# Использование экспоненциальных методов для анализа временных рядов

Графеева Н.Г.

2016

# Какие задачи могут решаться экспоненциальными методами?

- сглаживание временных рядов (smoothing);
- разметка временных рядов (labeling);
- краткосрочное и долгосрочное прогнозирование (forecasting);
- И др.

# Популярные экспоненциальные методы

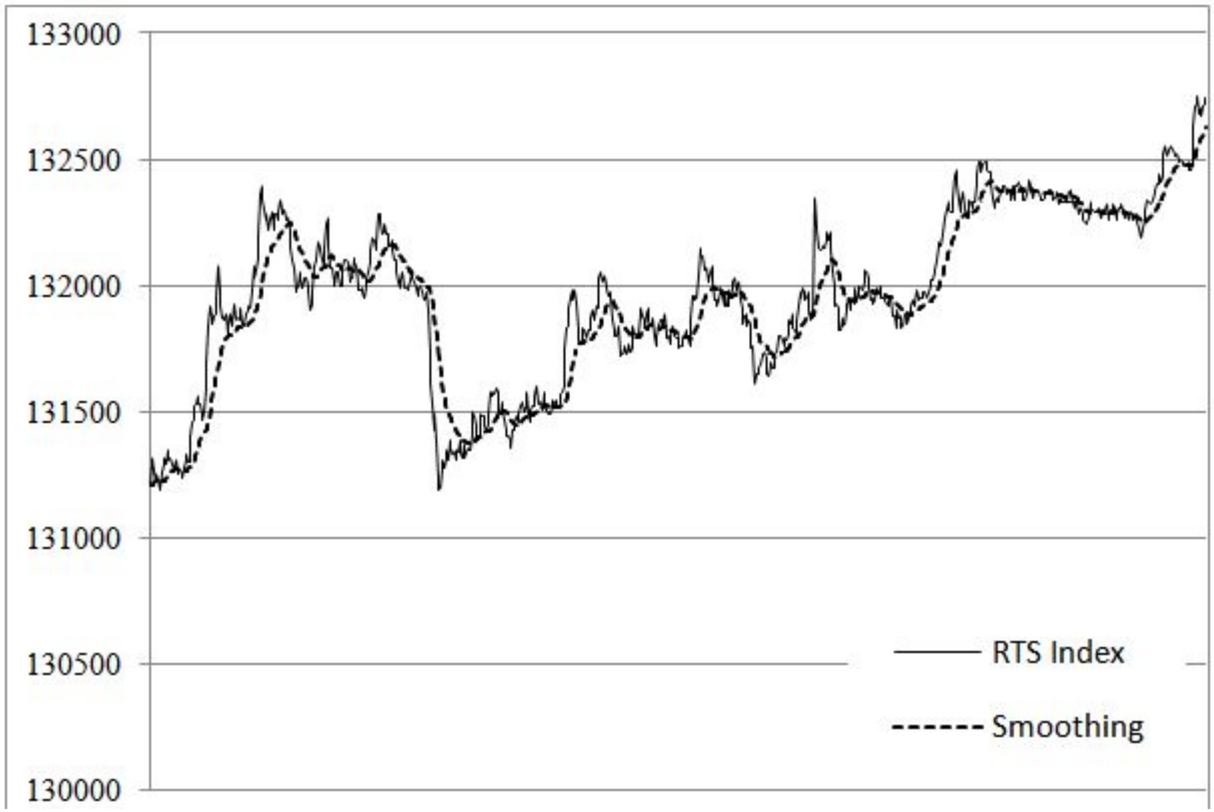
- Одинарный (учитывает предыдущие значения с коэффициентами);
- Двойной (добавляется учет трендов);
- Тройной (добавляется учет циклов).

