану функцію у

Рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$ (1) явно не містить шукану функцію у.

Для розв’язування цього рівняння позначимо:

$$\frac{dy}{dx} = p, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

і підставимо знайдені вирази у (1), тоді отримаємо рівняння першого порядку:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

Проінтегруємо це рівняння і знайдемо його загальний розв'язок: $p = p(x, C_1)$

Тоді загальний інтеграл буде мати вигляд:

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2$$

б) Рівняння, що не містить незалежну змінну x.

Рівняння $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$ (2) не містить явно незалежну змінну x. Для розв'язування цього рівняння позначимо: $\frac{dy}{dx} = p$, але будемо вважати, що p

є функція від y. Тоді: $\frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dx}$

Підставимо знайдені вирази у рівняння (2) і отримаємо: $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$. Звідси знайдемо:

$p = p(y, C_1)$.

Тоді $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$.

Проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо розв’язок рівняння (2):

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0$$

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння другого порядку наз. лінійним, якщо шукана функція у та її похідні y', y'' , що входять у рівняння, мають тільки перший степінь:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (3)$$

Коефіцієнти: $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$ – задані функції від x, або сталі величини, є неперервними для всіх значень x.

Якщо $f(x) \neq 0,$ то рівняння (3) наз. лінійним неоднорідним рівнянням, в іншому випадку- лінійним однорідним .

Властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Теорема 1.

Якщо y_1, y_2 -2 частинних розв’язки лінійного однорідного диференціального рівняння 2 порядку:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

то $y_1 + y_2$ -також є розв’язком цього рівняння.

Теорема 2.

Якщо y_1 -є розв’язком лінійного однорідного диференціального рівняння 2 порядку:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

То Cy_1 -також є розв’язком цього рівняння.

Означення.

Розв’язки лінійного однорідного диференціального рівняння 2 порядку y_1, y_2 лінійно незалежні на $[a,b]$:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

якщо $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$.

Теорема 3.

Якщо y_1, y_2 -2 лінійно незалежні розв’язки лінійного однорідного диференціального рівняння 2 порядку:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$, то

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ -його загальний розв’язок, де

$C_1, C_2 -$ довільні сталі.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$y'' + py' + qy = 0$ (4) , де p,q-сталі числа.

Частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y = e^{kx}, k - const,$$

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$$

Підставимо знайдені значення у рівняння (4), отримаємо:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

$$e^{kx} \neq 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (5)$$

Рівняння (5) наз. характеристичним рівнянням для рівняння (4). Характеристичне рівняння- це квадратне рівняння, що має 2 розв’язки: k_1, k_2 .

Розглянемо окремі випадки:

а) корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$):
загальний розв’язок рівняння (4) має вигляд:

$$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \; C_1, C_2 - const$$

б) корені характеристичного рівняння дійсні і рівні($k_1 = k_2$):
загальний розв’язок рівняння (4) має вигляд:

$$y_{з.о.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}, \; C_1, C_2 - const$$

с) корені характеристичного рівняння комплексні:

У випадку: $\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$, де:

$$i^2 = -1, \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Корені k_1, k_2 – комплексно спряжені.
Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

$$C_1, C_2 - const$$

3.Неоднорідні лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами .

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad . \qquad (6)$$

Теорема 1. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6) дорівнює сумі якого-небудь частинного розв'язку цього рівняння $y_{ч.н.}$ і загального розв'язку $y_{з.о.}$ відповідного однорідного рівняння:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad ,$$

тобто:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} \qquad (7)$$

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8)$$

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (9) наз. однорідним, що відповідає даному неоднорідному лінійному диференціальному рівнянню, де p,q-дійсні числа, f(x) -задана функція.

Загальний розв'язок $y_{з.н.}$ рівняння (8) можна записати у вигляді:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.},$$

де: $y_{з.о.}$ - загальний розв'язок рівняння (9), а $y_{ч.н.}$ - частинний розв'язок рівняння (8).

Розглянемо декілька випадків.

1. Нехай права частина рівняння (8) є добуток показникової функції на поліном n-того степеня, тобто:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

Тоді можливі такі випадки:

а) Число α не дорівнює значенням коренів характеристичного рівняння: $k^2 + pk + q = 0,$

тобто: $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, тоді частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x),$$

$$Q_n(x) = A_n x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_0,$$

де $Q_n(x) -$ поліном n-того степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Підставивши вираз для $y_{ч.н.}$ у рівняння (8), скоротивши на $e^{\alpha x}$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему з (n+1) рівнянь для визначення коефіцієнтів: $A_n x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_0$, кількість яких дорівнює: n+1.

b). Число α є простий корінь характеристичного рівняння: $k^2 + pk + q = 0$, тобто: $\alpha = k_1, \alpha \neq k_2$, тоді частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x \cdot Q_n(x),$$

$$Q_n(x) = A_n x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_0,$$

де $Q_n(x) -$ поліном n-того степеня з невизначеними коефіцієнтами.

в). Число α є двократний корінь характеристичного рівняння: $k^2 + pk + q = 0,$ тобто: $\alpha = k_1 = k_2$, тоді частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x^2 \cdot Q_n(x),$$

$$Q_n(x) = A_n x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_0,$$

де $Q_n(x) -$ поліном n-того степеня з невизначеними коефіцієнтами.

2. Нехай права частина рівняння (8)