# Одинарное экспоненциальное сглаживание (smoothing)

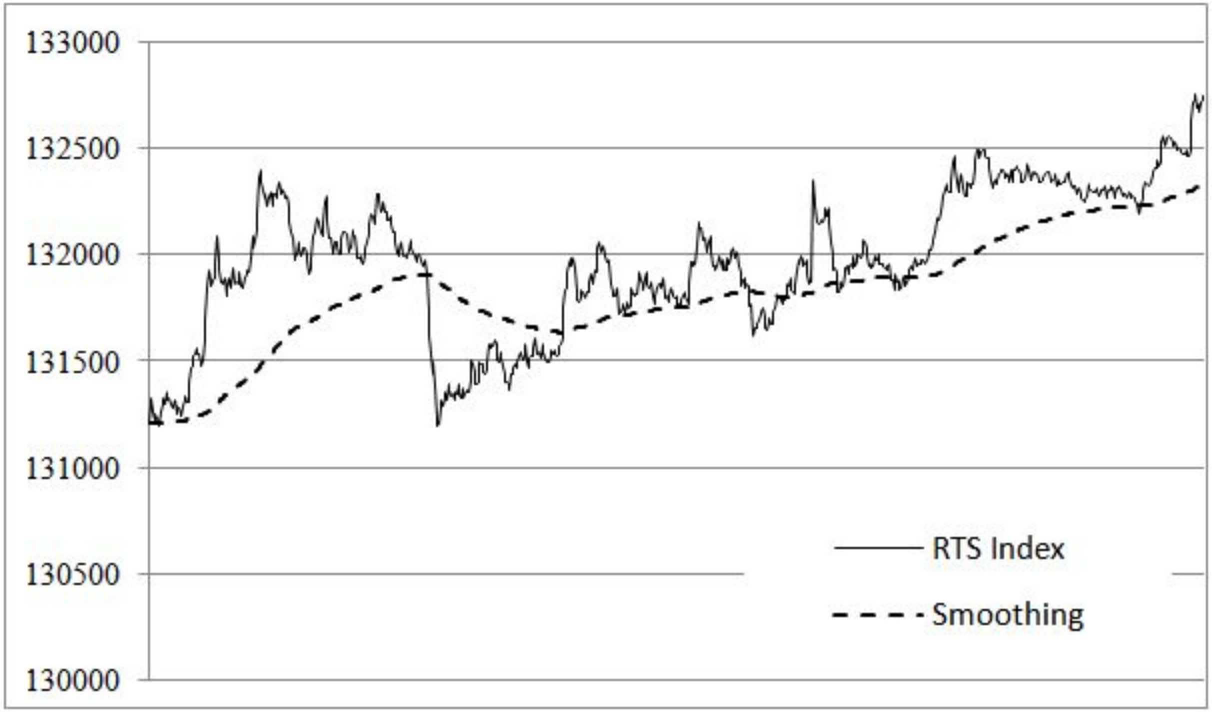
$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}, \qquad t > 1, \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

$$S_1 = y_1, \qquad t = 1$$

# Пример. Одинарное экспоненциальное сглаживание (α =0.1)



# Пример. Одинарное экспоненциальное сглаживание (α =0.01)



# Разметка трендов с помощью одинарного экспоненциального сглаживания

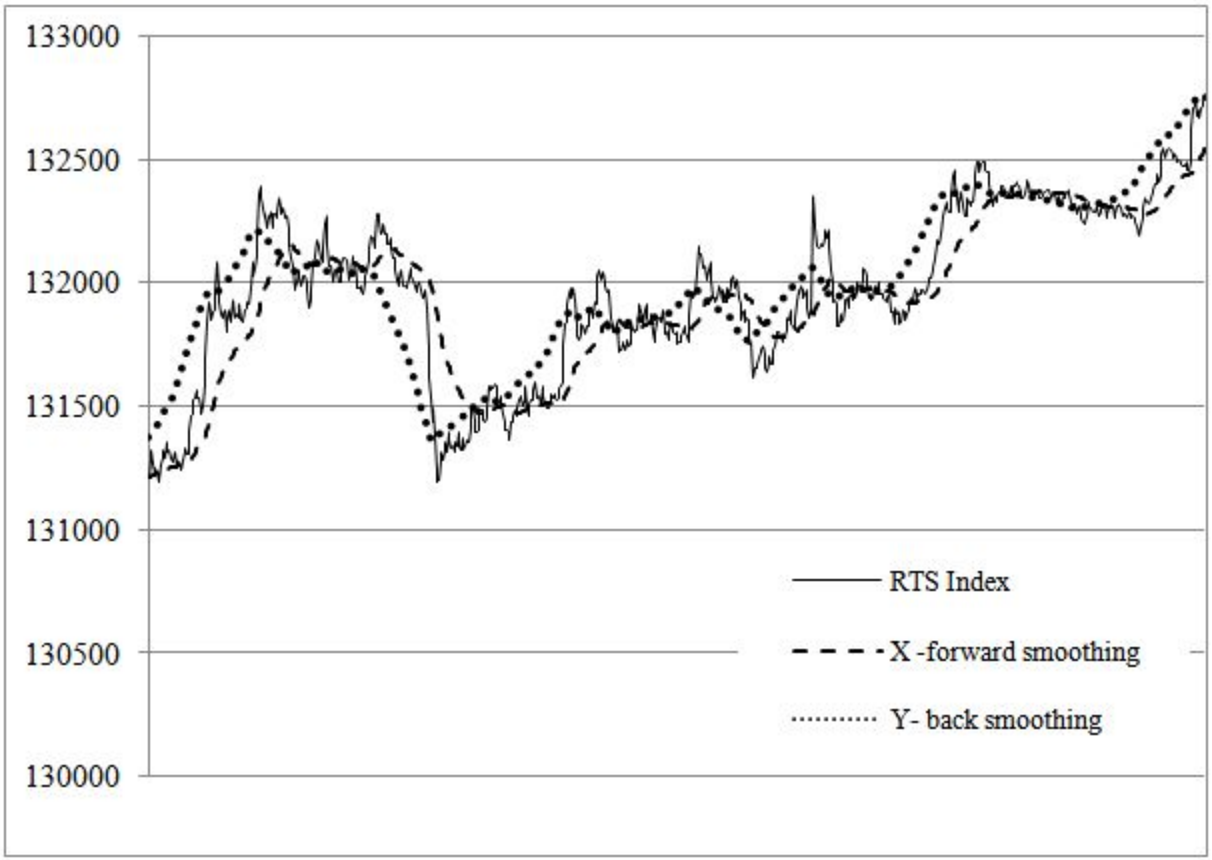
$$X_t = \alpha y_t + (1-\alpha)X_{t-1}, \qquad t > 1 (forward\ smoothing)$$

$$X_1 = y_1, \qquad t = 1$$

$$Z_t = \alpha y_t + (1-\alpha)Z_{t+1}, \qquad t < n\ (back\ smoothing)$$

$$Z_n = y_n, \qquad t = n$$

# Пример. Разметка трендов (α = 0.05)



# Как формально определить тренды?

| | |
|---|---|
| $X_t > Z_t,\ \lvert X_t - Z_t \rvert > \sigma$ | descending trend |
| $X_t < Z_t,\ \lvert X_t - Z_t \rvert > \sigma$ | ascending trend |
| $\lvert X_t - Z_t \rvert < \sigma$ | sideways trend |

# Прогнозирование на один шаг вперед с помощью одинарного сглаживания (Single Smoothing Forecast)

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}, \qquad t > 1, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$S_1 = y_1, \qquad t = 1$$

$$F_{t+1} = S_t \; (forecasting)$$

# Прогнозирование на несколько шагов вперед (Bootstrap Forecast)

$$S_t = \alpha y_{orgin} + (1-\alpha)S_{t-1}\ (smoothing)$$

$$F_{t+1} = S_t\ (forecasting)$$

# Пример. Сглаживание на несколько шагов вперед

Пусть последнее значение (в точке t) последовательности равно 70, а его сглаженное значение 71.5. При этом $\alpha$ = 0.1. Тогда значение в точке (t+1) вычисляется так:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \alpha y_{orgin} + (1-\alpha) S_t \\ &= 0.1(70) + 0.9(71.7) \\ &= 71.5\,. \end{aligned}$$

А в точке (t+2) так:

$$S_{t+2} = 0.1(70) + 0.9(71.5) = 71.35$$

# Сравнение прогнозирования на один шаг и на несколько шагов

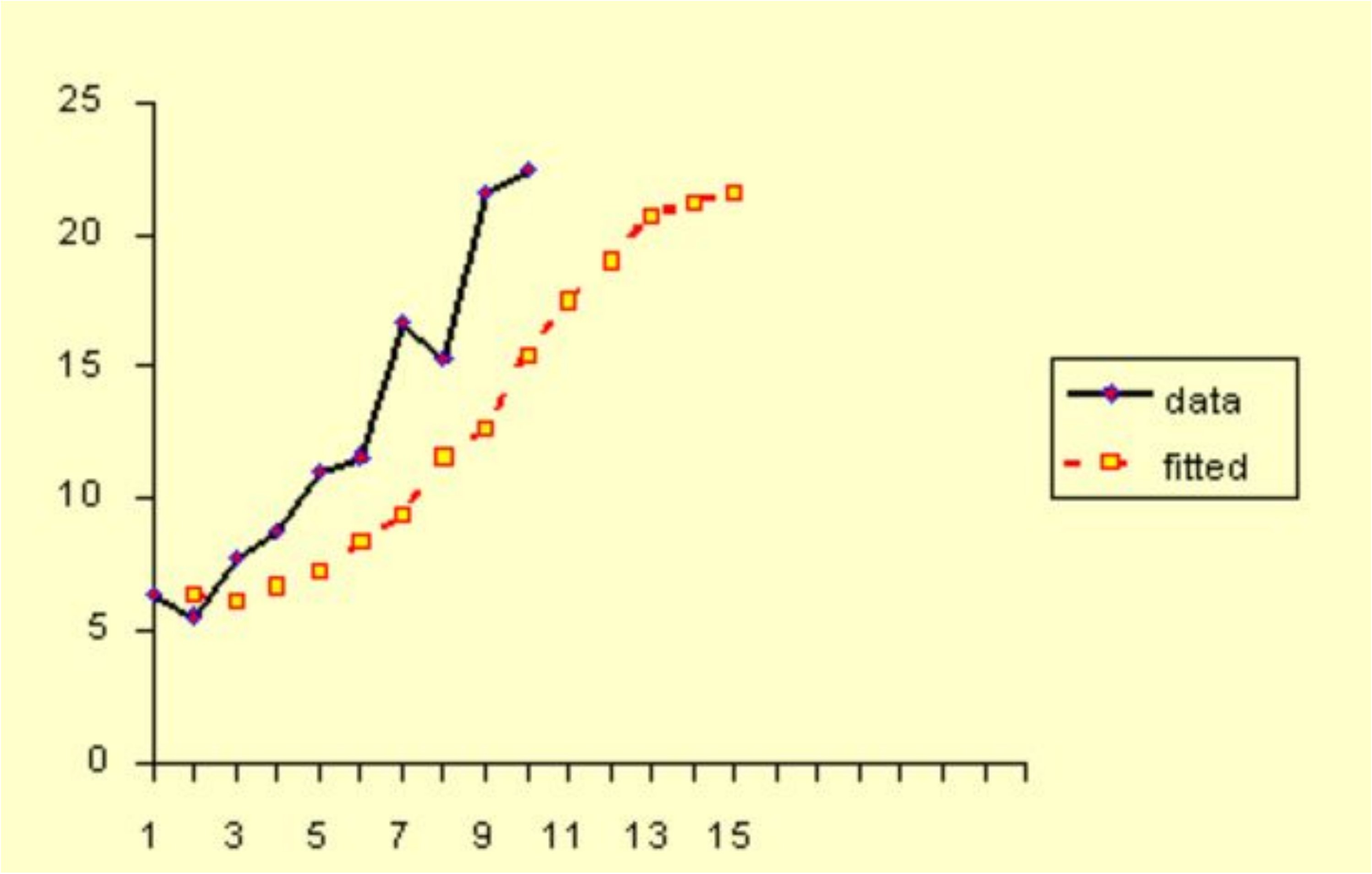
| Bootstrap forecast | Data | Single Smoothing Forecast |
|---|---|---|
| 71.50 | 75 | 71.5 |
| 71.35 | 75 | 71.9 |
| 71.21 | 74 | 72.2 |
| 71.09 | 78 | 72.4 |
| 70.98 | 86 | 73.0 |

# Одинарное экспоненциальное сглаживание и тренды

Одинарное экспоненциальное сглаживание не слишком хорошо сглаживает тренды. Приведем пример данных, имеющих склонность к наличию тренда, и соответствующих вычисленных сглаженных значений при $\alpha = 0.3$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 6.4 | 5.6 | 7.8 | 8.8 | 11.0 | 11.6 | 16.7 | 15.3 | 21.6 | 22.4 |
| S | | 6.4 | 6.2 | 6.7 | 7.3 | 8.4 | 9.4 | 11.6 | 12.7 | 15.4 |

# Пример одинарного экспоненциального сглаживания



# Двойное экспоненциальное сглаживание (Double Exponential Smoothing)

Гораздо лучше трендовые тенденции в исходных данных сглаживаются с помощью технологии двойного экспоненциального сглаживания. Соответствующие формулы, учитывающие трендовые тенденции, принимают вид:

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \quad 0 \le \alpha \le 1$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1} \quad 0 \le \gamma \le 1$$

# Начальные значения для трендовой компоненты

Есть несколько вариантов, как можно задать начальные значения для реккурентных формул. Значение для $S_1$ устанавливается как $y_1$. А вот для $b_1$ возможны варианты. Например:

$$b_1 = y_2 - y_1$$

$$b_1 = \frac{1}{3}[(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3)]$$

$$b_1 = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

# Как подобрать подходящие параметры?

- Оптимальные значения для ***α*** и ***γ*** могут быть получены с помощью нелинейной оптимизационной технологии известной под названием Marquardt Algorithm (или **Алгоритм Левенберга — Марквардта**) либо с использованием самого примитивного перебора с равномерным шагом по сетке в диапазоне [0-1,0-1].

# Прогнозирование с двойным экспоненциальным сглаживанием

Прогнозирование на один шаг:

$$F_{t+1} = S_t + b_t$$

Прогнозирование на *m* шагов:

$$F_{t+m} = S_t + mb_t$$

# Пример

Подготовим пример, позволяющий сравнить два подхода к сглаживанию и прогнозированию. Исходные данные – ряд:

**6.4, 5.6, 7.8, 8.8, 11, 11.6, 16.7, 15.3, 21.6, 22.4**

При двойном сглаживании лучшие результаты были получены при $\alpha = 0.3623$ и $\Upsilon = 0.1$. Для одинарного сглаживания лучшим параметром оказался $\alpha = 0.977$. Начальное приближение для b1 было выбрано так:

$$b_1 = ((y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3))/3 = 0.8$$

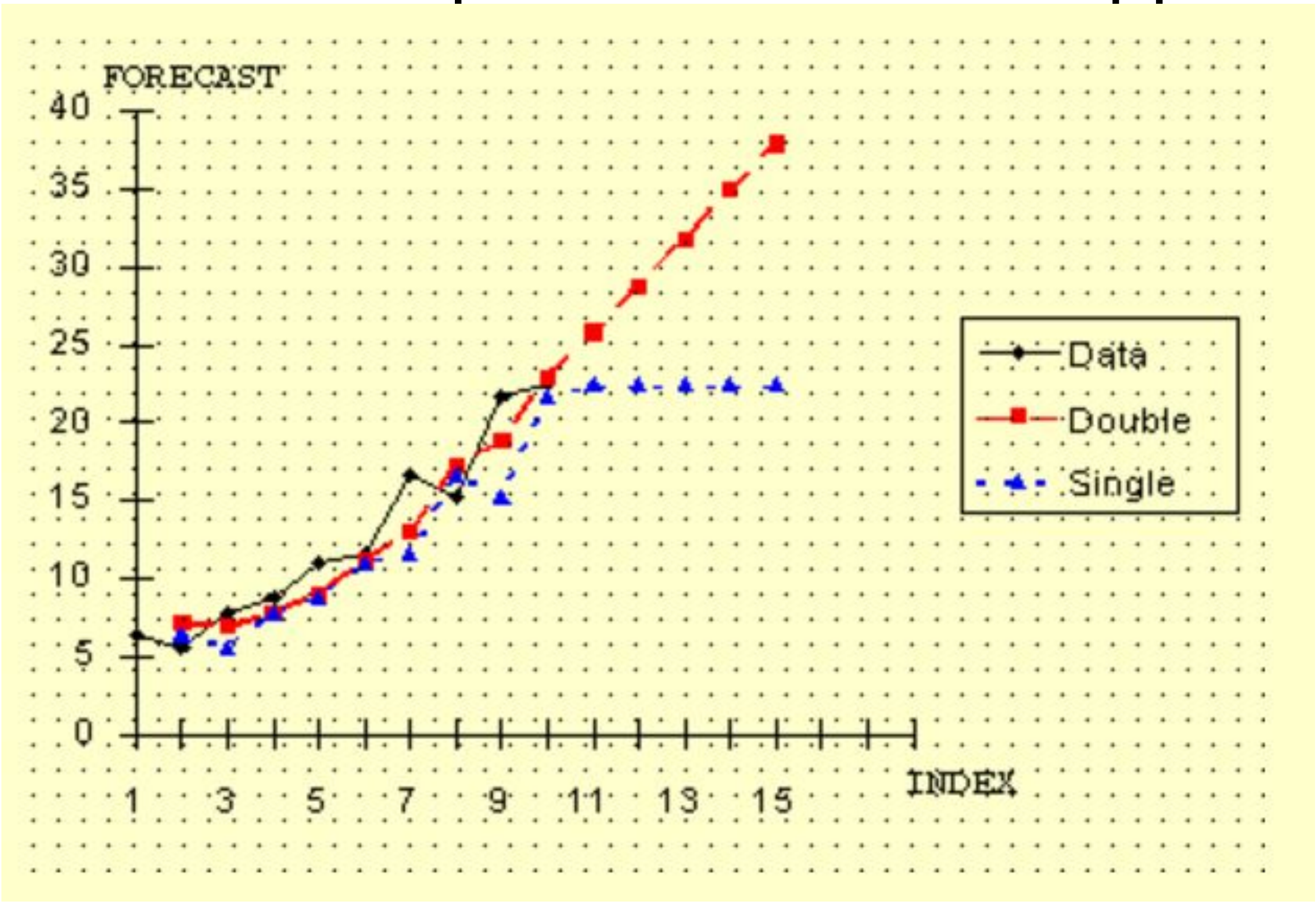
# Результаты сглаживания (и прогнозирования на один шаг)

| Data | Double | Single |
|---|---|---|
| 6.4 | 6.4 | |
| 5.6 | 6.6 (Forecast = 7.2) | 6.4 |
| 7.8 | 7.2 (Forecast = 6.8) | 5.6 |
| 8.8 | 8.1 (Forecast = 7.8) | 7.8 |
| 11.0 | 9.8 (Forecast = 9.1) | 8.8 |
| 11.6 | 11.5 (Forecast = 11.4) | 10.9 |
| 16.7 | 14.5 (Forecast = 13.2) | 11.6 |
| 15.3 | 16.7 (Forecast = 17.4) | 16.6 |
| 21.6 | 19.9 (Forecast = 18.9) | 15.3 |
| 22.4 | 22.8 (Forecast = 23.1) | 21.5 |

# Сравнение результатов прогнозирования двойным и одинарным экспоненциальными методами

| Period | Single | Double |
|---|---|---|
| 11 | 22.4 | 25.8 |
| 12 | 22.4 | 28.7 |
| 13 | 22.4 | 31.7 |
| 14 | 22.4 | 34.6 |
| 15 | 22.4 | 37.6 |

# Сравнение результатов прогнозирования двойным и одинарным экспоненциальными методами



# Тройное экспоненциальное сглаживание и прогнозирование

Что происходит, если исходный временной ряд содержит не только тренды, но и периодичность (например, сезонные колебания)? Двойное экспоненциальное предсказание не работает! В этом случае имеет смысл обратить внимание на тройное экспоненциальное сглаживание и предсказание (с учетом и трендов, и периодичности). Эта технология носит название Хольта-Винтера или HW(Holt-Winters).

$$S_t = \alpha \frac{y_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \quad \text{OVERALL SMOOTHING}$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1} \quad \text{TREND SMOOTHING}$$

$$I_t = \beta \frac{y_t}{S_t} + (1-\beta) I_{t-L} \quad \text{SEASONAL SMOOTHING}$$

$$F_{t+m} = (S_t + m b_t) I_{t-L+m} \quad \text{FORECAST}$$

# Периодичность

- L – длина периода (должна быть определена заранее). Исходные данные должны содержать как минимум – два периода.

# Параметры

- Все параметры (α, β, Ύ) – это значения в интервале (0,1). Подбор параметров можно осуществлять все тем же методом **Левенберга — Марквардта**

либо перебором по сетке куба [0-1,0-1,0-1].

# Начальное значение для трендового компонента

$$b = \frac{1}{L}\left(\frac{y_{L+1} - y_1}{L} + \frac{y_{L+2} - y_2}{L} + \cdots + \frac{y_{L+L} - y_L}{L}\right)$$

# Начальные значения для индексов сезонности

- Самая существенная деталь – среднее значение всех сезонных индексов должно быть равно 1. Этот параметр отражает влияние наблюдений внутри периода. Простейший способ расчета начальных значений для сезонных индексов:

$$I_i = L\frac{y_i}{\sum_1^L y_i}, \qquad 1 \le i \le L$$

# Начальные значения для индексов сезонности

Самая существенная деталь – среднее значение всех сезонных индексов должно быть равно 1. Этот параметр отражает влияние наблюдений внутри периода. Простейший способ расчета начальных значений для сезонных индексов:

$$I_i = L\frac{y_i}{\sum_1^L y_i}, \qquad 1 \le i \le L$$

# Пример. Возможный вариант расчета индексов сезонности

Технологию расчета индексов сезонности (индексов периодичности) поясним на конкретном примере. Пусть имеются наблюдения за 6 периодов (соответствуют 6 годам). Каждый период состоит из четырех наблюдений (соответствует данным о продажах за квартал). Тогда следующая последовательность шагов продемонстрирует технологию расчета индексов сезонности.

Шаг 1.

Вычислим средние продажи для каждого года:

$$A_p = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i}{4}, \quad p = 1, 2, \ldots, 6.$$

Шаг 2.

Определим индексы влияния для каждого наблюдения:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1/A_1$ | $y_5/A_2$ | $y_9/A_3$ | $y_{13}/A_4$ | $y_{17}/A_5$ | $y_{21}/A_6$ |
| $y_2/A_1$ | $y_6/A_2$ | $y_{10}/A_3$ | $y_{14}/A_4$ | $y_{18}/A_5$ | $y_{22}/A_6$ |
| $y_3/A_1$ | $y_7/A_2$ | $y_{11}/A_3$ | $y_{15}/A_4$ | $y_{19}/A_5$ | $y_{23}/A_6$ |
| $y_4/A_1$ | $y_8/A_2$ | $y_{12}/A_3$ | $y_{16}/A_4$ | $y_{20}/A_5$ | $y_{24}/A_6$ |

Шаг 3.

Определим начальные значения для индексов сезонности:

$$I_1 = (y_1/A_1 + y_5/A_2 + y_9/A_3 + y_{13}/A_4 + y_{17}/A_5 + y_{21}/A_6)/6$$

$$I_2 = (y_2/A_1 + y_6/A_2 + y_{10}/A_3 + y_{14}/A_4 + y_{18}/A_5 + y_{22}/A_6)/6$$

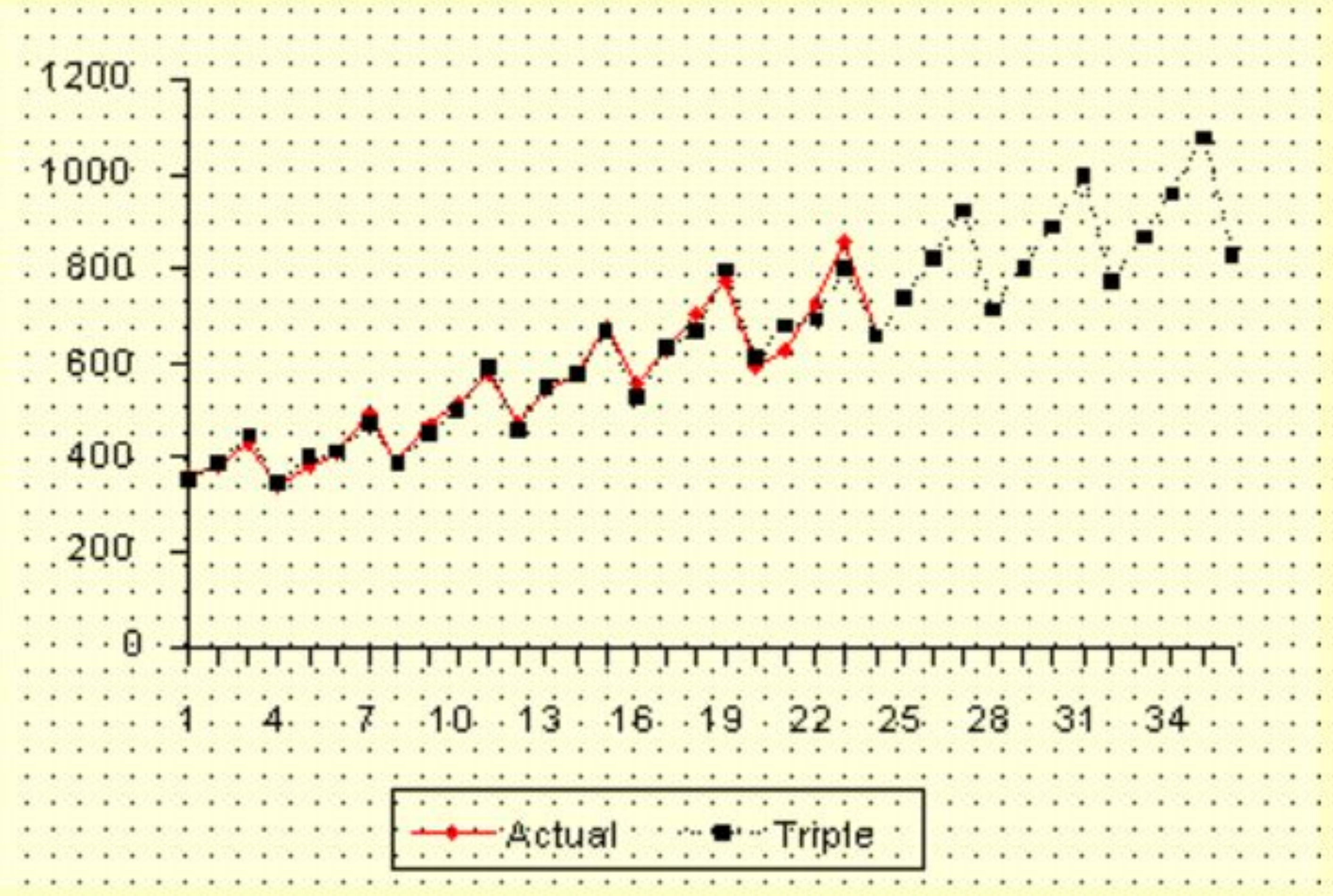
$$I_3 = (y_3/A_1 + y_6/A_2 + y_{11}/A_3 + y_{15}/A_4 + y_{19}/A_5 + y_{23}/A_6)/6$$

$$I_4 = (y_4/A_1 + y_6/A_2 + y_{12}/A_3 + y_{16}/A_4 + y_{20}/A_5 + y_{24}/A_6)/6.$$

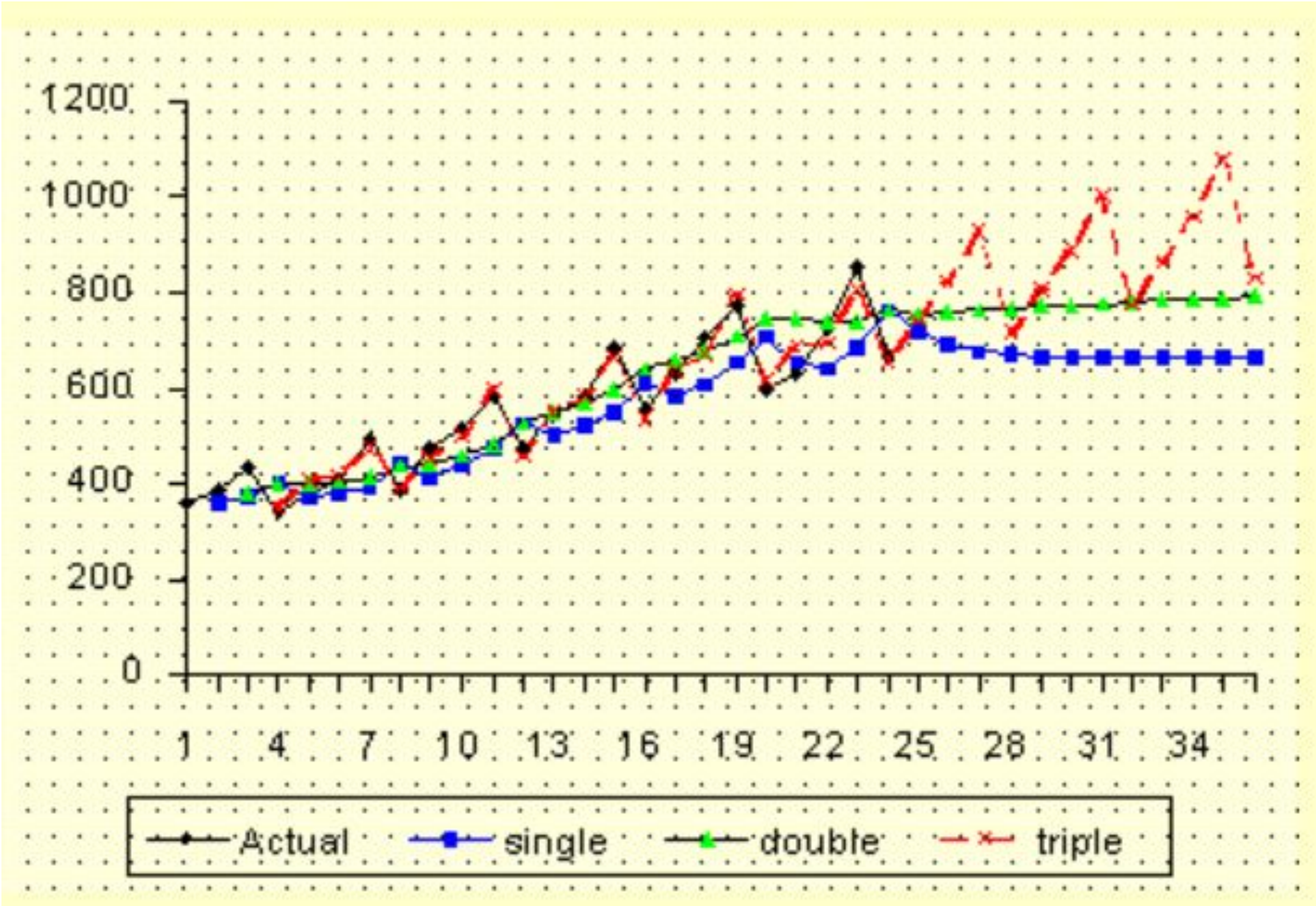
# Пример (исходные данные)

| | Quarter | Period | Sales | | Quarter | Period | Sales |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **90** | 1 | 1 | 362 | **93** | 1 | 13 | 544 |
| | 2 | 2 | 385 | | 2 | 14 | 582 |
| | 3 | 3 | 432 | | 3 | 15 | 681 |
| | 4 | 4 | 341 | | 4 | 16 | 557 |
| **91** | 1 | 5 | 382 | **94** | 1 | 17 | 628 |
| | 2 | 6 | 409 | | 2 | 18 | 707 |
| | 3 | 7 | 498 | | 3 | 19 | 773 |
| | 4 | 8 | 387 | | 4 | 20 | 592 |
| **92** | 1 | 9 | 473 | **95** | 1 | 21 | 627 |
| | 2 | 10 | 513 | | 2 | 22 | 725 |
| | 3 | 11 | 582 | | 3 | 23 | 854 |
| | 4 | 12 | 474 | | 4 | 24 | 661 |

# Пример (тройное экспоненциальное прогнозирование)



# Пример (три вида экспоненциального прогнозирования)



- Методы экспоненциального сглаживания и прогнозирования доказали на протяжении многих лет, что являются очень полезным во многих приложениях, связанных с прогнозированием. Метод впервые был предложен C.Holt в 1957 году и использовался для не сезонных и не трендовых рядов. Позднее (в 1958) C.Holt предложил модификацию с учетом трендов. А затем Winter (1965) обобщил идею с учетом сезонности. Так и появилось название метода Хольта-Винтера…

# А что же на эту тему есть в аналитических пакетах СУБД?

- Как ни странно, в аналитических пакетах на сегодняшний день экспоненциальные методы отсутствуют. Они есть только в статистических или data mining – библиотеках.

# Задание 2

Создать приложение, позволяющее:

- Делать ежедневные прогнозы потребления творога на основе метода Holt-Winter в разрезе всей сети ресторанов;
- Подобрать оптимальные параметры для метода;
- для выбранного интервала определять точность прогноза;
- Выводить результаты прогнозирования в виде графика и таблицы.

- Ссылку на приложение, логин и пароль для входа отправлять по адресу: N.Grafeeva@spbu.ru
- Тема - Data_Mining_2016_job2